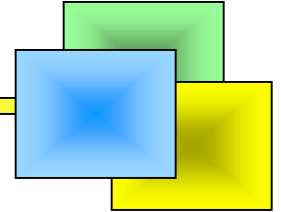


Wykład 5

fragmenty



Rozkład na ułamki proste

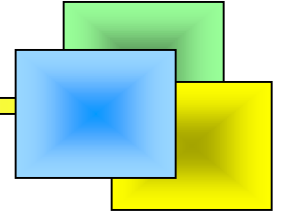
Jeżeli rozważamy ułamek algebraiczny właściwy (stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika tzn. $m < n$) i nieskracalny (licznik i mianownik nie mają żadnego dzielnika wspólnego zawierającego x) postaci

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 + b_1x + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}$$

to można go przekształcić na sumę ułamków prostych, czyli ułamków o postaci

$$\frac{A}{(x-a)^m} \quad \text{lub} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}, \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$$

Przekształcenie Laplace'a



Mogą tu zachodzić przypadki:

1. Mianownik $P(x)$ jest taki, że ma tylko rzeczywiste pierwiastki jednokrotne: a_1, a_2, \dots, a_n .

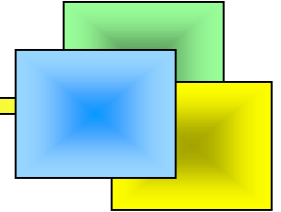
Rozkład przeprowadza się według wzoru:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{Q(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = \\ &= \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \dots + \frac{C}{x-a_n} \end{aligned}$$

Np.

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{6x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Przekształcenie Laplace'a



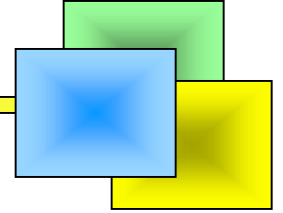
2. Pierwiastki mianownika są rzeczywiste, ale są wśród nich wielokrotne. Rozkład wygląda następująco:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{Q(x)}{(x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_i)^{k_i}} = \\ &= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + \dots + \frac{L_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}}. \end{aligned}$$

Np.

$$\frac{x+1}{x(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}$$

Przekształcenie Laplace'a



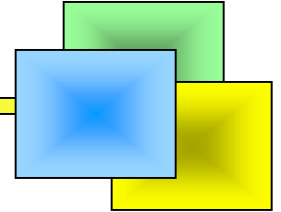
3. Wśród pierwiastków mianownika są pierwiastki zespolone jednokrotne:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{Q(x)}{(x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)\dots} = \\ &= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{Dx+E}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{Fx+G}{x^2 + p_2x + q_2} + \dots \end{aligned}$$

Np.

$$\frac{3x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1}$$

Przekształcenie Laplace'a



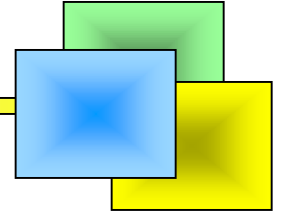
4. Wśród pierwiastków mianownika są pierwiastki zespolone wielokrotne:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{Q(x)}{(x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} (x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \dots} = \\ &= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \\ &+ \frac{D_{l_1}x+E_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{F_1x+G_1}{x^2+p_2x+q_2} + \dots + \frac{F_{l_2}x+G_{l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + \dots \end{aligned}$$

Np.

$$\frac{5x^2 - 4x + 16}{(x-3)(x^2 - x + 1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{D_1x+E_1}{x^2-x+1} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2-x+1)^2}$$

Przekształcenie Laplace'a



Uwaga:

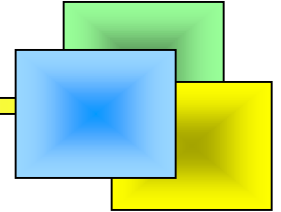
Trójmian kwadratowy $x^2 + px + q$ występujący w mianowniku sprowadzamy do postaci kanonicznej i ułamek przyjmuje postać

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \rightarrow \frac{A\left(x + \frac{p}{2}\right) + C}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + w}$$

gdzie $w = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Np.

$$\frac{3x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{D\left(x + \frac{1}{2}\right) + E}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$



Przekształcenie odwrotne względem przekształcenia Laplace'a

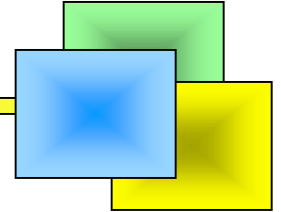
Twierdzenie 1:

Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem, a funkcja $\Phi(s)$ jest transformata Laplace'a (obrazem) funkcji $f(t)$, to w każdym punkcie, w którym jest ciągła, słuszny jest wzór

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} \Phi(s) e^{st} ds$$

gdzie całkowanie odbywa się wzdłuż dowolnej prostej równoległej do osi urojonej o równaniu $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$, oraz gdzie λ_0 jest wskaźnikiem wzrostu oryginału $f(t)$.

