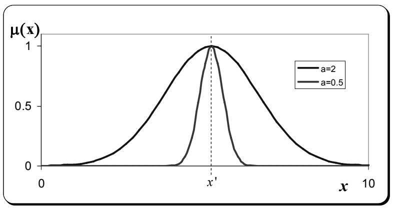
METODY HEURYSTYCZNE

wykład 6

STANDARDOWE FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI

GAUSSOWSKA F. PRZYNALEŻNOŚCI

$$\mu_A(x;x',a)=\exp\left(-\left(\frac{x-x'}{a}\right)^2\right)$$



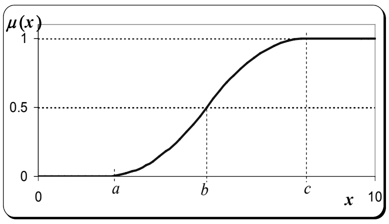
x' – środek;

a – określa szerokość krzywej

F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY s

$$s(x;a,b,c)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\le a\\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{dla } b\le x\le a\\ 1-2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{dla } b\le x\le c\\ 1 & \text{dla } x\ge c\end{cases}$$

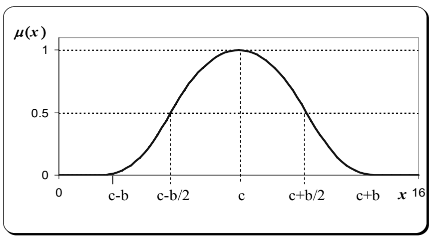
$$b=\frac{a+c}{2}$$



F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY π

(zdef. poprzez klasę s)

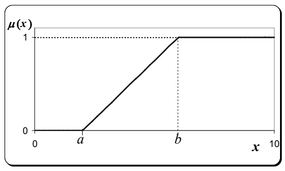
$$\pi(x;b,c)=\begin{cases}s(x;c-b,c-b/2,c) & \text{dla } x\le a\\ 1-s(x;c,c+b/2,c+b) & \text{dla } x\ge c\end{cases}$$



F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY γ

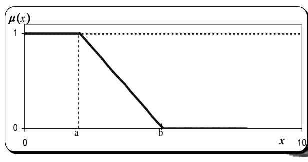
(alternatywa dla s)

$$\gamma(x;a,b)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a\le x\le b\\ 1 & \text{dla } x\ge b\end{cases}$$



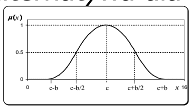
F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY L

$$L(x;a,b)=\begin{cases}1 & \text{dla } x\le a\\ \frac{b-x}{b-a} & \text{dla } a\le x\le b\\ 0 & \text{dla } x\ge b\end{cases}$$

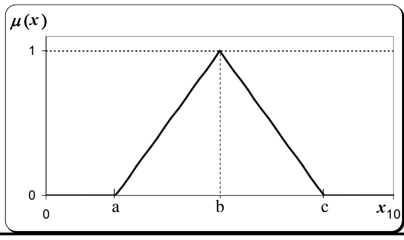


F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY t

(alternatywa dla π)

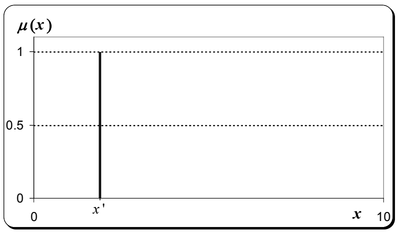


$$t(x;a,b,c)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla } a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{dla } b\le x\le c\\ 1 & \text{dla } x\ge c\end{cases}$$



F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY *singleton*

$$\mu_A(x)=\delta(x-x')=\begin{cases}1 \text{ jeżeli } x=x'\\ 0 \text{ jeżeli } x\neq x'\end{cases}$$

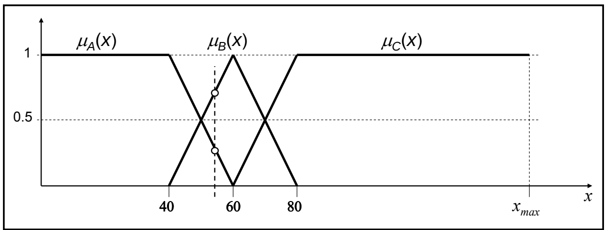


Singleton charakteryzuje jednoelementowy zbiór rozmyty.

