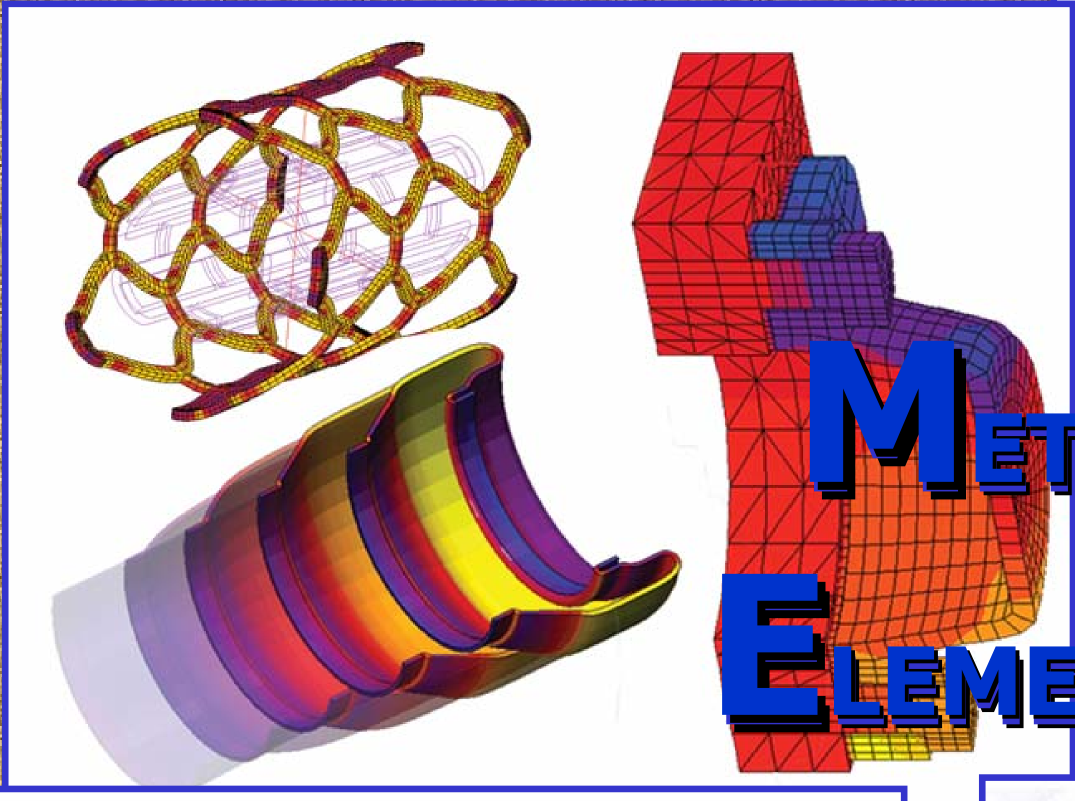
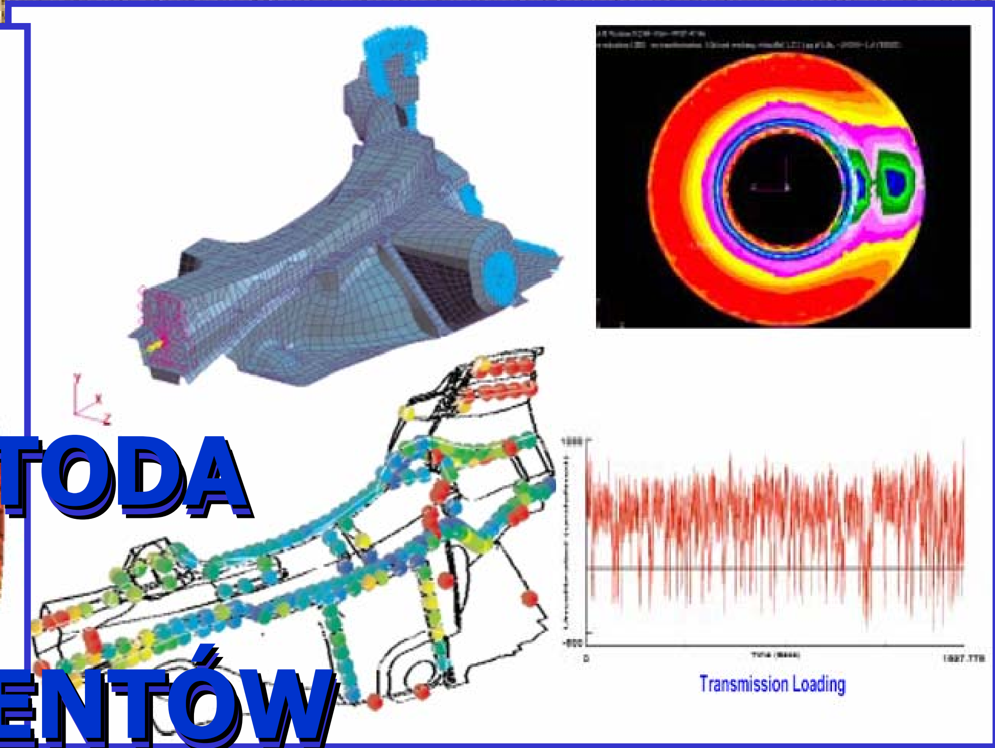





# METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

***Na podstawie:***

**J. Zielnica „Wytrzymałość materiałów”**
**Wyd. Pol. Poznańskiej, 1996**

# Zadanie brzegowe (brzegowo-początkowe):

Problem opisany równaniem lub układem równań różniczkowych, zwykle o pochod-nych cząstkowych z warunkami jednoznaczności:

- warunki geometryczne
- warunki fizyczne
- warunki brzegowe
- warunki początkowe

# MES:

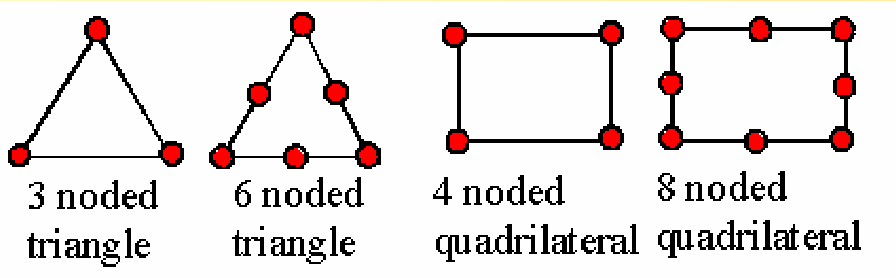
**Numeryczna metoda przybliżonego rozwiązywania zadań brzegowych (brzegowo-początkowych)**

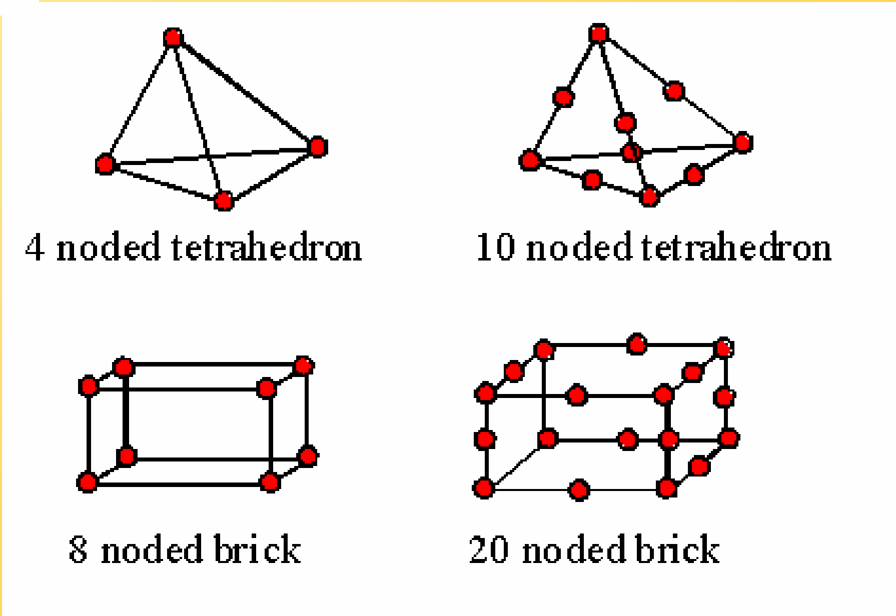
- Podział (dyskretyzacja) układu na pewną ilość elementów skończonych.

