Wykład 1

Operacje macierzowe
oraz
metody rozwiązywania układów równań

dr inż. Mirosław Dziewoński
e-mail: miroslaw.dziewonski@polsl.pl
Pok. 151

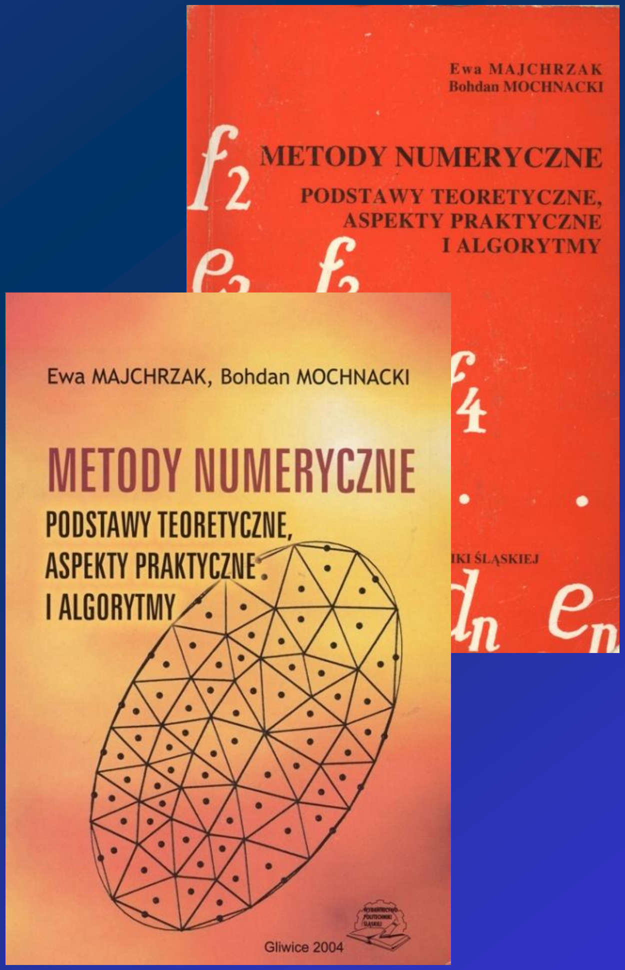
Podręcznik:

Ewa Majchrzak, Bohdan Mochnacki

„Metody numeryczne.
Podstawy teoretyczne,
aspekty praktyczne i algorytmy”

Treść wykładów oraz dodatkowe informacje:

www.kwmimkm.polsl.pl



Warunki zaliczenia

Zaliczenie z przedmiotu:

Ocena końcowa z przedmiotu metody numeryczne jest *średnią* ważoną *oceny z kartkówek* i *oceny z laboratorium* (50% kartkówki, 50% laboratorium).

Wszystkie oceny (z laboratorium i z kartkówek) muszą być *pozytywne* (min. 2,86)

Obecność na zajęciach laboratoryjnych *jest obowiązkowa*.

Czym są metody numeryczne?

Metody numeryczne są jedną z dziedzin *matematyki stosowanej*.

Metody numeryczne mają ogromne zastosowanie w praktyce inżynierskiej, w szczególności w czasie tworzenia programów komputerowych mających na celu przeprowadzanie *obliczeń matematycznych.*

Znajomość metod numerycznych umożliwia nam nie tylko odpowiedzieć na pytanie*: „Jaki jest wynik?”,* ale również pozwala na udzielenie odpowiedzi: *„W jaki sposób wynik został osiągnięty oraz czy uzyskany wynik jest wiarygodny?”*

Tematyka wykładów

Tematami kolejnych wykładów w ramach przedmiotu „Metody numeryczne” będą:

- ☑ Operacje macierzowe
- ☑ Metody rozwiązywania układów równań liniowych
- ☑ Aproksymacja funkcji jednej zmiennej
- ☑ Interpolacja funkcji
- ☑ Całkowanie numeryczne
- ☑ Metody rozwiązywania równań liniowych

Operacje macierzowe

Podstawowe operacje macierzowe:

- ☑ Dodawanie i odejmowanie macierzy
- ☑ Mnożenie macierzy
- ☑ Obliczanie wyznacznika macierzy
- ☑ Odwracanie macierzy

Rozważamy dwie macierze A[m, n] i B[n, k]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,k} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ obliczymy następująco:

$$c_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s} b_{s,j} \qquad i = 1, 2, \dots m, \qquad j = 1, 2, \dots k$$

