Wykład 2

1. Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

Definicja:

Jeżeli każdej liczbie rzeczywistej t należącej do pewnego przedziału przyporządkowano liczbę zespoloną $a \le t \le b$:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

to mówimy, że została określona funkcja zespolona $z(t)$ zmiennej rzeczywistej t.

Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

Uwaga:

Równanie powyższe jest równoważne parze równań rzeczywistych tzn.:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad a \le t \le b$$

Twierdzenie:

Funkcja zespolona $z(t)$ zmiennej rzeczywistej t:

1. ma w punkcie t_0 *granicę*: $z(t_0) = x(t_0) + iy(t_0)$,
2. jest ciągła w punkcie t_0 ,
3. ma w punkcie t_0 pochodną : $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$,

Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

4. jest całkowalna w przedziale [a, b]:

$$\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli *obie funkcje rzeczywiste* $x(t),\ y(t)$ spełniają warunki:

1. mają granice w punkcie t_0 : $x(t_0)$ i $y(t_0)$,
2. są ciągłe w punkcie t_0 ,
3. mają pochodne w punkcie t_0: $x'(t_0)$ i $y'(t_0)$,
4. są całkowalne w przedziale [a, b].

Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

Uwaga:

Różniczkowanie i całkowanie funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej przeprowadzamy stosując te same reguły różniczkowania i całkowania jak dla funkcji rzeczywistych pamiętając o tym, że i jest stałą.

2. Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Definicja:

Jeżeli każdej liczbie z należącej do pewnego obszaru płaskiego D przyporządkowujemy pewną liczbę zespoloną $w = f(z)$ to mówimy, że w zbiorze D została określona funkcja zespolona $f(z)$ zmiennej zespolonej z. Zbiór D nazywamy dziedziną funkcji.

Dla funkcji zespolonej zmiennej zespolonej stosuje się zapis:

$$w = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

gdzie:

$u(x,y)$ - część rzeczywista funkcji $w=f(z)$,

$v(x,y)$ - część urojona funkcji $w=f(z)$.

Pochodna funkcji zespolonej zmiennej zespolonej

Definicja 1:

Pochodną funkcji $w = f(z)$ w punkcie z_0 nazywamy *granicę skończoną* (o ile istnieje) następującego wyrażenia

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

przy założeniu, że przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera przez dowolne wartości zespolone $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \neq 0$.

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Pochodną funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 obliczamy następująco:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Uwaga:

Definicja jest formalnie identyczna z definicją pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej, różnica polega na tym, że przyrost Δz dążąc do zera, może przebiegać dowolne wartości zespolone.

Słuszne są również twierdzenia o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji, przy założeniu, że odpowiednie funkcje są różniczkowalne.

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Twierdzenie 1 (warunek konieczny różniczkowalności)**:**

Jeśli funkcja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ma w punkcie $z = x + iy$ *pochodną*, to:

1. istnieją w tym punkcie pochodne cząstkowe części rzeczywistej $u(x, y)$ oraz urojonej $v(x, y)$,
2. pochodne te spełniają w tym punkcie równania

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Powyższe równania nazywamy ***warunkami Cauchy'ego – Riemanna.***

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Twierdzenie 2 (warunek dostateczny różniczkowalności)**:**

Jeżeli część rzeczywista $u(x,y)$ i urojona $v(x,y)$ funkcji zespolonej $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ spełniają warunki Cauchy'ego–Riemanna w pewnym obszarze D i jeżeli ponadto pochodne cząstkowe tych funkcji są ciągłe w tym obszarze, to funkcja $f(z)=u+iv$ ma w każdym punkcie $z=x+iy$ tego obszaru pochodną:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Definicja 2:

Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest *holomorficzna* w pewnym obszarze D, jeżeli jest *holomorficzna* w *każdym* punkcie tego obszaru.

Definicja 3:

Funkcja $f(z)$ jest *holomorficzna* w punkcie z_0, jeżeli jest różniczkowalna w danym punkcie z_0 i w pewnym jego otoczeniu.