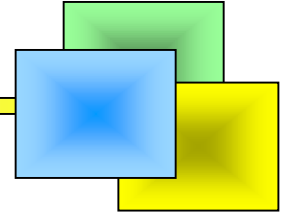


## Wykład 2



# Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

---



## 1. Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

### Definicja:

Jeżeli każdej liczbie rzeczywistej  $t$  należącej do pewnego przedziału przyporządkowano liczbę zespoloną  $a \leq t \leq b$  :

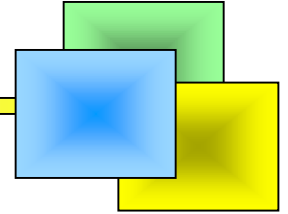
$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

to mówimy, że została określona funkcja zespolona  $z(t)$  zmiennej rzeczywistej  $t$ .

---

# Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

---



## Uwaga:

Równanie powyższe jest równoważne parze równań rzeczywistych tzn.:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$

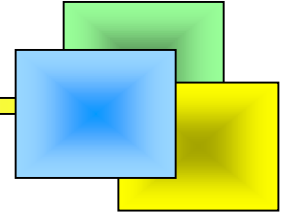
## Twierdzenie:

Funkcja zespolona  $z(t)$  zmiennej rzeczywistej  $t$ :

1. ma w punkcie  $t_0$  *granice*:  $z(t_0) = x(t_0) + iy(t_0)$ ,
  2. jest ciągła w punkcie  $t_0$ ,
  3. ma w punkcie  $t_0$  pochodną:  $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ ,
-

# Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

---



4. jest całkowna w przedziale  $[a, b]$ :

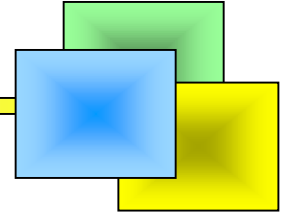
$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli *obie funkcje rzeczywiste*  $x(t)$ ,  $y(t)$  spełniają warunki:

1. mają granice w punkcie  $t_0$  :  $x(t_0)$  i  $y(t_0)$ ,
  2. są ciągłe w punkcie  $t_0$  ,
  3. mają pochodne w punkcie  $t_0$  :  $x'(t_0)$  i  $y'(t_0)$  ,
  4. są całkowne w przedziale  $[a, b]$ .
-

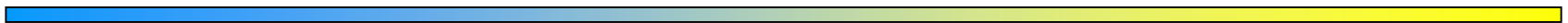
# Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

---



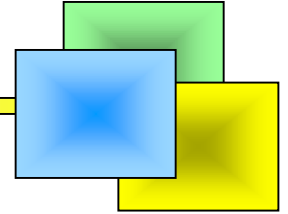
## Uwaga:

Różniczkowanie i całkowanie funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej przeprowadzamy stosując te same reguły różniczkowania i całkowania jak dla funkcji rzeczywistych pamiętając o tym, że  $i$  jest stałą.



# Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

---



## 2. Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

### Definicja:

Jeżeli każdej liczbie  $z$  należącej do pewnego obszaru płaskiego  $D$  przyporządkujemy pewną liczbę zespoloną  $w = f(z)$  to mówimy, że w zbiorze  $D$  została określona funkcja zespolona  $f(z)$  zmiennej zespolonej  $z$ . Zbiór  $D$  nazywamy dziedziną funkcji.

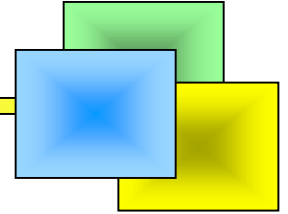
Dla funkcji zespolonej zmiennej zespolonej stosuje się zapis:

$$w = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

---

# Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

---



gdzie:

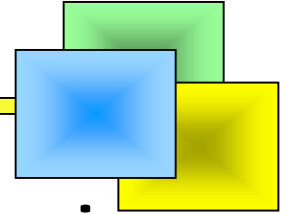
$u(x, y)$  - część rzeczywista funkcji  $w = f(z)$ ,

$v(x, y)$  - część urojona funkcji  $w = f(z)$ .

---

# Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

---



## Pochodna funkcji zespolonej zmiennej zespolonej

### Definicja 1:

*Pochodną funkcji*  $w = f(z)$  w punkcie  $z_0$  nazywamy *granice skończoną* (o ile istnieje) następującego wyrażenia

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

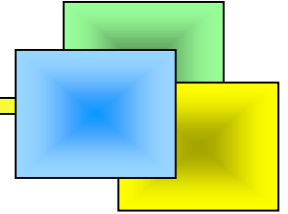
przy założeniu, że przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera przez dowolne wartości zespolone  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \neq 0$ .

---



# Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

---



Pochodną funkcji  $f(z)$  w punkcie  $z_0$  obliczamy następująco:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

## Uwaga:

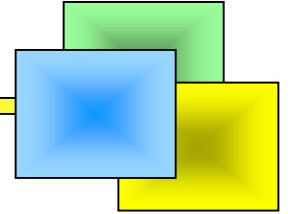
Definicja jest formalnie identyczna z definicją pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej, różnica polega na tym, że przyrost  $\Delta z$  dążąc do zera, może przebiegać dowolne wartości zespolone.

Słuszne są również twierdzenia o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji, przy założeniu, że odpowiednie funkcje są różniczkowalne.

---

# Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

---



**Twierdzenie 1** (warunek konieczny różniczkowalności):

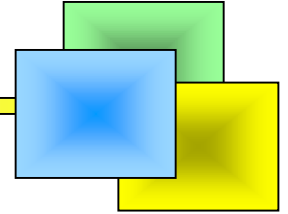
Jeśli funkcja  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ma w punkcie  $z = x + iy$  pochodną, to:

1. istnieją w tym punkcie pochodne cząstkowe części rzeczywistej  $u(x, y)$  oraz urojonej  $v(x, y)$ ,
2. pochodne te spełniają w tym punkcie równania

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Powyższe równania nazywamy ***warunkami Cauchy'ego – Riemanna***.

---



## Twierdzenie 2 (warunek dostateczny różniczkowalności):

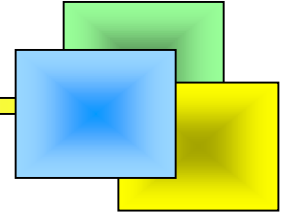
Jeżeli część rzeczywista  $u(x, y)$  i urojona  $v(x, y)$  funkcji zespolonej  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  spełniają warunki Cauchy'ego–Riemanna w pewnym obszarze  $D$  i jeżeli ponadto pochodne cząstkowe tych funkcji są ciągłe w tym obszarze, to funkcja  $f(z) = u + iv$  ma w każdym punkcie  $z = x + iy$  tego obszaru pochodną:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$



# Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

---



## Definicja 2:

Mówimy, że funkcja  $f(z)$  jest *holomorficzna* w pewnym obszarze  $D$ , jeżeli jest *holomorficzna* w *każdym* punkcie tego obszaru.

## Definicja 3:

Funkcja  $f(z)$  jest *holomorficzna* w punkcie  $z_0$ , jeżeli jest różniczkowalna w danym punkcie  $z_0$  i w pewnym jego otoczeniu.

---