Bierzemy po uwagę macierz kwadratową $\mathbf{A}$ o wymiarach $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz **B** rozbudowując macierz **A** o macierz jednostkową **E**

$$\mathbf{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}}$$

Aby uzyskać macierz odwrotną musimy tak przekształcać macierz $\mathbf{B}$ by w miejsce podmacierzy $\mathbf{A}$ otrzymać macierz jednostkową. Po takich przekształceniach w miejscu macierzy $\mathbf{E}$ otrzymamy macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{B} = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \; \underbrace{\begin{matrix} \hat{a}_{1,1} & \hat{a}_{1,2} & \dots & \hat{a}_{1,n} \\ \hat{a}_{2,1} & \hat{a}_{2,2} & \dots & \hat{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{n,1} & \hat{a}_{n,2} & \dots & \hat{a}_{n,n} \end{matrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \right]$$

Znaleźć macierz odwrotną do macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz B:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementy pierwszego wiersza dzielimy przez 7, a następnie mnożymy razy 3 i odejmujemy od wiersza drugiego:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2/7 & 1/7 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & -6/7 & -3/7 & 1 \end{bmatrix}$$

W drugim kroku elementy wiersza drugiego dzielimy przez –6/7, a następnie mnożymy razy 2/7 i odejmujemy od wiersza pierwszego:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{7} & \frac{-3}{7} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-7}{6} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna do A jest następująca

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

Szczegółowy algorytm znajdziemy w literaturze!

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Metody rozwiązywania układów równań

Metody rozwiązywania układów równań liniowych można podzielić na dwie grupy:

- Metody dokładne
  - metoda dla macierzy jednoprzekątniowej
  - metoda dla macierzy trójkątnej
  - metoda Thomasa
  - metoda eliminacji Gaussa
- Metody iteracyjne
  - metoda iteracji prostej
  - metoda Gaussa – Seidla
  - metoda nadrelaksacji

Metody rozwiązywania układów równań

Rozpatruje się układ n - równań liniowych zawierających n – niewiadomych

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

który można zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Metody rozwiązywania układów równań

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Układ równań posiada jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy jest oznaczony, tzn. że macierz główna układu równań **A** nie jest osobliwa (wyznacznik z tej macierzy jest różny od zera).

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Układ równań z elementami na głównej przekątnej macierzy **A**

Układ równań, w którym tylko główna przekątna macierzy **A** posiada elementy niezerowe:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & = b_1 \\ & a_{22}x_2 & & = b_2 \\ & & \dots & \dots \\ & & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

rozwiązuje się „natychmiastowo”:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Trójkątny układ równań

Jeżeli układ równań ma następującą postać:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

nazywamy go układem trójkątnym.

Trójkątny układ równań

Rozwiązanie takiego układu jest stosunkowo proste. Z ostatniego równania wyznaczamy x_i, z przedostatniego $x_{i\text{-}1}$ itd.:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{s=i+1}^{n} \left(a_{is} \cdot x_s \right)}{a_{ii}} \ , \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

przy założeniu, że

$$a_{ii} \neq 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Trójkątny układ równań

Przykład 1:

Rozwiązać następujący układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ \qquad\quad 2x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Trójkątny układ równań

Macierz główna układu i wektor wyrazów wolnych mają postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Z ostatniego równania wyznaczamy

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{6}{2} = 3$$

a następnie

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23} \cdot x_3}{a_{22}} = \frac{1-(-1)\cdot 3}{2} = 2$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3}{a_{11}} = \frac{8-2\cdot 2-1\cdot 3}{1} = 1$$

Układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

zapisuje się w postaci macierzy $\mathbf{C}$, w której macierz główną $\mathbf{A}$ uzupełnia się dodatkową kolumną zawierającą wektor wyrazów wolnych $\mathbf{B}$.

czyli:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2,n+1} \\ . & . & \cdots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_{n,n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & c_{2,n+1} \\ . & . & \cdots & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & c_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

n pierwszych kolumn stanowią elementy macierzy $\mathbf{A}$

$n+1$ kolumnę stanowią elementy wektora $\mathbf{B}$

Wariant podstawowy metody eliminacji Gaussa polega na przekształceniu macierzy $\mathbf{C}$, tak aby otrzymać równoważny układ równań, w którym n pierwszych kolumn macierzy $\mathbf{C}$ tworzyło macierz trójkątną, a następnie rozwiązać ten układ równań odpowiednią metodą (przedstawioną wcześniej).

