METODY NUMERYCZNE

dr inż. Mirosław Dziewoński
e-mail: miroslaw.dziewonski@polsl.pl
Pok. 151

Aproksymacja funkcji jednej zmiennej

Aproksymacja funkcji jednej zmiennej

Dana jest funkcja jednej zmiennej

$$y = f(x)$$

gdzie

$$x \in [a, b]$$

Funkcja ta podana jest w postaci wzoru analitycznego lub w postaci zbioru punktów

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ \dots\ ,\ f(x_n) = y_n$$

Celem aproksymacji jest dobór takiej funkcji

$$F(x, p_0, \dots, p_k),\ \ x \in [a, b]$$

aby w sensie przyjętego kryterium funkcja ta możliwie dokładnie odtwarzała przebieg funkcji $f(x)$.

Jeżeli funkcja dana jest w postaci dyskretnej (zbioru punktów) to aproksymację nazywamy punktową, a jeżeli w postaci wzoru analitycznego, to mówimy o aproksymacji integralnej.

Aproksymacja funkcji jednej zmiennej

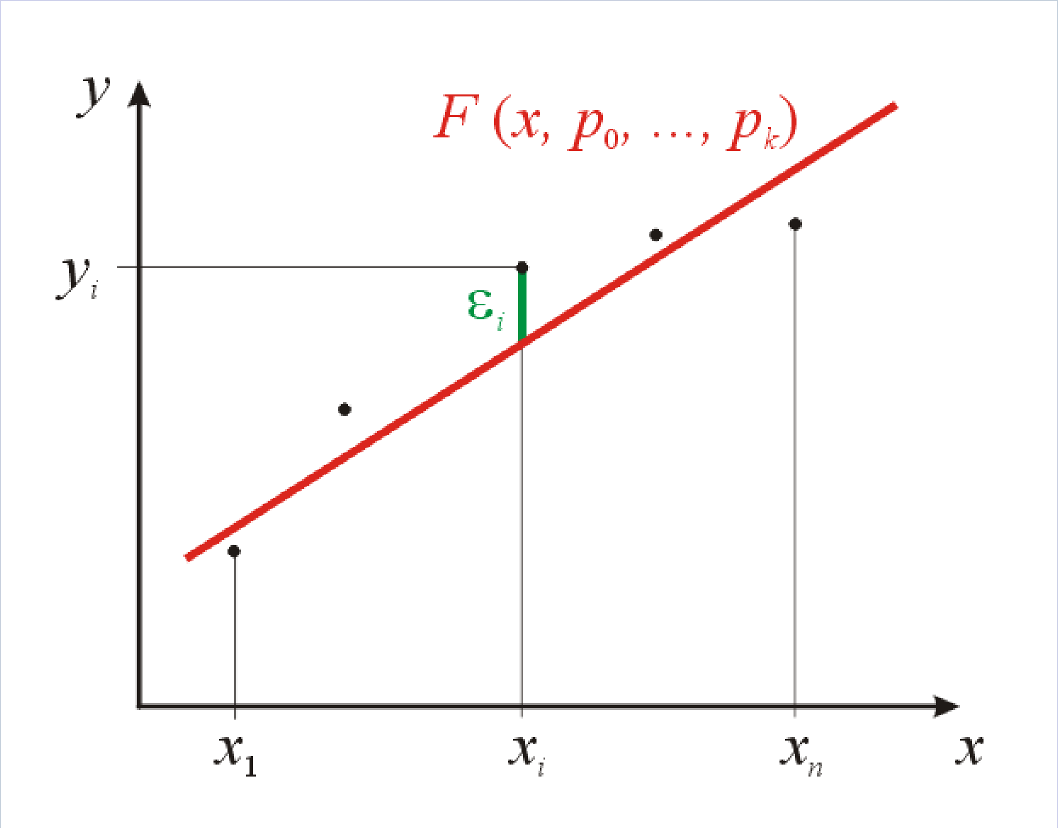
Kryteria aproksymacji punktowej dla funkcji jednej zmiennej konstruuje się tak, aby zminimalizować różnice pomiędzy wartościami danej funkcji $f\,(x)$ w punktach $(x_i,\ y_i)$, $i = 1,\ 2\ ,\ldots,\ n$ a wartościami funkcji $F\,(x, p_0, \ldots, p_k)$ w tych samych punktach.