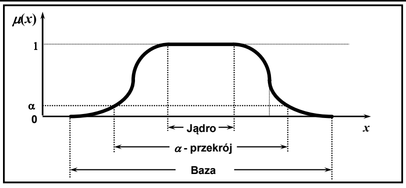
Funkcja ta jest wykorzystywana głównie do operacji rozmywania w systemach wnioskujących.

Np.: prędkość samochodu: $\mathbf{X}$: $[0, x_{max}]$

- Mała prędkość samochodu (A) – typ L
- Średnia prędkość samochodu (B) – typ t
- Duża prędkość samochodu (C) – typ γ



x**=55** $\Rightarrow \mu_A(x)=0.25,\ \mu_B(x)=0.75,\ \mu_C(x)=0$



Nośnik (baza) zbioru rozmytego A:

zbiór elementów ZR, dla których $\mu(x)>0$

$$\operatorname{supp} A=\{x\in\mathbf{X};\mu_A(x)>0\}$$

Jądro zbioru rozmytego A: zb. elementów ZR, dla których $\mu(x)=1$

$$core(A)=\{x\in X:\mu_A(x)=1\}$$

α **-przekrój** zbioru rozmytego A: zbiór nierozmyty taki, że:

$$A_\alpha=\{x\in\mathbf{X}:\mu_A(x)\ge\alpha\}\quad\forall(\alpha\in[0,1])$$

Np.:

$$A=\frac{0.1}{2}+\frac{0.3}{4}+\frac{0.7}{5}+\frac{0.6}{8}+\frac{0.3}{10}$$

$$\mathbf{X}=\{1,...,10\}$$

α **-**przekroje:

$\mathbf{A_0 = X = \{1, ..., 10\}}$,

$\mathbf{A_{0.1} = \{2, 4, 5, 8, 10\}}$,

$\mathbf{A_{0.3} = \{4, 5, 8, 10\}}$,

$\mathbf{A_{0.6} = \{5, 8\}}$,

$\mathbf{A_{0.7} = \{5\}}$.

Wysokość zbioru rozmytego A**:**

$$h(A)=\sup_{x\in A}\mu_A(x)$$

Zbiór normalny: $h(A)=1$

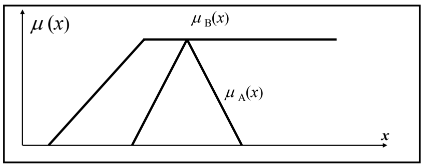
Normalizacja zbioru: $\mu_{A_N}(x)=\dfrac{\mu_A(x)}{h(A)}\quad\bigwedge_{x\in X}$

Np.:

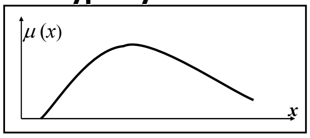
- przed normalizacją: $A=\dfrac{0.2}{3}+\dfrac{0.5}{5}+\dfrac{0.4}{7}$

- po normalizacji: $A_N=\dfrac{0.4}{3}+\dfrac{1.0}{5}+\dfrac{0.8}{7}$

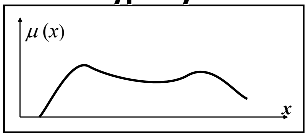
Inkluzja (zawieranie sie ZR $\boldsymbol{A}$ w ZR $\boldsymbol{B}$):



ZR wypukły:



ZR niewypukły:



Równość dwu ZR A i B:

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \mu_{\mathrm{B}}(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

OPERACJE NA ZBIORACH ROZMYTYCH

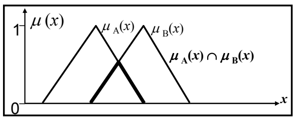
PRZECIĘCIE

W literaturze istnieje wiele definicji przecięcia (iloczynu) zbiorów rozmytych pod wspólną nazwą *T-norm*.

$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

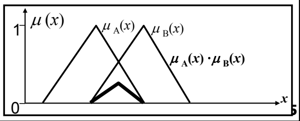
Najczęściej stosowana definicja przecięcia zbiorów A i B:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



lub (iloczyn algebraiczny):

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

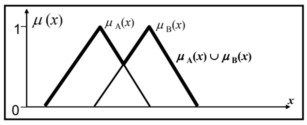


SUMA

Definicje sumy zbiorów rozmytych mają nazwę *S-norm*.