- Zastąpienie układu równań różniczkowych układem równań algebraicznych (zmienne ciągłe wyraża się za pomocą wartości węzłowych oraz funkcji kształtu).

# Przykłady elementów skończonych

- **Element skończony** – prosta figura geometryczna (płaska lub przestrzenna), dla której określone zostały wyróżnione punkty zwane węzłami,



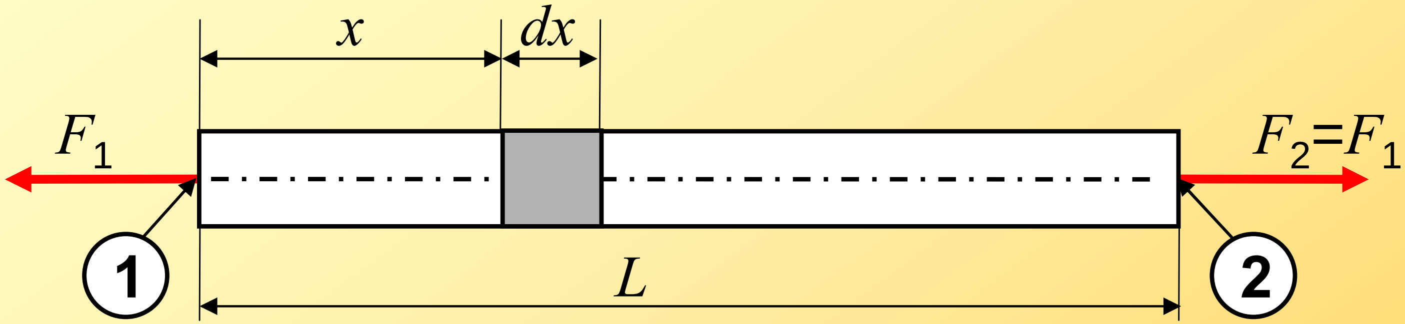
- Węzły - w wierzchołkach elementu skończonego;
  - mogą być również na bokach i we wnętrzu.

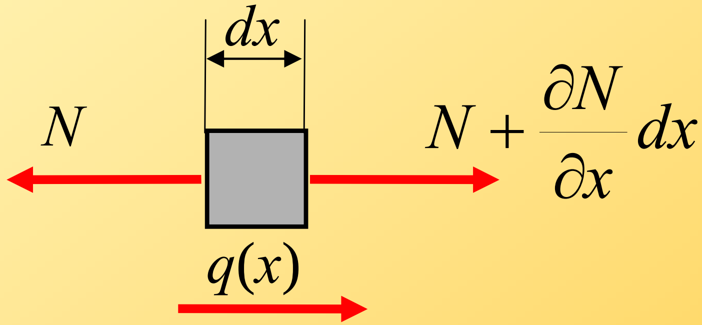
- Węzły tylko w wierzchołkach - element liniowy.
  W innych przypadkach - elementy wyższych rzędów.

- Liczba funkcji kształtu w pojedynczym elemencie skończonym jest równa liczbie jego węzłów.

- Funkcje kształtu są zawsze tak zbudowane, aby w węzłach których dotyczą ich wartości wynosiły „1”, a pozostałych węzłach przyjmowały wartość „0”.

# Element prętowy:




$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial x} + q(x) = 0}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \quad + \quad \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \quad + \quad \sigma = \frac{N}{A} \quad =$$

$$\boxed{N = EA\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} + q(x) = 0 \quad = \quad \boxed{EA\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2} + q(x) = 0}$$

# Funkcje kształtu:

$$\boldsymbol{u} = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

funkcje kształtu dla el. prętowego:

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right), \qquad N_2 = \frac{x}{L}$$

$$EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + q(x) = 0$$

# Metoda Galerkina:

$$N_1=\left(1-\frac{x}{L}\right),\qquad N_2=\frac{x}{L}$$

$$\int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} EA\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} dx+\int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} q(x)\,dx=0$$

**tw. Greena:**

$$\int N_i \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}dx=-\int \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}dx$$

$$EA\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x}\frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - q(x)\int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} dx=0$$

## Po scałkowaniu:

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right), \qquad N_2 = \frac{x}{L}$$

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - q(x) \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## Uwzględniając siły skupione $F_1$ i $F_2$:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K_e u = F}$$