Wprowadzamy pojęcie odchyłki:

$$\varepsilon_i = F(x_i, p_0, \ldots, p_k) - y_i \rightarrow \min, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Należy tak dobrać parametry $p_0,\ \ldots,\ p_k$ wzoru empirycznego, aby spełnione było kryterium minimalizacji odchyłki.

Aproksymacja funkcji jednej zmiennej



Aproksymacja funkcji jednej zmiennej

W literaturze można spotkać następujące kryteria minimalizacji odchyłek

- metoda wybranych punktów,
- metoda średnich,
- metoda sumowania bezwzględnych wartości,
- metoda najmniejszych kwadratów.

Metoda najmniejszych kwadratów

Kryterium tej metody polega na takim doborze współczynników funkcji $F\,(x, p_0, \ldots, p_k)$, aby

$$S(p_0, \ldots, p_k) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i, p_0, \ldots, p_k) - y_i \right]^2 \to \min$$

Aproksymacja liniowa funkcji jednej zmiennej

Rozpatrujemy zbiór punktów

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

którego aproksymacją ma być funkcja liniowa

$$y = p_0 + p_1 x$$

Zgodnie z kryterium metody najmniejszych kwadratów

$$S(p_0, p_1) = \sum_{i=1}^{n} \left(p_0 + p_1 x_i - y_i \right)^2 = \min$$

Aproksymacja liniowa funkcji jednej zmiennej

Warunkiem koniecznym dla istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych jest zerowanie się odpowiednich pochodnych cząstkowych:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(p_0, p_1)}{\partial p_0} = 0 \\ \dfrac{\partial S(p_0, p_1)}{\partial p_1} = 0 \end{cases}$$

Otrzymujemy zatem następujący układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial p_0} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_0 + p_1 x_i - y_i \right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial p_1} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_0 + p_1 x_i - y_i \right) \cdot x_i = 0 \end{cases}$$

Aproksymacja liniowa funkcji jednej zmiennej

Układ ten można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{cases} p_0\, n + p_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ p_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + p_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{cases}$$

lub macierzowo:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{bmatrix}$$

Aproksymacja liniowa funkcji jednej zmiennej

Rozwiązując układ równań dowolną metodą można obliczyć parametry p_0 i p_1 np.:

$$X \cdot P = Y \rightarrow P = X^{-1} \cdot Y$$

Aproksymacja kwadratowa funkcji jednej zmiennej

Przykład 1:

Dla zbioru punktów

$$P_i(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

dobrać wzór aproksymujący w postaci:

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$$

Aproksymacja kwadratowa funkcji jednej zmiennej

Wykorzystując kryterium metody najmniejszych kwadratów

$$S(p_0, p_1, p_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(p_0 + p_1 x_i + p_2 x_i^2 - y_i \right)^2 = \min$$

możemy zapisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial p_0} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_0 + p_1 x_i + p_2 x_i^2 - y_i \right) \cdot 1 = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial p_1} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_0 + p_1 x_i + p_2 x_i^2 - y_i \right) \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial p_2} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_0 + p_1 x_i + p_2 x_i^2 - y_i \right) \cdot x_i^2 = 0 \end{cases}$$

Aproksymacja kwadratowa funkcji jednej zmiennej

Zapis macierzowy:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, y_i \end{bmatrix}$$

Z powyższego układu równań wyznacza się p_0, p_1, p_2.

Aproksymacja funkcji jednej zmiennej

Przykład 2:

Dla zbioru punktów

$$P_i(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

dobrać wzór aproksymujący w postaci:

$$y = b_0 + b_1 \frac{1}{x^2} + b_2 x^2$$

Aproksymacja funkcji jednej zmiennej

Wykorzystując kryterium metody najmniejszych kwadratów

$$S(b_0,b_1,b_2)=\sum_{i=1}^{n}\left(b_0+b_1\frac{1}{x_i^2}+b_2\,x_i^2-y_i\right)^2=\min$$

zapisujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial b_0}=2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(b_0+b_1\dfrac{1}{x_i^2}+b_2\,x_i^2-y_i\right)\cdot 1=0\\[2ex]\dfrac{\partial S}{\partial b_1}=2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(b_0+b_1\dfrac{1}{x_i^2}+b_2\,x_i^2-y_i\right)\cdot\dfrac{1}{x_i^2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial S}{\partial b_2}=2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(b_0+b_1\dfrac{1}{x_i^2}+b_2\,x_i^2-y_i\right)\cdot x_i^2=0\end{cases}$$

Zapis macierzowy:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^4} & n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & n & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i^2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, y_i \end{bmatrix}$$

Z powyższego układu równań wyznacza się b_0, b_1, b_2.