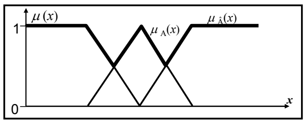
Np.:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



DOPEŁNIENIE zbioru rozmytego:

$$\mu_{\hat{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Dla ZR **nie są** spełnione prawa dopełnienia:

$$A \cup \hat{A} \neq \mathbf{X} \qquad A \cap \hat{A} \neq \varnothing$$

Przykład:

$$\mathbf{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.7}{7} \qquad B = \frac{0.5}{3} + \frac{0.8}{5} + \frac{1}{6}$$

Przecięcie:

$$A \cap B = \frac{0.5}{3} + \frac{0.8}{5}$$

Suma:

$$A \cup B = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.7}{7}$$

Przykład: $\mathbf{X} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$A = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.9}{6} + \frac{0.7}{7}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.1}{6} + \frac{0.3}{7}$$

Przecięcie: $A \cap \hat{A} = \frac{0.2}{3} + \frac{0.1}{6} + \frac{0.3}{7} \neq \varnothing$

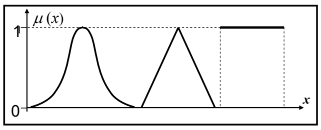
Suma: $A \cup \hat{A} = \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.9}{6} + \frac{0.7}{7} \neq \mathbf{X}$

LICZBY ROZMYTE

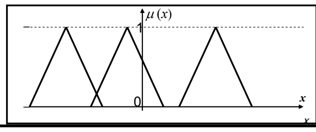
Liczby rozmyte to ZR zdefiniowane na osi liczb rzeczywistych.

Wymagania:
- zbiór normalny: $h(A)=1$;
- zbiór wypukły;
- funkcja przynależności przedziałami ciągła.

np.:



- dodatnie
- ujemne;
- ani dodatnie ani ujemne.



ZASADA ROZSZERZANIA:

Zasada rozszerzania pozwala przenieść (rozszerzyć) różne operacje matematyczne ze zbiorów nierozmytych na zbiory rozmyte (w tym również na liczby rozmyte).

dodawanie	$A_1 \oplus A_2 = B$	$\mu_B(y) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 + x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
odejmowanie	$A_1 \ominus A_2 = B$	$\mu_B(y) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 - x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
mnożenie	$A_1 \odot A_2 = B$	$\mu_B(y) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 \cdot x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
dzielenie	$A_1 \oslash A_2 = B$	$\mu_B(y) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 : x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$

ZASADA ROZSZERZANIA:

Zasada rozszerzania pozwala przenieść (rozszerzyć) różne operacje matematyczne ze zbiorów nierozmytych na zbiory rozmyte (w tym również na liczby rozmyte).

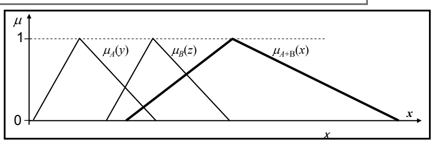
Nie zawsze wynikiem operacji arytmetycznych na liczbach rozmytych jest liczba rozmyta...

Twierdzenie (Dubois, Prade):

Jeżeli liczby rozmyte A_1 i A_2 mają ciągłe funkcje przynależności, to wynikiem operacji arytmetycznych dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia są liczby rozmyte.

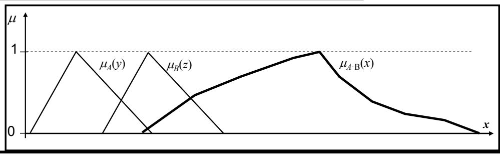
Dodawanie liczb rozmytych:

$$\boxed{\mu_{A+B}(x) = \max\left\{\mu_A(y), \mu_B(z) \;\middle|\; x = y + z\right\}}$$



Mnożenie liczb rozmytych:

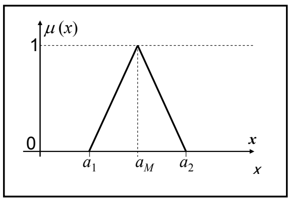
$$\boxed{\mu_{A \cdot B}(x) = \min\left\{\mu_A(y), \mu_B(z) \;\middle|\; x = y \cdot z\right\}}$$



Trójkątne liczby rozmyte:

Opis:

- f. przynależności klasy t;
- jako: $\boxed{A = (a_1, a_M, a_2)}$



Wyostrzanie trójkątnej liczby rozmytej:

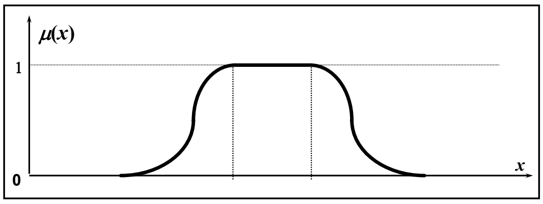
$$\boxed{y^{(1)} = a_M}$$

$$\boxed{y^{(2)} = \frac{a_1 + a_M + a_2}{3}}$$

$$\boxed{y^{(3)} = \frac{a_1 + 2a_M + a_2}{4}}$$

$$\boxed{y^{(4)} = \frac{a_1 + 4a_M + a_2}{6}}$$

Płaskie liczby rozmyte:



PRZYBLIŻONE WNIOSKOWANIE

Logika tradycyjna (dwuwartościowa):

O prawdziwości zdań wnioskuje się na podstawie prawdziwości innych zdań.

Schemat notowania:

- Nad kreską zdania, na podstawie których się wnioskuje;
- Pod kreską otrzymany wniosek.

Jeśli prawdziwe są wszystkie zdania powyżej kreski to prawdziwy jest też wniosek.

Teraz: A, B – zdania.

- $A=1$: logiczną wartością zdania A jest prawda;
- $A=0$: logiczną wartością zdania A jest fałsz.

Funktory logiczne:

Operacja logiczna	Funktor	Czyta się:
negacja	~ lub ¬	nie jest prawdą, że...
koniunkcja	$\wedge$	i, oraz
alternatywa	$\vee$	lub
implikacja	$\Rightarrow$	jeżeli... to ...
równoważność	$\Leftrightarrow$	wtedy i tylko wtedy, gdy...
tożsamość	$\equiv$	jest tożsame...
kwantyfikator ogólny	$\forall$	dla każdego...
kwantyfikator szczególny	$\exists$	istnieje takie...

Implikacja (wynikanie):

Zdanie logiczne o strukturze „jeśli p to q" ($p \Rightarrow q$)

- p – poprzednik implikacji;
- q – następnik implikacji.

Implikacja jest prawdziwa:

- gdy q jest prawdziwe;
- gdy p i q są fałszywe.

REGUŁY WNIOSKOWANIA

MODUS PONENS

Modus ponendo ponens – sposób wnioskowania przez twierdzenie p do twierdzenia q.

Przesłanka:	A
Implikacja:	$A \to B$
Wniosek:	B

Z prawdziwości przesłanki i implikacji wynika prawdziwość wniosku.

Np.:

- $A=1$ „Jacek jest kierowcą"
- $B=1$ „Jacek ma prawo jazdy"
- Jeśli $A=1$ to $B=1$

MODUS TOLLENS

Modus tollendo tollens– sposób wnioskowania prowadzący przez przeczenie do przeczenia.

Przesłanka:	$\sim B$
Implikacja:	$A \rightarrow B$
Wniosek:	$\sim A$

Z prawdziwości przesłanki i implikacji również wynika prawdziwość wniosku.

Np.:
- B=0 ($\sim B$=1) „Jacek nie ma prawa jazdy"
- A=0 ($\sim A$=1) „Jacek nie jest kierowcą"
- Jeśli B=0 to A=0

REGUŁY WNIOSKOWANIA W LOGICE ROZMYTEJ

Reguły, których przesłanki lub wnioski wyrażone są w języku zbiorów rozmytych.

- Reguły pochodzące od ekspertów zwykle wyrażone są w języku nieprecyzyjnym.
- Zbiory rozmyte pozwalają przełożyć ten język na konkretne wartości liczbowe.

Praca systemu decyzyjnego opartego na logice rozmytej zależy od definicji reguł rozmytych w bazie reguł.

Reguły mają postać **IF...AND...THEN**. np.:

IF ***a*** is $A1$ **AND** ***b*** is $B1$ **THEN** ***c*** is $C1$

IF ***a*** is $A2$ **AND** ***b*** is **NOT** $B2$ **THEN** ***c*** is $C2$

gdzie:
a, ***b***, ***c*** – zmienne lingwistyczne,
A1, ..., ***C***2 – zbiory rozmyte.