# Dla układów liniowo-sprężystych:

$$\boxed{K_e U = F}$$

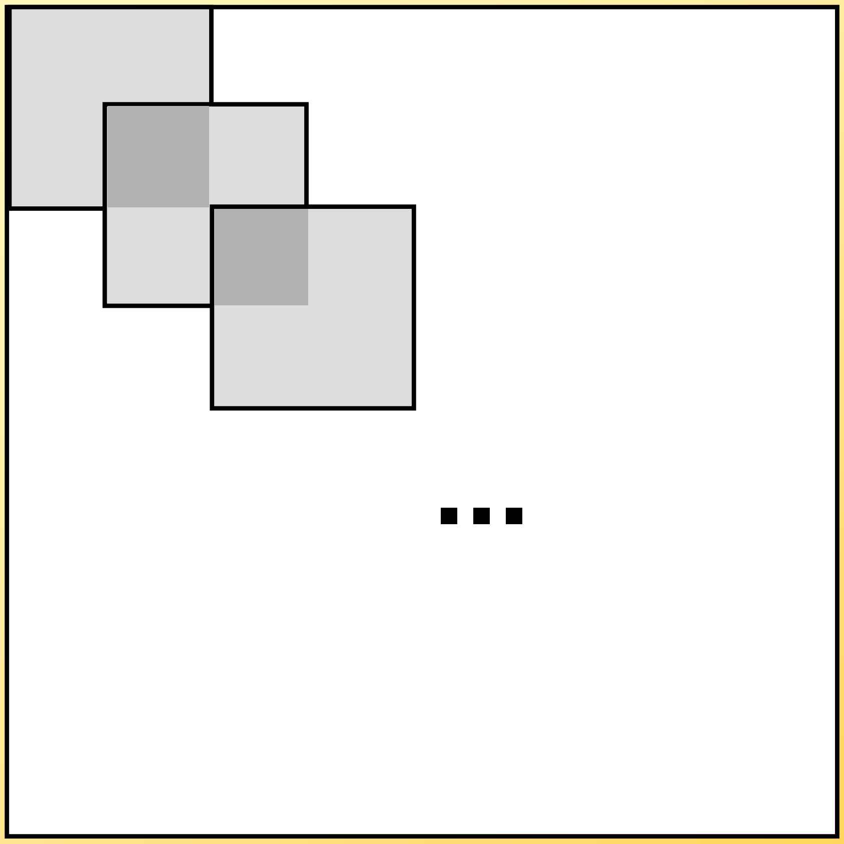
$K_e$ - globalna macierz sztywności układu

$U$ - wektor przemieszczeń węzłowych

$F$ - wektor sił węzłowych

**Globalną macierz sztywności uzyskuje się poprzez „zszywanie" macierzy sztywności dla poszczególnych elementów (agregacja).**

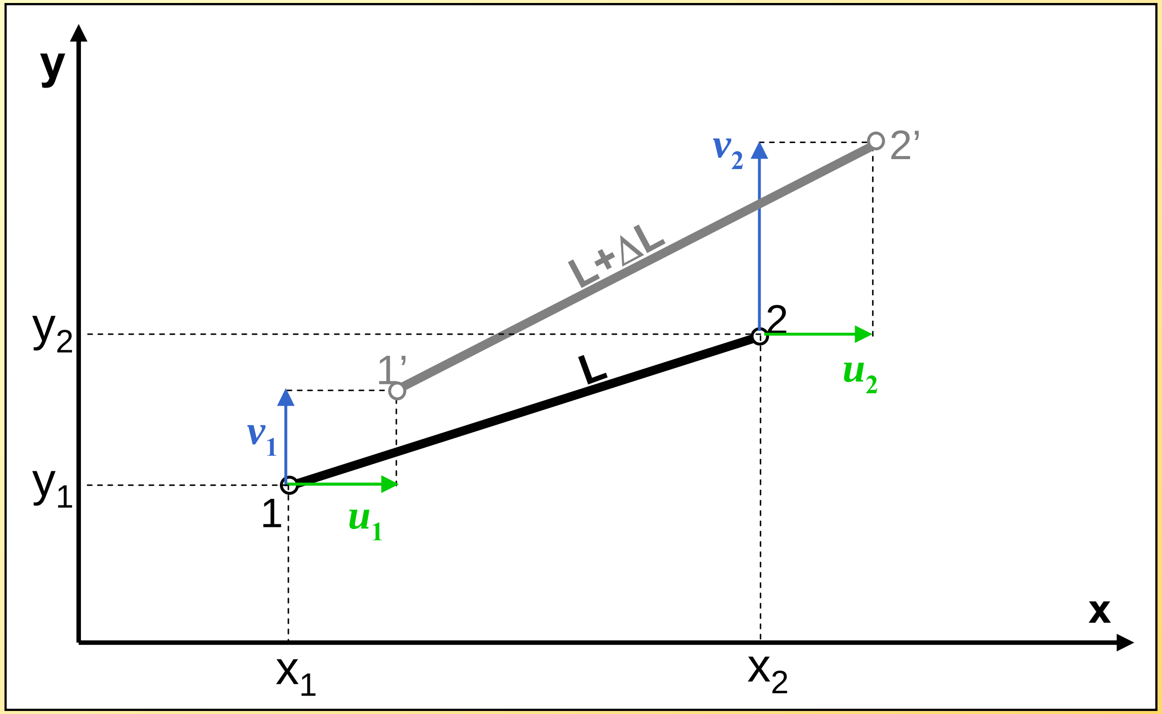
# Agregacja macierzy:



