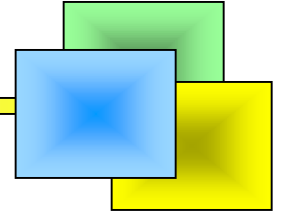


Wykład 3

fragmenty



Całkowanie funkcji zmiennej zespolonej

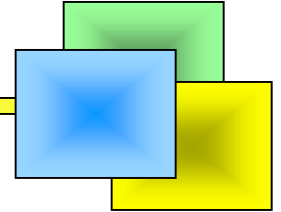
Twierdzenie 1:

Jeżeli funkcja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jest ciągła wzdłuż krzywej regularnej C , to całka istnieje i oblicza się ją ze wzoru:

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt$$

gdzie: $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ jest równaniem krzywej całkowania C .

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej



Całka krzywoliniowa funkcji zmiennej zespolonej zachowuje wszystkie własności całki krzywoliniowej funkcji zmiennej rzeczywistej:

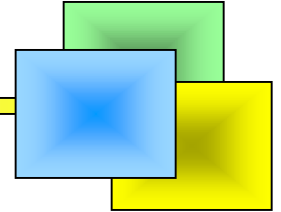
$$1. \int_C [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_C f_1(z) dz \pm \int_C f_2(z) dz$$

$$2. \int_C k \cdot f(z) dz = k \cdot \int_C f(z) dz, \quad k = \text{idem}$$

$$3. \int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

gdzie C - krzywa, w której zmieniono zwrot na przeciwny.

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej



Definicja 1:

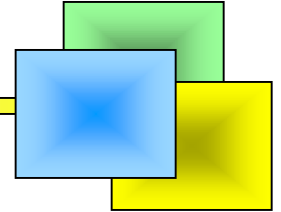
Mówimy, że funkcja $F(z)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(z)$ w obszarze D , jeżeli w każdym punkcie tego obszaru

$$F'(z) = f(z)$$

Twierdzenie 2:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła w obszarze jednospójnym D i ma w tym obszarze funkcję pierwotną $F(z)$, to całka krzywoliniowa wzdłuż dowolnej drogi regularnej C zawartej w D o początku z_1 i końcu z_2 nie zależy od drogi całkowania i wyraża się wzorem

$$\int_C f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

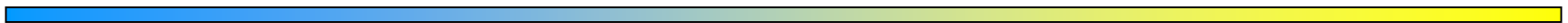


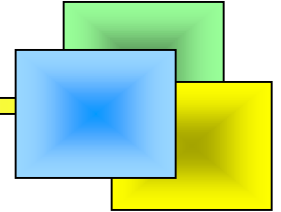
Wzór całkowy Cauchy'ego

Twierdzenie 3 (całkowe Cauchy'ego):

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym domkniętym D , to całka krzywoliniowa funkcji $f(z)$ wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej C przebiegającej w D równa jest zero, czyli:

$$\int_C f(z) dz = 0$$





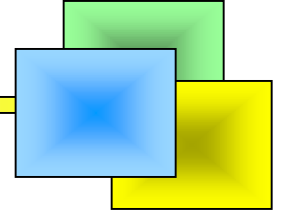
Twierdzenie 4 (wzór całkowy Cauchy'ego):

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym domkniętym D , którego brzegiem jest kontur C , to w każdym punkcie wewnętrznym z obszaru D wyraża się ona wzorem:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \xi} dz, \quad \xi \in D$$

Wniosek:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - \xi} dz = 2\pi i f(\xi), \quad \xi \in D$$



Twierdzenie 5 (uogólniony wzór całkowy Cauchy'ego):

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze jednospójnym domkniętym D , którego brzegiem jest kontur C , to ma w każdym punkcie wewnętrznym z tego obszaru pochodne wszystkich rzędów określone wzorami

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wniosek:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad n = 1, 2, \dots$$