Zmienne lingwistyczne:

zmienne, które przyjmują jako wartości słowa lub zdania wypowiedziane w języku naturalnym.
(*również wartości liczbowe*).

Różnice w porównaniu z klasycznymi regułami **IF-THEN**:
- Wykorzystanie zmiennych opisujących zbiory rozmyte;
- Występowanie mechanizmu określającego stopień przynależności elementu do zbioru;
- Wykorzystanie operacji na zbiorach rozmytych.

Np.:
Schemat wnioskowania, w którym przesłanka, implikacja i wniosek są nieprecyzyjne:

Przesłanka:	***Prędkość samochodu*** *jest* ***duża***
Implikacja:	*Jeśli* ***prędkość samochodu*** *jest* ***bardzo duża*** → ***poziom hałasu*** *jest* ***wysoki***
Wniosek:	***Poziom hałasu*** *jest* ***średniowysoki***

Przesłanka:	***Prędkość samochodu*** *jest* ***duża***
Implikacja:	*Jeśli* ***prędkość samochodu*** *jest* ***bardzo duża*** → ***poziom hałasu*** *jest* ***wysoki***
Wniosek:	***Poziom hałasu*** *jest* ***średniowysoki***

Rozmyta reguła wnioskowania *modus ponens :*

Przesłanka:	***x*** *jest* ***A'***
Implikacja:	*Jeśli* ***x*** *jest* ***A*** → ***y*** *jest* ***B***
Wniosek:	***y*** *jest* ***B'***

Przesłanka:	***Prędkość samochodu*** *jest* ***duża***
Implikacja:	*Jeśli* ***prędkość samochodu*** *jest* ***bardzo duża*** → ***poziom hałasu*** *jest* ***wysoki***
Wniosek:	***Poziom hałasu*** *jest* ***średniowysoki***

Zmienne lingwistyczne:
- *x* – ***prędkość samochodu***
- ***y*** – ***poziom hałasu***

Zbiór wartości zmiennych lingwistycznych:
- *x: T1={„****mała****", „****średnia****", „****duża****", „****bardzo duża****"}*
- *y: T2={„****mały****", „****średni****", „****średniowysoki****", „****wysoki****"}*

Do każdego elementu zbiorów T1 i T2 można przyporządkować zbiór rozmyty o założonej przez nas funkcji przynależności.

Tu:

A *– „prędkość samochodu jest bardzo duża";*

A' *– „prędkość samochodu jest duża";*

B *– „poziom hałasu jest wysoki";*

B' *– „poziom hałasu jest średniowysoki".*

- Implikacja ma tą samą postać ($A \to B$) w regule rozmytej jak i w nierozmytej.
- W regule rozmytej jej przesłanka nie dotyczy zb. rozmytego A lecz A', który może być zbliżony do A, ale niekoniecznie $A=A'$.

- Ponieważ $A \neq A'$ - wniosek jest inny niż byłby w przypadku reguły nierozmytej.
- Zbiór rozmyty B' jest określony przez złożenie zbioru rozmytego A' oraz implikacji $A \Rightarrow B$:

$$\boxed{B' = A' \circ (A \to B)}$$

***Rozmyta reguła wnioskowania** modus tollens :*

Przesłanka:	*y jest* **B'**
Implikacja:	*Jeśli* **x** *jest* **A** $\to$ **y** *jest* **B**
Wniosek:	**x** *jest* **A'**

Wyznaczanie funkcji $\mu_{A\to B}(x,y)$ gdy $\mu_A(x)$ oraz $\mu_B(y)$ są znane:

1. Reguła Mamdaniego:

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

2. Reguła Larsena:

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

3. Reguła Łukasiewicza:

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \min\left[1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\right]$$

4. Reguła Zadeha:

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \max\left\{\min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right], 1 - \mu_A(x)\right\}$$

...

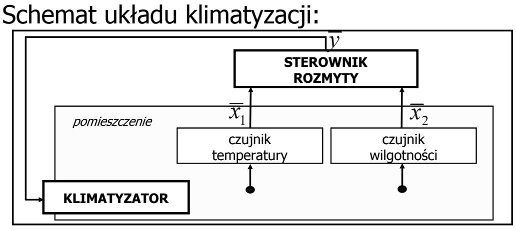
STEROWNIKI ROZMYTE

Zastosowania praktyczne:

- sprzęt AGD (pralki, lodówki, odkurzacze);
- kamery (autofokus);
- nadzór wentylacji w tunelach;
- sterowanie światłami na wjeździe na autostradę;
- klimatyzacja;
- automatyka przemysłowa;
- sterowanie robotów;
- ...

