Wykład 4
fragmenty

Przekształcenie Laplace’a

Definicja 1:

Funkcję zespoloną $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t nazywamy <u>oryginałem</u>, jeżeli spełnione są trzy warunki:

1. $f(t)$ wraz z pierwszą pochodną $f'(t)$ jest przedziałami ciągła dla $0 \le t < \infty$ (tzn. $f(t)$ i $f'(t)$ mają w każdym skończonym przedziale co najwyżej skończoną ilość punktów nieciągłości rodzaju pierwszego),

Przekształcenie Laplace'a

2. $f(t) = 0$ dla $-\infty < t < 0$,

3. $f(t)$ jest funkcją rzędu wykładniczego o wskaźniku λ_0 ,
tzn. istnieją takie dwie stałe $\lambda_0 \geq 0$ i $M > 0$, że dla każdego
t spełniona jest nierówność:

$$\left| f(t) \right| < M\, e^{\lambda_0 t} \qquad (1)$$

Przekształcenie Laplace'a

Definicja 2:

Przekształceniem lub transformatą Laplace'a nazywamy takie przekształcenie, które każdemu oryginałowi– funkcji $f(t)$ przyporządkowuje funkcję zespoloną $\Phi(s)$ zmiennej zespolonej s taką , że

$$\Phi(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t \qquad (2)$$

gdzie:

$$s = \lambda + i\omega$$

Przekształcenie Laplace'a

Uwaga:

Jeżeli $f(t)$ jest <u>oryginałem</u> o wskaźniku λ_0 , to całka po prawej stronie powyższego równania (2) jest bezwzględnie zbieżna w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, s = \lambda > \lambda_0$.

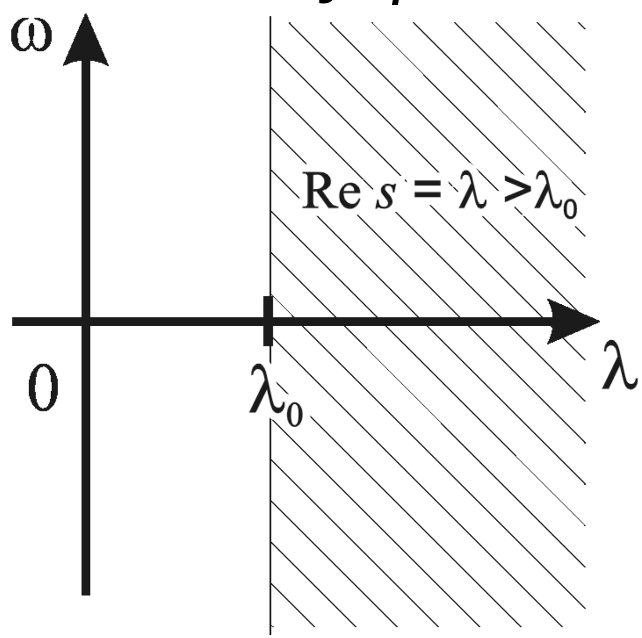
Funkcję $\Phi(s)$ określoną wzorem (2) nazywamy również <u>obrazem</u> funkcji $f(t)$. Przekształcenie dokonane na funkcji $f(t)$ za pomocą całki (2) oznaczamy krótko $\mathrm{L}(f)$:

$$\Phi(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \equiv \mathrm{L}\left[f(t)\right] = \mathrm{L}(f) \qquad (3)$$

Własności transformaty Laplace'a

Własność 1:

Transformata Laplace'a jest funkcją zmiennej zespolonej s, holomorficzną w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$, gdzie λ_0 jest wskaźnikiem wzrostu funkcji $f(t)$.



Przekształcenie Laplace'a

Własność 2:

Jeżeli $\Phi(s)$ jest transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$, będącej oryginałem, to:

$$\lim_{\mathrm{Re}\, s=\lambda\to\infty} \Phi(s) = 0$$

Własność 3 (jednorodność):

$$L\left[cf(t)\right] = cL\left[f(t)\right]$$

gdzie c jest dowolną stałą.