# Tworzenie modelu:

- Elementy mogą się łączyć tylko w węzłach;
- Siły i momenty można zadawać tylko w węzłach;
- Podpory można umieszczać tylko w węzłach;
- Obciążenia ciągłe zastępujemy obc. skupionymi;
- Podparcia ciągłe zastępujemy podparciami w węzłach;
- Odległości między węzłami przyjmujemy w miarę równomierne;
- Różnica między numerami węzłów w elemencie powinna być minimalna;
- Układ nie może tworzyć mechanizmu.

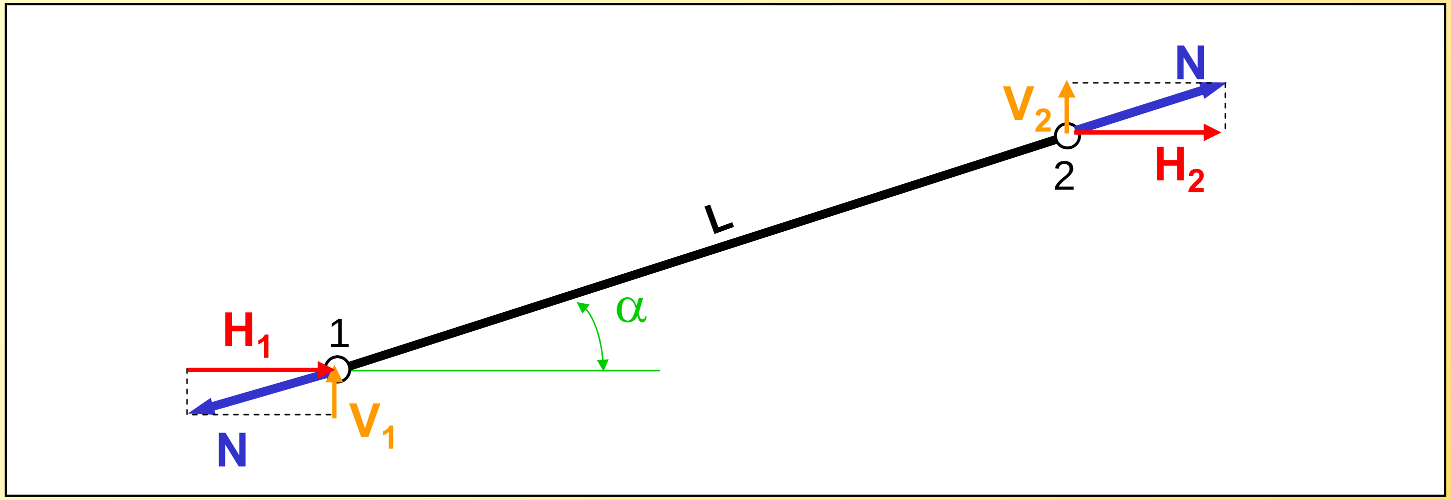
# Macierz sztywności dla el. prętowego:




$$L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$c=\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{L},\qquad s=\sin\alpha=\frac{y_2-y_1}{L}$$

$$\Delta L=(u_2-u_1)c+(v_2-v_1)s$$




$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \Rightarrow N = \frac{EA}{L}\left[(u_2 - u_1)c + (v_2 - v_1)s\right]$$

$$\varepsilon = \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L}\left[-c \;\; \text{-}s \;\; c \;\; s\right]$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