- Nie wymagają tworzenia modelu rozważanego procesu (co często jest trudne);
- Należy jedynie sformułować zasady postępowania w postaci rozmytych reguł (**IF**..**THEN**).

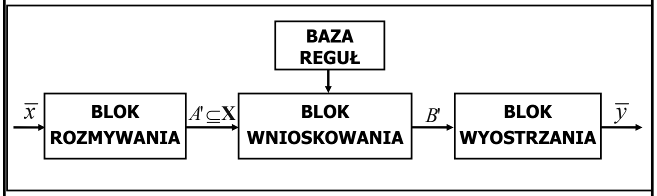
Np.: Schemat układu klimatyzacji:



$\overline{x}_1, \overline{x}_2$ – zmierzone wartości wejściowe;

$\overline{y}$ – sygnał sterujący (intensywność chłodzenia).

STEROWNIK ROZMYTY:



Baza reguł (model lingwistyczny):
zbiór rozmytych reguł w postaci:

$$R^{(k)}: \textbf{IF } (x_1 \textbf{ is } A_1^k \textbf{ AND } x_2 \textbf{ is } A_2^k \ \dots \ \textbf{AND } x_n \textbf{ is } A_n^k)$$
$$\textbf{THEN } (y_1 \textbf{ is } B_1^k \textbf{ AND } y_2 \textbf{ is } B_2^k \ \dots \ \textbf{AND } y_m \textbf{ is } B_m^k)$$

Np. Sterowanie ogrzewaniem:

Cena ogrzewania	Temperatura		
	mróz	zimno	chłodno
tanio	mocno	mocno	średnio
średnio	mocno	średnio	słabo
drogo	średnio	słabo	wcale

$$R^{(1)}: \textbf{IF } (Temperatura \textbf{ is } mróz \textbf{ AND } Cena\_ogrz \textbf{ is } tanio)$$
$$\textbf{THEN } (Grzać \textbf{ is } mocno)$$

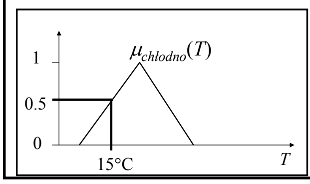
$$R^{(2)}: \textbf{IF } (Temperatura \textbf{ is } chłodno \textbf{ AND } Cena\_ogrz \textbf{ is } drogo)$$
$$\textbf{THEN } (Grzać \textbf{ is } wcale)$$

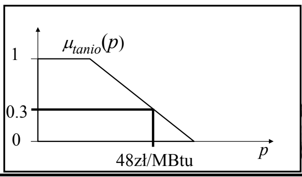
ROZMYWANIE (fuzzyfikacja)

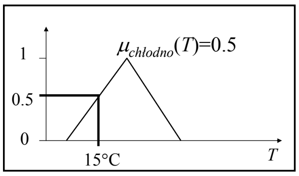
- Przejście od pomiarów (konkretna wartość) do funkcji przynależności przez określenie stopni przynależności zmiennych lingwistycznych do każdego ze zbiorów rozmytych.

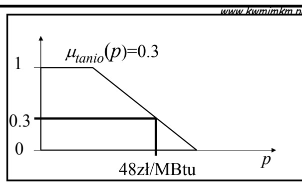
Np.:
- *Temperatura*: T =15°C
- *Cena_ogrz*: p =48zł/MBTU

$$R^{(3)}: \textbf{IF } (Temperatura \textbf{ is } chłodno \textbf{ AND } Cena\_ogrz \textbf{ is } tanio)$$
$$\textbf{THEN } (Grzać \textbf{ is } średnio)$$









Stopień spełnienia reguły dla wszystkich przesłanek:

$$\mu_{całe}(x) = \min\{\mu_{chłodno}(T), \mu_{tanio}(p)\}$$

$$= \min\{0.5, 0.3\} = 0.3$$

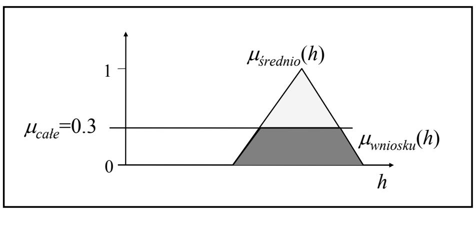
„poziom zapłonu reguły"