Przekształcenie Laplace'a

Dowód:

$$L\left[cf(t)\right] = \int_0^\infty cf(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = c\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = cL\left[f(t)\right]$$

Własność 4 (addytywność):

$$\mathrm{L}\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = \mathrm{L}\left[f_1(t)\right] + \mathrm{L}\left[f_2(t)\right]$$

Dowód:

$$L\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = \int_0^\infty \left[f_1(t) + f_2(t)\right]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = L\left[f_1(t)\right] + L\left[f_2(t)\right]$$

Przekształcenie Laplace'a

Własność 5 (liniowość):

$$\mathrm{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 \mathrm{L}\left[f_1(t)\right] + c_2 \mathrm{L}\left[f_2(t)\right]$$

gdzie c_1, c_2 - dowolne stałe.

Dowód:

$$L\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = \int_0^\infty \left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= c_1 \int_0^\infty f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + c_2 \int_0^\infty f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = c_1 L\left[f_1(t)\right] + c_2 L\left[f_2(t)\right]$$

Własność 6 (różniczkowanie oryginału):

$$\mathrm{L}\left[f'(t) \right] = s\,\mathrm{L}\left[f(t) \right] - f(0) = s\Phi\left(s\right) - f\left(0\right)$$

$$\mathrm{L}\left[f''(t) \right] = s^2\,\Phi\left(s\right) - s\,f\left(0\right) - f'\left(0\right)$$

$$L\left[f^{(n)}\left(t\right) \right] =$$

$$= s^n\Phi\left(s\right) - s^{n-1} f\left(0\right) - s^{n-2} f'\left(0\right) - s^{n-3} f''\left(0\right) - \ldots - f^{(n-1)}\left(0\right)$$

Przekształcenie Laplace'a

Własność 7 (całkowanie oryginału):

$$\mathrm{L}\left[\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right] = \frac{1}{s}\mathrm{L}\left[f(t)\right] = \frac{\Phi(s)}{s}$$

n-krotne całkowanie oryginału

$$L\left[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^t \mathrm{d}u \int_0^t \mathrm{d}u \ldots \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u}_{n-\text{krotne całkowanie oryginału}}\right] = \frac{\Phi(s)}{s^n}$$

Przekształcenie Laplace'a

Własność 8 (różniczkowanie obrazu):

$$\mathrm{L}\left[-t\,f(t)\right]=\Phi'(s)$$

Własność 9 (całkowanie obrazu):

Jeżeli $f(t)/t$ jest oryginałem, to ze związku $\mathrm{L}\left[f(t)\right]=\Phi(s)$ wynika wzór:

$$\mathrm{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{s}^{\infty}\Phi(s)\,\mathrm{d}\,s$$

gdzie

$$\int_{s}^{\infty}\Phi(s)\,\mathrm{d}\,s=\lim_{\mathrm{Re}\,p\to\infty}\int_{s}^{p}\Phi(s)\,\mathrm{d}\,s$$

Przekształcenie Laplace'a

Własność 10 (podobieństwo):

$$\mathrm{L}\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}\Phi\left(\frac{s}{a}\right)$$

gdzie $a>0$.

Własność 11 (przesunięcie oryginału):

$$\mathrm{L}\left[f(t-a)\right]=\mathrm{e}^{-as}\,\Phi(s)$$

dla dowolnego $a>0$.

Przekształcenie Laplace'a

Własność 12 (przesunięcie obrazu):

$$\mathrm{L}\left[\mathrm{e}^{-as} f(t)\right] = \Phi(s+a)$$

gdzie a - dowolna liczba zespolona.

Własność 13:

Dla dowolnego oryginału $f(t)$ i jego obrazu $\Phi(s)$ prawdziwy jest związek graniczny:

$$\lim_{t \to 0+0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,\Phi(s)$$

Własność 14:

Jeżeli istnieje granica oryginału $f(t)$, gdy $t \to \infty$, to

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\Phi(t)$$

Przekształcenie Laplace'a

Tablica przekształceń Laplace'a

$f(t)$	$\mathrm{L}\left[f(t)\right]=\mathrm{L}(f)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$

Tablica przekształceń Laplace'a c.d

$f(t)$	$\mathrm{L}\left[f(t)\right]=\mathrm{L}(f)$
$t\,\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
$t^n\,\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$

Tablica przekształceń Laplace'a c.d

$f(t)$	$\mathrm{L}\left[f(t)\right]=\mathrm{L}(f)$
$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$t\sin at$	$\dfrac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$

Tablica przekształceń Laplace'a c.d

$f(t)$	$\mathrm{L}\left[f(t)\right]=\mathrm{L}(f)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-s\,f(0)-f'(0)$
$f'''(t)$	$s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$