***B - macierz geometryczna***

$$\mathrm{N} = \mathrm{EA}\varepsilon = \mathrm{EA}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{u}$$

*C - macierz sił węzłowych*

***Zależność między siłą wewnętrzną* $\mathrm{N}$ *i siłami węzłowymi* $\mathrm{V}_\mathrm{i}$ *i* $H_\mathrm{i}$*:***

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ H_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = -\mathrm{N}c,\ V_1 = -\mathrm{N}s,\ H_2 = \mathrm{N}c,\ \mathrm{V}_2 = \mathrm{N}s$$

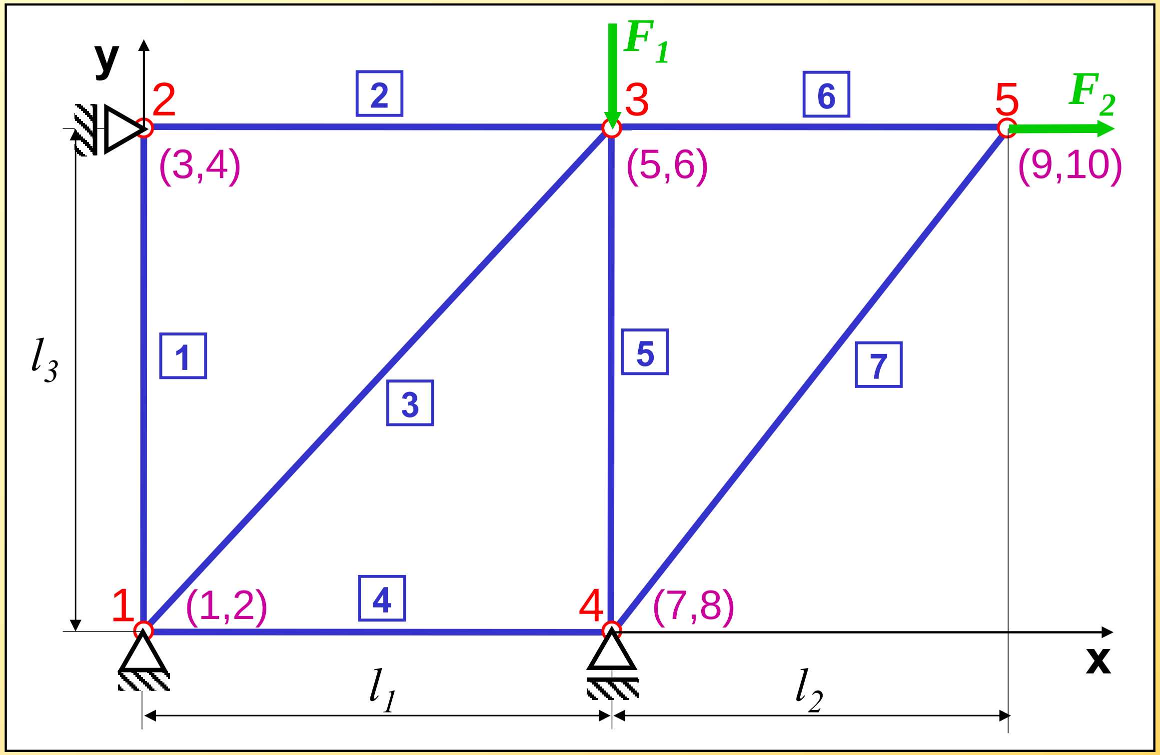
$$\mathbf{B} = \frac{1}{L}[-c\ \ -s\ \ c\ \ s]$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathrm{L}\mathrm{N} = \mathbf{B}^T \mathrm{L}\mathrm{E}\mathrm{A}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ H_2 \\ V_2 \end{bmatrix}=\mathbf{B}^T\mathrm{LN}=\mathbf{B}^T\mathrm{LEA}\mathbf{Bu}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}=\mathbf{K_e u}$$

$$\mathbf{K_e}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}=\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