WNIOSKOWANIE

Obliczanie stopnia prawdziwości wniosku:

- Wnioskowanie MIN:

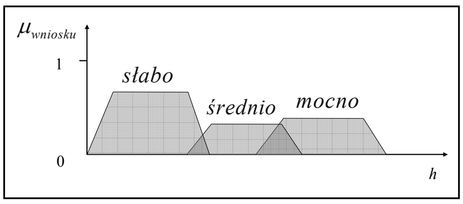
$$\mu_{wniosku} = \min\{\mu_{całe}, \mu_{średnio}\}$$



AGREGACJA

Jeżeli więcej niż jedna reguła ma niezerowy poziom zapłonu, wyniki (zbiory rozmyte) sumuje się.

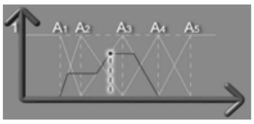
THEN *Grzać* is *słabo*
THEN *Grzać* is *średnio*
THEN *Grzać* is *mocno*



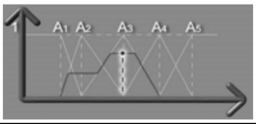
WYOSTRZANIE (defuzzyfikacja)

Jeżeli na wyjściu wymagana jest wartość liczbowa, stosuje się jedną z metod wyostrzania:

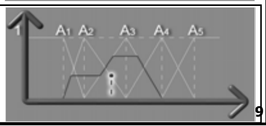
Metoda pierwszego maksimum:



Metoda środka maksimum:

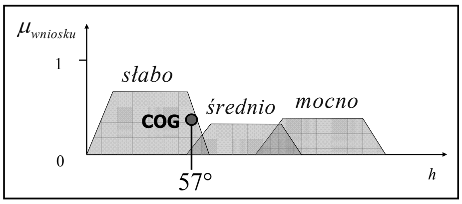


Metoda środka ciężkości (COG):



www.kwmimkm.polsl.pl

Tu:



$$h = \frac{\sum_i \mu_i A_i c_i}{\sum_i \mu_i A_i}$$

A_i – powierzchnia zbioru i

μ_i – stopień przynależności do zbioru i

c_i – środek ciężkości zbioru i.

www.kwmimkm.polsl.pl

STEROWNIKI ROZMYTE TAKAGI-SUGENO

www.kwmimkm.polsl.pl

- Baza reguł sterownika ma charakter rozmyty tylko w części **IF**.
- W części **THEN** występują zależności funkcyjne.

Reguły Mamdaniego: wynikiem jest zbiór rozmyty B:

IF $x_1=A_1$ **AND** $x_2=A_2$ ... $x_n=A_n$ **THEN** $y = B$

Reguły Takagi-Sugeno: wynikiem jest funkcja $f(x_i)$:

IF $x_1=A_1$ **AND** $x_2=A_2$ ... $x_n=A_n$ **THEN** $y = f(x_1, x_2, ..x_n)$

Zwykle są to funkcje liniowe :

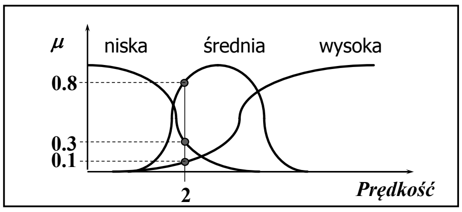
$$f(x_i) = y = a_0 + a_1 x_1 + a_n x_n$$

Np.:

$R^{(1)}$: **IF** *prędkość* is *niska* **THEN** *hamowanie* = *prędkość*

$R^{(2)}$: **IF** *prędkość* is *średnia* **THEN** *hamowanie* = 4·*prędkość*

$R^{(3)}$: **IF** *prędkość* is *wysoka* **THEN** *hamowanie* = 8·*prędkość*



$R^{(1)}$: $w_1 = 0.3$; $r_1 = 2$

$R^{(2)}$: $w_2 = 0.8$; $r_2 = 4 \cdot 2$

$R^{(3)}$: $w_3 = 0.1$; $r_3 = 8 \cdot 2$

$$\text{Hamowanie} = \frac{\sum w_i \cdot r_i}{\sum w_i} = 7.12$$

www.kwmimkm.polsl.pl