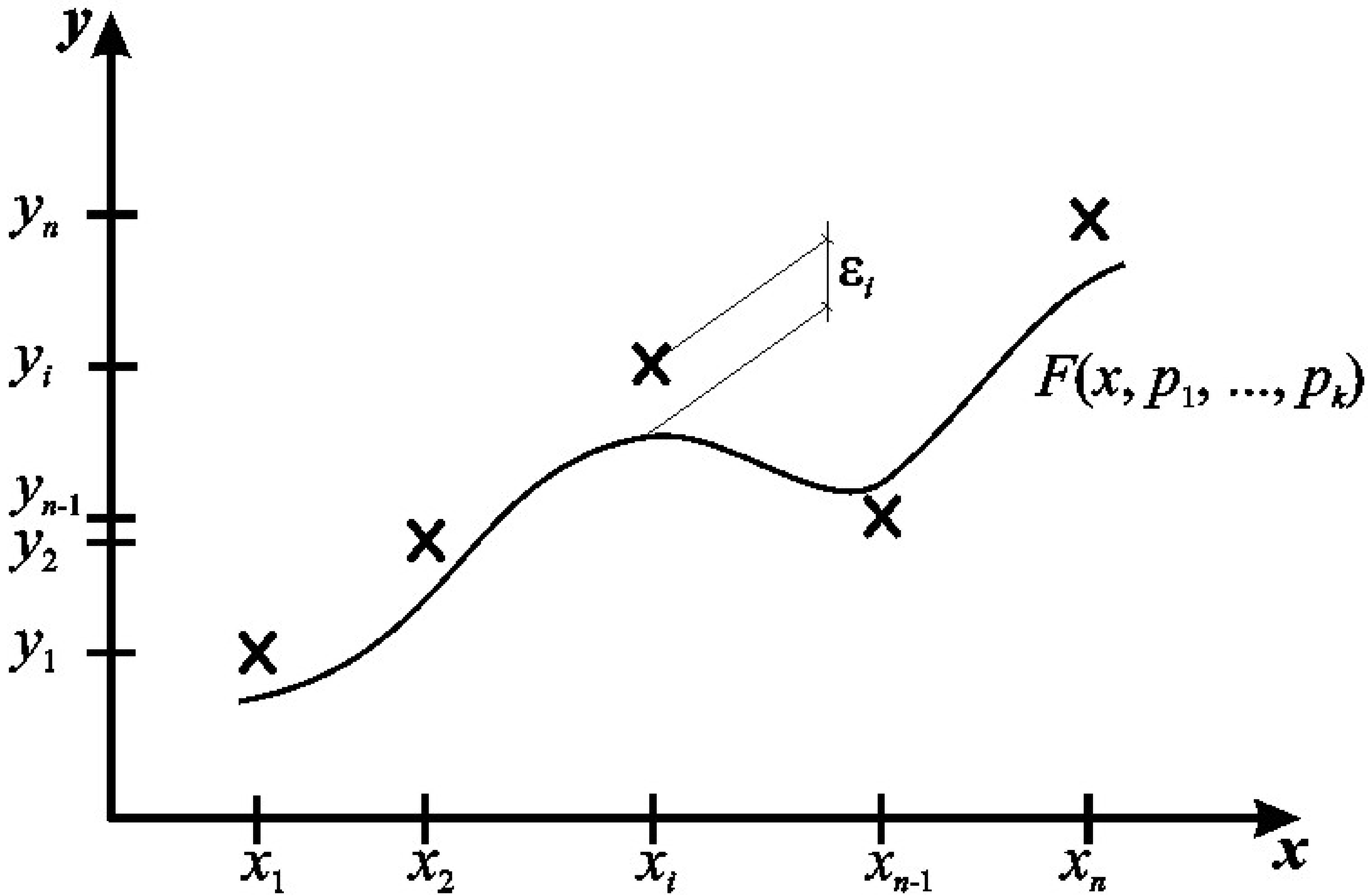
APROKSYMACJA

Definicja aproksymacji



y
y_n
y_i
y_{n-1}
y_2
y_1
ε_i
$F(x, p_1, ..., p_k)$
x_1
x_2
x_i
x_{n-1}
x_n
x

Dana jest funkcja jednej zmiennej:

$y = f(x),\ x \in [a, b]$

Należy dobrać taką funkcję $F(x, p_1, \ldots, p_k),\ x \in [a, b]$, aby w sensie przyjętego kryterium, funkcja $F(x, p_1, \ldots, p_k)$ możliwie dokładnie odtwarzała przebieg funkcji $f(x)$.

$p_1, \ldots, p_k$ – parametry wzoru empirycznego

Funkcja $f(x)$ może być zadana w postaci:

- zbioru punktów (aproksymacja punktowa):
  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_n) = y_n$

- wzoru analitycznego (aproksymacja integralna) – rzadziej spotykany przypadek

Kryteria aproksymacji punktowej dla funkcji jednej zmiennej konstruuje się w taki sposób, aby zminimalizować różnice między wartościami danej funkcji $f(x)$ a wartościami funkcji $F(x, p_1, ..., p_k)$ w punktach (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$.

Odchyłka:

$$\varepsilon_i = F(x_i, p_1, ..., p_k) - y_i$$

- Ogólna postać funkcji $F(x, p_1, \ldots, p_k)$ jest założona z góry, natomiast optymalizacja dotyczy nieznanych parametrów $p_1, \ldots, p_k$

Typowe metody aproksymacji funkcji jednej zmiennej

Dobór parametrów $p_1,...,p_k$ wzoru empirycznego, w taki sposób aby spełnione było założone kryterium dotyczące minimalizacji odchyłek

Kryteria:

- metoda wybranych punktów
- metoda średnich
- metoda sumowania bezwzględnych wartości
- metoda najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów

Dobór współczynników funkcji F :

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \min$$

Kryterium najmniejszych kwadratów:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i, p_1, \ldots, p_k) - y_i \right]^2 = \min}$$

n – ilość punktów

Zalety:

- kryterium jest „mocne” – zawiera kwadraty odchyłek, czyli liczby nieujemne

- prostota obliczeń minimum funkcji, pod warunkiem że rozpatruje się aproksymację w klasie wielomianów uogólnionych, czyli:

$$F(x, p_1, ..., p_k) = p_1\varphi_1(x) + p_2\varphi_2(x) + ... + p_k\varphi_k(x)$$

Aproksymacja liniowa funkcji jednej zmiennej

Dany jest zbiór punktów:

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \quad \ldots \quad (x_n, y_n)$$

Funkcja aproksymująca:

$$y = p_1 + p_2 x$$

Kryterium najmniejszych kwadratów:

$$S(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^{n} \left[p_1 + p_2 x_i - y_i \right]^2 = \min$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych:

$$\frac{\partial S(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 0$$

$$\frac{\partial S(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 0$$

czyli:

$$\frac{\partial S(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[p_1 + p_2 x_i - y_i\right] = 0$$

$$\frac{\partial S(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[p_1 + p_2 x_i - y_i\right]\cdot x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[p_1 + p_2 x_i - y_i\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[p_1 x_i + p_2 x_i^2 - y_i x_i\right] = 0$$

Układ ten zapisujemy w formie:

$$p_1 n + p_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$p_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + p_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

lub:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Y}$$

Liczymy:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$$

Aproksymacja funkcji jednej zmiennej – inna funkcja aproksymująca

Dany jest zbiór punktów:

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \quad \ldots \quad (x_n, y_n)$$

Funkcja aproksymująca:

$$y = p_1 + p_2 x + p_3 \frac{1}{x}$$

Kryterium najmniejszych kwadratów:

$$S(p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=1}^{n} \left[p_1 + p_2 x_i + p_3 \frac{1}{x_i} - y_i \right]^2 = \min$$

czyli:

$$\frac{\partial S(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[p_1 + p_2 x_i + p_3 \frac{1}{x_i} - y_i\right] = 0$$

$$\frac{\partial S(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_2} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[p_1 + p_2 x_i + p_3 \frac{1}{x_i} - y_i\right] \cdot x_i = 0$$

$$\frac{\partial S(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_3} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[p_1 + p_2 x_i + p_3 \frac{1}{x_i} - y_i\right] \cdot \frac{1}{x_i} = 0$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & n \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} & n & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} y_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$$