Przekształcenie Laplace'a

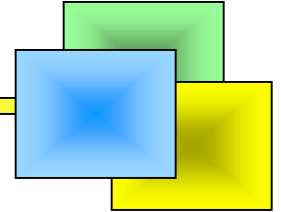


Przekształcenie powyższe nazywamy przekształceniem odwrotnym względem przekształcenia Laplace'a i oznaczamy symbolem

$$f(t) = L^{-1}[\Phi(s)] = L^{-1}(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} \Phi(s) e^{st} ds$$



Przekształcenie Laplace'a



Własności przekształcenia odwrotnego względem przekształcenia Laplace'a

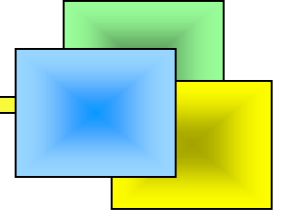
Własność 1:

$$\mathcal{L}^{-1}[c\Phi(s)] = c\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$$

gdzie c jest dowolną stałą.

Dowód:

$$\mathcal{L}^{-1}[c\Phi(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} c\Phi(s)e^{st} ds = \frac{c}{2\pi i} \int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} \Phi(s)e^{st} ds = c\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$$

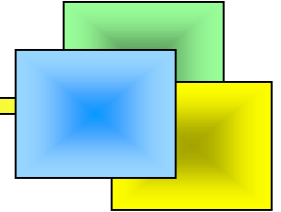


Własność 2:

$$\mathcal{L}^{-1}[\Phi_1(s) + \Phi_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\Phi_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[\Phi_2(s)]$$

Dowód:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\Phi_1(s) + \Phi_2(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} [\Phi_1(s) + \Phi_2(s)] e^{st} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} \Phi_1(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} \Phi_2(s) e^{st} ds = \\ &= \mathcal{L}^{-1}[\Phi_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[\Phi_2(s)]\end{aligned}$$



Własność 3:

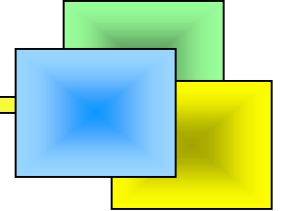
$$\mathcal{L}^{-1}[c_1\Phi_1(s) + c_2\Phi_2(s)] = c_1\mathcal{L}^{-1}[\Phi_1(s)] + c_2\mathcal{L}^{-1}[\Phi_2(s)]$$

gdzie c_1, c_2 - dowolne stałe.

Dowód:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[c_1\Phi_1(s) + c_2\Phi_2(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} [c_1\Phi_1(s) + c_2\Phi_2(s)] e^{st} ds = \\ &= \frac{c_1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} \Phi_1(s) e^{st} ds + \frac{c_2}{2\pi i} \int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} \Phi_2(s) e^{st} ds = \\ &= c_1\mathcal{L}^{-1}[\Phi_1(s)] + c_2\mathcal{L}^{-1}[\Phi_2(s)]\end{aligned}$$

Przekształcenie Laplace'a



Definicja:

Splotem dwóch funkcji $f_1(t)$ oraz $f_2(t)$ całkownych w przedziale $\langle 0, a \rangle$ nazywamy funkcję zmiennej t określoną całką

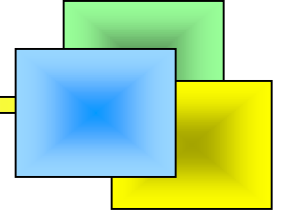
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq a.$$

Własności:

1. Splot jest operacją przemienną

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

Przekształcenie Laplace'a



2. Splot jest operacją łączną

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

3. Splot jest operacją rozdzielną względem dodawania

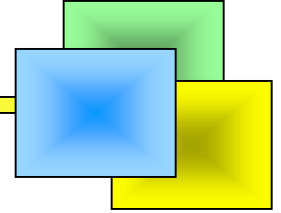
$$[f_1(t) + f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * f_3(t) + f_2(t) * f_3(t)$$

Twierdzenie 2 (Borela o mnożeniu transformacji):

Iloczyn transformaty Laplace'a z oryginału $f_1(t)$ przez transformatę z oryginału $f_2(t)$ równa się transformacji Laplace'a ze splotu tych oryginałów

$$L[f_1(t)] L[f_2(t)] = L[f_1(t) * f_2(t)]$$

Przekształcenie Laplace'a



Wzór Borela (o splocie):

Odwrotne przekształcenie Laplace'a z iloczynu dwóch transformat $\Phi_1(s)$ i $\Phi_2(s)$ jest równe splotowi $f_1(t) * f_2(t)$ ich oryginałów

$$L^{-1}[\Phi_1(s) \Phi_2(s)] = L^{-1}[\Phi_1(s)] * L^{-1}[\Phi_2(s)]$$