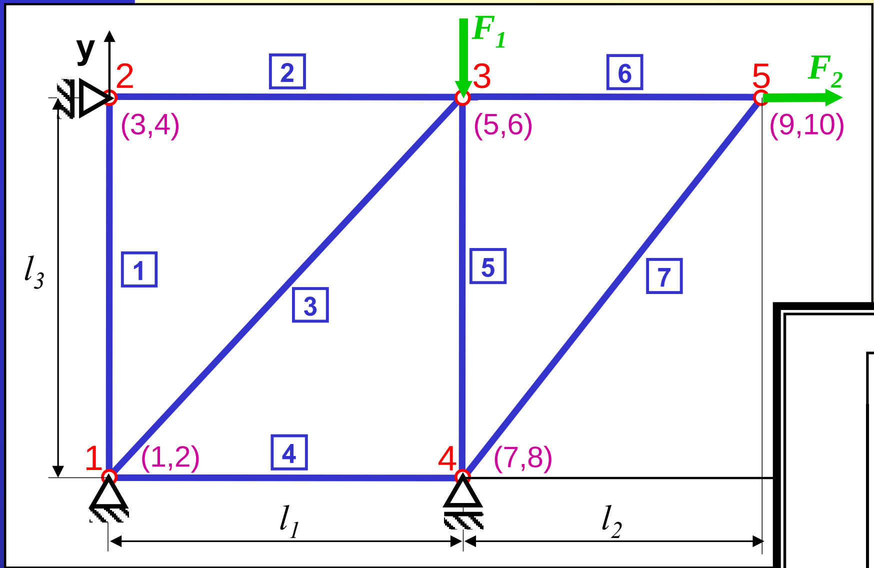
# Globalna macierz sztywności:




$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{15}^{(3)} & a_{16}^{(3)} \\ a_{21}^{(3)} & a_{22}^{(3)} & a_{25}^{(3)} & a_{26}^{(3)} \\ a_{51}^{(3)} & a_{52}^{(3)} & a_{55}^{(3)} & a_{56}^{(3)} \\ a_{61}^{(3)} & a_{62}^{(3)} & a_{65}^{(3)} & a_{66}^{(3)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{(5)} = \begin{bmatrix} a_{55}^{(5)} & a_{56}^{(5)} & a_{57}^{(5)} & a_{58}^{(5)} \\ a_{65}^{(5)} & a_{66}^{(5)} & a_{67}^{(5)} & a_{68}^{(5)} \\ a_{75}^{(5)} & a_{76}^{(5)} & a_{77}^{(5)} & a_{78}^{(5)} \\ a_{85}^{(5)} & a_{86}^{(5)} & a_{87}^{(5)} & a_{88}^{(5)} \end{bmatrix}$$

$$
\mathbf{K}_{(10x10)} = \begin{bmatrix}
a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & \cdot & \cdot & a_{15}^{(3)} & a_{16}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{21}^{(3)} & a_{22}^{(3)} & \cdot & \cdot & a_{25}^{(3)} & a_{26}^{(3)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{51}^{(3)} & a_{52}^{(3)} & \cdot & \cdot & a_{55}^{(3)} + a_{55}^{(5)} & a_{56}^{(3)} + a_{56}^{(5)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{61}^{(3)} & a_{62}^{(3)} & \cdot & \cdot & a_{65}^{(3)} + a_{65}^{(5)} & a_{66}^{(3)} + a_{66}^{(5)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{57}^{(5)} & a_{58}^{(5)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{67}^{(5)} & a_{68}^{(5)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{75}^{(5)} & a_{76}^{(5)} & a_{77}^{(5)} & a_{78}^{(5)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{85}^{(5)} & a_{86}^{(5)} & a_{87}^{(5)} & a_{88}^{(5)}
\end{bmatrix}
$$

# Uwzględniając warunki brzegowe:




$$\boxed{u_1 = u_2 = u_3 = u_8 = 0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_8 \\ . \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ 0 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Wartości niezerowe**

# Wyznacza się kolejno:

- przemieszczenia: $u_4,\ u_5,\ u_6,\ u_7,\ u_9,\ u_{10}$
- odkształcenia: $\varepsilon = \mathbf{Bu}$
- siły wewnętrzne: $\mathrm{N} = \mathrm{EA}\varepsilon = \mathrm{EA}\mathbf{Bu} = \mathbf{Cu}$
- naprężenia: $\sigma = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}}$

**w poszczególnych prętach układu**

# Element płaski trójkątny: