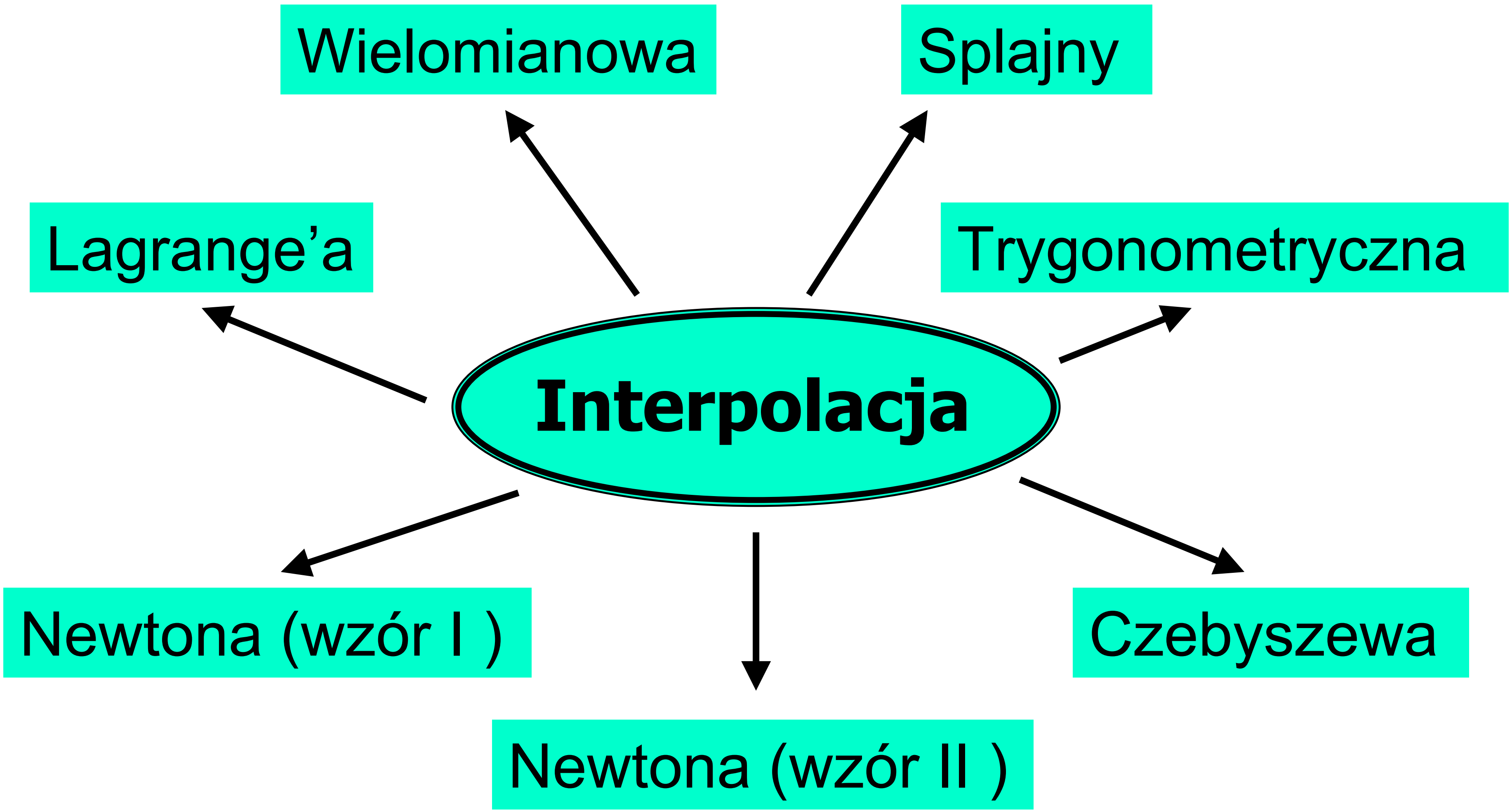
Interpolacja funkcji


Wielomianowa
Splajny
Lagrange'a
Trygonometryczna
Interpolacja
Newtona (wzór I)
Czebyszewa
Newtona (wzór II)

Wzór interpolacyjny Czebyszewa

(Wielomiany Czebyszewa)

Załóżmy, że wartości argumentów funkcji interpolowanej mieszczą się w przedziale [-1, 1].

Postulat ten nie ogranicza możliwości wykorzystania wzoru interpolacyjnego Czebyszewa, ponieważ dowolny przedział argumentów [a, b] poprzez podstawienie

$$x^* = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$$

normalizuje się do przedziału [-1, 1].

Przykład:

Zbiór węzłów: $$x_0^* = 4, \;\; x_1^* = 6, \;\; x_2^* = 7, \;\; x_3^* = 10$$

po podstawieniu:

$$x^* = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x = 7 + 3x$$

sprowadza się do zbioru:

$$x_0 = -1, \;\; x_1 = -\frac{1}{3}, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 1$$

Funkcje bazowe (tzw. bazę Czebyszewa) stanowi zbiór wielomianów określonych wzorem rekurencyjnym:

$$T_0(x) = 1\,,$$

$$T_1(x) = x\,,$$

$$T_{k+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Kilka pierwszych funkcji bazowych określonych wzorem rekurencyjnym wygląda następująco:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Współczynniki wzoru interpolacyjnego Czebyszewa wynikają z układu równań:

$$\begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) & \cdots & T_n(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) & \cdots & T_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_0(x_n) & T_1(x_n) & \cdots & T_n(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Przykład:

Dla zbioru punktów (węzłów) : (-0.5, 0.25), (0, 0), (1, 1) wyznaczyć wielomian interpolacyjny Czebyszewa.

Jest to wielomian stopnia drugiego w postaci:

$$W(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$$

czyli:

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 (2x^2 - 1)$$

Przykład c.d. :

Układ równań sprowadza się do następującego:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymujemy: $a_0 = 0.5, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0.5$

$$W(x) = 0.5 + 0.5 \cdot (2x^2 - 1) = x^2$$

UWAGA !

Przy dowolnym doborze węzłów

$$x_i \ , \ i = 0, 1, \dots , n \ , \ x_i \in [-1, 1]$$

błąd zaokrągleń związanych z procedurą odwracania macierzy X jest istotnie mniejszy niż w przypadku interpolacji wielomianami w postaci naturalnej.

Przyjęcie siatki węzłów wynikającej z zależności

$$x_i = \cos \frac{(2\,i+1)\,\pi}{2\,n\,+2}\,,\; i = 0, 1, \ldots, n$$

oraz nieco zmodyfikowanej bazy

$$\Phi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x, \quad 2x^2 - 1, \quad 4x^3 - 3x, \quad \ldots \right]$$

prowadzi do macierzy X , dla której macierz odwrotną można obliczyć w bardzo prosty sposób

$$X^{-1} = \frac{2}{n+1} X^{\mathrm{T}}$$

Wielomianem interpolacyjnym w tym przypadku będzie więc suma w postaci:

$$W(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + a_3 T_3(x) + \ldots$$

czyli:

$$W(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 x + a_2\left(2x^2 - 1\right) + a_3\left(4x^3 - 3x\right) + \ \ldots$$

zawierająca n+1 nieznanych parametrów.

Przykład:

W przedziale [-1, 1] wybieramy cztery węzły interpolacji:

x_0 , x_1 , x_2 , x_3 (n = 3) w ten sposób, że

$$x_i = \cos \frac{(2\,i+1)\,\pi}{2n+2} = \cos \frac{(2\,i+1)\,\pi}{8}$$

Otrzymujemy:

$$x_0 = 0.924\ ,\ x_1 = 0.383\ ,\ x_2 = -0.383\ ,\ x_3 = -0.924$$

Przykład c.d. :

Załóżmy, że wartości funkcji f(x) w tych węzłach wynoszą:

$$y_0 = 2.224\ ,\ y_1 = 1.701\ ,\ y_2 = 3.885\ ,\ y_3 = 6.19$$

Bazę interpolacji stanowi zbiór wielomianów:

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

$$T_1(x) = x\ ,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1\ ,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Przykład c.d. :

Macierz X:

$$X = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.924 & 0.707 & 0.383 \\ 0.707 & 0.383 & -0.707 & -0.924 \\ 0.707 & -0.383 & -0.707 & 0.924 \\ 0.707 & -0.924 & 0.707 & -0.383 \end{bmatrix}$$

Przykład c.d. :

Macierz odwrotna:

$$X^{-1} = \frac{1}{2} X^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0.345 & 0.354 & 0.354 & 0.354 \\ 0.462 & 0.191 & -0.191 & -0.462 \\ 0.354 & -0.354 & -0.354 & 0.354 \\ 0.191 & -0.462 & 0.462 & -0.191 \end{bmatrix}$$

Przykład c.d. :

skąd po obliczeniu otrzymujemy wartości współczynników:

$$a_0 = 4.95, \quad a_1 = -2.25, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0.25$$

Postać wielomianu jest następująca:

$$W(x) = 4.95\frac{1}{\sqrt{2}} - 2.25x + (2x^2 - 1) + 0.25(4x^3 - 3x)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$W(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2.5$$

Interpolacja trygonometryczna

Rozważać będziemy ciągłą i okresową funkcję f(x) o okresie 2π , dla której znamy zbiór jej wartości w 2n+1 węzłach.

Jako bazę interpolacji przyjmujemy zbiór funkcji trygonometrycznych:

$$\Phi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \sin(\mathrm{n}\,x), \cos(\mathrm{n}\,x) \right]$$

Wielomianem interpolacyjnym w tym przypadku będzie więc suma w postaci:

$$W(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + b_1 \sin(x) + a_1 \cos(x) +$$
$$+ b_2 \sin(2x) + a_2 \cos(2x) + \ldots +$$
$$+ b_n \sin(\mathrm{n}\, x) + a_n \cos(\mathrm{n}\, x)$$

zawierająca 2n+1 nieznanych parametrów.

Najbardziej istotny dla praktyki jest przypadek interpolacji funkcji określonej na zbiorze równoodległych węzłów $x_i \in [0, 2\pi]$

dobranych w następujący sposób:

$$x_i = \frac{2\,i\pi}{2n+1}\,,\ i = 0, 1, \ldots, 2n$$

czyli:

$$x_0 = 0\,,\ x_1 = \frac{2\pi}{2n+1}\,, \ldots\,, x_{2n} = \frac{4n\pi}{2n+1}$$

Warunek interpolacji prowadzi do układu równań

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin(x_1) & \cos(x_1) & \ldots & \sin(nx_1) & \cos(nx_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin(x_{2n}) & \cos(x_{2n}) & \ldots & \sin(nx_{2n}) & \cos(nx_{2n}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Współczynniki pierwszego wiersza macierzy X wynikają z wartości funkcji sin(*kx*) i cos(*kx*) dla x_0=0.

Przedstawiony układ równań dla odpowiednio dobranych węzłów interpolacji rozwiązuje się natychmiastowo, ponieważ macierz odwrotną można obliczyć w bardzo prosty sposób:

$$X^{-1} = \frac{2}{2n+1} X^{\mathrm{T}}$$

Przykład:

Zbiór następujących węzłów przybliżyć wielomianem trygonometrycznym (n=3):

	1	2	3	4	5	6	7
x	**0**	**0,898**	**1,795**	**2,693**	**3,590**	**4,488**	**5,386**
y	**0**	**5,478**	**9,344**	**11,598**	**12,242**	**11,274**	**8,695**

Współrzędne „ x ” dla węzłów obliczono ze wzoru:

$$x_i = \frac{2\, i\, \pi}{2n+1}$$

Przykład c.d. :

Bazę interpolacji stanowi zbiór funkcji:

$$\Phi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x) \right]$$

Przykład c.d. :

Tworzymy macierz X , której postać wynikowa jest następująca :

$$X = \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.707 & 0.782 & 0.623 & 0.975 & -0.223 & 0.434 & -0.901 \\ 0.707 & 0.975 & -0.223 & -0.434 & -0.901 & -0.782 & 0.623 \\ 0.707 & 0.434 & -0.901 & -0.782 & 0.623 & 0.975 & -0.223 \\ 0.707 & -0.434 & -0.901 & 0.782 & 0.623 & -0.975 & -0.223 \\ 0.707 & -0.975 & -0.223 & 0.434 & -0.901 & 0.782 & 0.623 \\ 0.707 & -0.782 & 0.623 & -0.975 & -0.223 & -0.434 & -0.901 \end{bmatrix}$$

Przykład c.d. :

Elementy macierzy X mnożymy przez 2 / 7, otrzymaną macierz transponujemy i obliczamy współczynniki wzoru interpolacyjnego:

$$a_0 = 11.845,$$
$$b_1 = -1.336, \quad a_1 = -4.923,$$
$$b_2 = -0.513, \quad a_2 = -1.961,$$
$$b_3 = -0.147, \quad a_3 = -1.491$$