Interpolacja funkcji jednej zmiennej

Dana jest funkcja:

$$y = f(x)\ ,\ x \in \left[x_0\ , x_n\right]$$

dla której znamy tablicę jej wartości

$$f(x_0) = y_0\ ,\ f(x_1) = y_1,\ ...,\ f(x_n) = y_n$$

Wartości tworzące $n+1$ par punktów

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1),\ ...,(x_n, y_n)$$

zwane są *węzłami interpolacji*.

Interpolacja - definicja

Celem interpolacji jest wyznaczenie takiej funkcji $W(x)$, aby:

$$W(x_0) = y_0, W(x_1) = y_1, \ldots, W(x_n) = y_n$$

Funkcja ta nazywana jest *wielomianem interpolacyjnym* i węzłach interpolacji przyjmuje takie same wartości co funkcja $y = f(x)$.

Interpolacja - definicja

Wielomian interpolacyjny definiuje się jako *kombinację liniową* $n + 1$ funkcji bazowych i współczynników a_i

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

a_i – współczynniki wielomianu interpolacyjnego

$\varphi_i(x)$ – przyjęte funkcje bazowe

Definiując:

$$\mathbf{\Phi} = \left[\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\right]$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

wtedy:

$$\mathbf{XA} = \mathbf{Y}$$

$$W(x) = \Phi \cdot \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}$$

Funkcje bazowe:

$$\varphi_0(x) = x^0 = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = x^n$$

Postać wielomianu interpolacyjnego:

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Interpolacja naturalna

Opierając się na warunku koniecznym istnienia interpolacji:

$$
\begin{gathered}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n
\end{gathered}
$$

można zapisać, że

$$
\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

Przykład

Dla podanych węzłów zapisz:

- macierze układu równań, z których wyznacza się współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla interpolacji wielomianowej
- wielomian interpolacyjny

Węzły:

$$(1,3) \quad (-2,5) \quad (4,7)$$

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^1 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 \\ (-2)^0 & (-2)^1 & (-2)^2 \\ 4^0 & 4^1 & 4^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$$

$$a_0 = 3, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{3}$$

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$W(x) = 3 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} x^2$$

Funkcje bazowe:

$$\varphi_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n)$$

$$\varphi_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n)$$

....

$$\varphi_i(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$$

....

$$\varphi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_{n-1})$$

Dla każdej $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ brakuje składnika $(x - x_i)$!!!

Postać wielomianu interpolacyjnego:

$$
\begin{aligned}
W(x) &= a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) = \\
&= a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \\
&+ a_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \ldots + \\
&+ a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Macierz $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

Dla punktu x_i wszystkie funkcje bazowe oprócz $\varphi_i(x)$ zerują się, bo występuje w nich składnik $(x - x_i)$

Ponieważ macierz $\mathbf{X}$ ma tylko główną przekątną niezerową to:

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} = \frac{y_0}{\varphi_0(x_0)}$$

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} = \frac{y_1}{\varphi_1(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})} = \frac{y_n}{\varphi_n(x_n)}$$

Przykład

Dla podanych węzłów zapisz:

- macierze układu równań, z których wyznacza się współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla interpolacji wielomianowej
- wielomian interpolacyjny

Węzły:

$$(-2,3) \quad (0,5) \quad (2,-3)$$

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

Interpolacja Lagrange'a

$$(-2,3) \qquad (0,5) \qquad (2,-3)$$

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$W(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$W(x) = 3\frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} + 5\frac{\left[x-(-2)\right](x-2)}{\left[0-(-2)\right](0-2)} + (-3)\frac{\left[x-(-2)\right](x-0)}{\left[x-(-2)\right](2-0)}$$

$$W(x) = 3\frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} + 5\frac{(x+2)(x-2)}{(0+2)(0-2)} - 3\frac{(x+2)(x-0)}{(2+2)(2-0)}$$