Wykład 3
fragmenty

Całkowanie funkcji zmiennej zespolonej

Twierdzenie 1:

Jeżeli funkcja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ jest ciągła wzdłuż krzywej regularnej C, to całka istnieje i oblicza się ją ze wzoru:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f\left[z(t)\right] z'(t)\,\mathrm{d}t$$

gdzie: $z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$ jest równaniem krzywej całkowania C.

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Całka krzywoliniowa funkcji zmiennej zespolonej zachowuje wszystkie własności całki krzywoliniowej funkcji zmiennej rzeczywistej:

1. $$\int_C \left[f_1(z) \pm f_2(z) \right] \mathrm{d}\,z = \int_C f_1(z)\,\mathrm{d}\,z \pm \int_C f_2(z)\,\mathrm{d}\,z$$

2. $$\int_C k \cdot f(z)\,\mathrm{d}\,z = k \cdot \int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z, \quad k = \mathrm{idem}$$

3. $$\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

gdzie C - krzywa, w której zmieniono zwrot na przeciwny.

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Definicja 1:

Mówimy, że funkcja $F(z)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(z)$ w obszarze D, jeżeli w każdym punkcie tego obszaru

$$F'(z) = f(z)$$

Twierdzenie 2:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła w obszarze jednospójnym D i ma w tym obszarze funkcję pierwotną $F(z)$, to całka krzywoliniowa wzdłuż dowolnej drogi regularnej C zawartej w D o początku z_1 i końcu z_2 nie zależy od drogi całkowania i wyraża się wzorem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)$$

Wzór całkowy Cauchy'ego

Twierdzenie 3 (całkowe Cauchy'ego):

Jeżeli funkcja $f\left(z\right)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym domkniętym D, to całka krzywoliniowa funkcji $f\left(z\right)$ wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej C przebiegającej w D równa jest zeru, czyli:

$$\int_C f\left(z\right)\mathrm{d}\,z = 0$$

Twierdzenie 4 (wzór całkowy Cauchy'ego):

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym domkniętym D, którego brzegiem jest kontur C, to w każdym punkcie wewnętrznym z obszaru D wyraża się ona wzorem:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-\xi} \mathrm{d}z, \quad \xi \in D$$

Wniosek:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\xi} \mathrm{d}z = 2\pi i \, f(\xi), \quad \xi \in D$$

Twierdzenie 5 (uogólniony wzór całkowy Cauchy'ego):

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym domkniętym D, którego brzegiem jest kontur C, to ma w każdym punkcie wewnętrznym z tego obszaru pochodne wszystkich rzędów określone wzorami

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Wniosek:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad n = 1, 2, \ldots$$