Metoda eliminacji Gaussa

W pierwszym kroku algorytmu odejmujemy pierwsze równanie pomnożone przez c_{i1}/c_{11} od i – tego równania ($i = 2, 3, \ldots, n$) i po wykonaniu obliczeń otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = c_{1,n+1} \\ \qquad c_{22}^{(1)}x_2 + c_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{2n}^{(1)}x_n = c_{2,n+1}^{(1)} \\ \qquad c_{32}^{(1)}x_2 + c_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{3n}^{(1)}x_n = c_{3,n+1}^{(1)} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad c_{n2}^{(1)}x_2 + c_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{nn}^{(1)}x_n = c_{n,n+1}^{(1)} \end{cases}$$

który odpowiada sprowadzeniu macierzy $\mathbf{C}$ do $\mathbf{C}_1$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ 0 & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)} & \cdots & c_{2n}^{(1)} & c_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & c_{32}^{(1)} & c_{33}^{(1)} & \cdots & c_{3n}^{(1)} & c_{3,n+1}^{(1)} \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & c_{n2}^{(1)} & c_{n3}^{(1)} & \cdots & c_{nn}^{(1)} & c_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

za pomocą wzorów określających nowe współczynniki

$$\boxed{c_{ij}^{(1)} = c_{ij} - \frac{c_{i1}}{c_{11}} c_{1j} \quad \text{dla} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad \text{oraz} \quad j = 2, 3, \dots, n+1}$$

Metoda eliminacji Gaussa

W drugim kroku odejmujemy drugie równanie pomnożone przez $c_{i2}^{(1)}/c_{22}^{(1)}$ od i – tego równania ($i = 3, 4, \ldots , n$) i po wykonaniu obliczeń otrzymujemy kolejny układ równań:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = c_{1,n+1} \\ \qquad c_{22}^{(1)}x_2 + c_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{2n}^{(1)}x_n = c_{2,n+1}^{(1)} \\ \qquad\qquad c_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + c_{3n}^{(2)}x_n = c_{3,n+1}^{(2)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + c_{nn}^{(2)}x_n = c_{n,n+1}^{(2)} \end{cases}$$

który odpowiada sprowadzeniu macierzy $\mathbf{C}$ do $\mathbf{C}_1$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ 0 & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)} & \cdots & c_{2n}^{(1)} & c_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & c_{33}^{(2)} & \cdots & c_{3n}^{(2)} & c_{3,n+1}^{(2)} \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & c_{n3}^{(2)} & \cdots & c_{nn}^{(2)} & c_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

za pomocą wzorów określających nowe współczynniki

$$c_{ij}^{(2)} = c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{i2}^{(1)}}{c_{22}^{(1)}} c_{2j}^{(1)} \quad \text{dla} \quad i = 3, 4, \ldots, n \quad \text{oraz} \quad j = 3, 4, \ldots, n+1$$

Kontynuując takie postępowanie, po wykonaniu n kroków dochodzimy do trójkątnego układu równań

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = c_{1,n+1} \\ \qquad c_{22}^{(1)}x_2 + c_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{2n}^{(1)}x_n = c_{2,n+1}^{(1)} \\ \qquad\qquad c_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + c_{3n}^{(2)}x_n = c_{3,n+1}^{(2)} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}^{(n-1)}x_n = c_{n,n+1}^{(n-1)} \end{cases}$$

któremu odpowiada przekształcona macierz $\mathbf{C}_{n\text{-}1}$

$$\mathbf{C}_{n-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ 0 & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)} & \cdots & c_{2n}^{(1)} & c_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & c_{33}^{(2)} & \cdots & c_{3n}^{(2)} & c_{3,n+1}^{(2)} \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{nn}^{(n-1)} & c_{n,n+1}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Tak zbudowany układ równań rozwiązuje się przedstawioną wcześniej metodą dla układów trójkątnych zakładając, że n – pierwszych kolumn macierzy $\mathbf{C}_{n\text{ -}1}$ stanowi macierz $\mathbf{A}$, a kolumna n +1 jest wektorem $\mathbf{B}$.

Przejście od układu równań liniowych do układu trójkątnego realizowane jest zatem za pomocą następującego wzoru iteracyjnego:

$$\begin{cases} s = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \begin{cases} i = s+1, s+2, \ldots, n \\ c_{ij}^{(s)} = c_{ij}^{(s-1)} - \dfrac{c_{is}^{(s-1)}}{c_{ss}^{(s-1)}} c_{sj}^{(s-1)}, \; j = s+1, s+2, \ldots, n+1 \end{cases} \end{cases}$$

Przykład:

Rozwiązać następujący układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Macierz główna układu i wektor wyrazów wolnych mają postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Macierz główna układu i wektor wyrazów wolnych mają postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz **C**

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Obliczamy elementy macierzy $\mathbf{C}_1$:

$$c_{ij}^{(1)} = c_{ij} - \frac{c_{i1}}{c_{11}} c_{1j} \quad \text{dla} \quad i = 2,3 \quad \text{oraz} \quad j = 2,3,4$$

$$c_{22}^{(1)} = c_{22} - \frac{c_{21}}{c_{11}} c_{12} = -2 - \frac{3}{2} \cdot \left(-1\right) = -0.5$$

$$c_{23}^{(1)} = -3.5 \quad c_{24}^{(1)} = 0.5 \quad c_{32}^{(1)} = 2.5 \quad c_{33}^{(1)} = -0.5 \quad c_{34}^{(1)} = 3.5$$

i otrzymujemy:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -0.5 & -3.5 & 0.5 \\ 0 & 2.5 & -0.5 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Obliczamy elementy macierzy $\mathbf{C}_2$

$$c_{ij}^{(2)} = c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{i2}^{(1)}}{c_{22}^{(1)}} c_{2j}^{(1)} \quad \text{dla} \quad i = 3 \ \text{oraz} \ j = 3, 4$$

$$c_{33}^{(2)} = -18, \quad c_{34}^{(2)} = 6$$

i otrzymujemy:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -0.5 & -3.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

Macierz $\mathbf{C}_2$ przedstawia teraz następujący trójkątny układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -0.5x_2 - 3.5x_3 = 0.5 \\ -18x_3 = 6 \end{cases}$$

który można zapisać następująco:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -0.5 & -3.5 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{6}{-18} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23} \cdot x_3}{a_{22}} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3}{a_{11}} = \frac{1 - (-1) \cdot 1\frac{1}{3} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{2} = 1\frac{2}{3}$$

Algorytm Thomasa (zwany metodą progonki) stosowany jest między innymi dla trójprzekątniowego układu równań:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

który można zapisać również w następujący sposób

$$a_i\, x_{i-1} + b_i\, x_i + c_i\, x_{i+1} = d_i\,,\;\; a_1 = 0,\;\; c_n = 0,\;\; i = 1, 2, \dots, n \qquad ❶$$

Rozwiązanie tego układu równań poszukuje się w postaci

$$x_i = \beta_i \, x_{i+1} + \gamma_i \qquad ❷$$

lub inaczej zapisując

$$x_{i-1} = \beta_{i-1} \, x_i + \gamma_{i-1}$$

gdzie β_i i γ_i są nieznanymi współczynnikami.

Po podstawieniu ❷ do ❶ i uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i\,\beta_{i-1} + b_i}$$

$$\gamma_i = \frac{d_i - a_i\,\gamma_{i-1}}{a_i\,\beta_{i-1} + b_i}$$

Metoda Thomasa

Z danych przedstawionych w równaniu ➊ można wyznaczyć wartości początkowe (dla $i = 1$)

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1}\ , \ \gamma_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

oraz wartość ostatniej niewiadomej (dla $i = n$)

$$x_n = \frac{d_n - a_n\,\gamma_{n-1}}{a_n\,\beta_{n-1} + b_n} = \gamma_n$$

Po wyznaczeniu wartości x_n kolejne niewiadome obliczamy z równania ➋ dla $i = n$-1, n-2, ... , 1

Przykład 3:

Rozwiązać następujący układ równań metodą Thomasa

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

Macierz główną układu i wektor wyrazów wolnych można zapisać następująco:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wartości początkowe współczynników

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1} = -3\,, \qquad \gamma_1 = \frac{d_1}{b_1} = 1$$

Następnie wyznaczamy pozostałe wartości współczynników dla $i = 2, ..., n$

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i\,\beta_{i-1} + b_i}\ ,\ \gamma_i = \frac{d_i - a_i\,\gamma_{i-1}}{a_i\,\beta_{i-1} + b_i}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -0.333 \\ -0.6 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1.333 \\ 1.6 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wartość ostatniej niewiadomej x_n

$$x_n = \gamma_n \;\rightarrow\; x_5 = -0.25$$

oraz pozostałe wartości niewiadomych $i = n$-1, n-2, ... , 1:

$$x_i = \beta_i x_{i+1} + \gamma_i$$

$$x = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -0.25 \\ 0.75 \\ 1.75 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$