Wykład 5

fragmenty

Rozkład na ułamki proste

Jeżeli rozważamy ułamek algebraiczny właściwy (stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika tzn. $m<n$) i nieskracalny (licznik i mianownik nie mają żadnego dzielnika wspólnego zawierającego x) postaci

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m}{a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n}$$

to można go przekształcić na sumę ułamków prostych, czyli ułamków o postaci

$$\frac{A}{(x-a)^m} \quad \text{lub} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}, \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0.$$

Przekształcenie Laplace'a

Mogą tu zachodzić przypadki:

1. Mianownik $P(x)$ jest taki, że ma tylko rzeczywiste pierwiastki jednokrotne: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Rozkład przeprowadza się według wzoru:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} =$$

$$= \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \ldots + \frac{C}{x-a_n}$$

Np.

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{6x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Przekształcenie Laplace'a

2. Pierwiastki mianownika są rzeczywiste, ale są wśród nich wielokrotne. Rozkład wygląda następująco:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_i)^{k_i}}=$$

$$=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{\left(x-a_1\right)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{\left(x-a_1\right)^{k_1}}+$$

$$+\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{\left(x-a_2\right)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{\left(x-a_2\right)^{k_2}}+\ldots+\frac{L_{k_i}}{\left(x-a_i\right)^{k_i}}.$$

Np.

$$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{\left(x-1\right)^2}+\frac{B_3}{\left(x-1\right)^3}$$

3. Wśród pierwiastków mianownika są pierwiastki zespolone jednokrotne:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\ldots} =$$

$$= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{\left(x-a_1\right)^2} + \ldots + \frac{Dx+E}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{Fx+G}{x^2+p_2x+q_2} + \ldots .$$

Np.

$$\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

4. Wśród pierwiastków mianownika są pierwiastki zespolone wielokrotne:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots}=$$

$$=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{D_2x+E_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{D_{l_1}x+E_{l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}+\frac{F_1x+G_1}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots+\frac{F_{l_2}x+G_{l_2}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{l_2}}+\ldots.$$

Np.

$$\frac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{D_1x+E_1}{x^2-x+1}+\frac{D_2x+E_2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

Przekształcenie Laplace'a

Uwaga:

Trójmian kwadratowy $x^2 + px + q$ występujący w mianowniku sprowadzamy do postaci kanonicznej i ułamek przyjmuje postać

$$\frac{Ax+B}{x^2 + px + q} \rightarrow \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right)+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + w}$$

gdzie $w = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Np.

$$\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{D\left(x+\frac{1}{2}\right)+E}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Przekształcenie odwrotne względem przekształcenia Laplace’a

Twierdzenie 1:

Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem, a funkcja $\Phi(s)$ jest transformatą Laplace’a (obrazem) funkcji $f(t)$, to w każdym punkcie, w którym jest ciągła, słuszny jest wzór

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} \Phi(s)\, e^{st} \,\mathrm{d}s$$

gdzie całkowanie odbywa się wzdłuż dowolnej prostej równoległej do osi urojonej o równaniu $\mathrm{Re}\, s = \lambda > \lambda_0$, oraz gdzie λ_0 jest wskaźnikiem wzrostu oryginału $f(t)$.

Przekształcenie Laplace'a

Przekształcenie powyższe nazywamy przekształceniem odwrotnym względem przekształcenia Laplace'a i oznaczamy symbolem

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}\left[\Phi(s)\right] = \mathrm{L}^{-1}(\Phi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} \Phi(s) e^{st} \mathrm{d}\, s$$

Własności przekształcenia odwrotnego względem przekształcenia Laplace'a

Własność 1:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[c\,\Phi\left(s\right)\right] = c\,\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi\left(s\right)\right]$$

gdzie c jest dowolną stałą.

Dowód:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[c\,\Phi(s)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} c\,\Phi(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = \frac{c}{2\pi i}\int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega} \Phi(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = c\,\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi(s)\right]$$

Przekształcenie Laplace'a

Własność 2:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_1(s)+\Phi_2(s)\right]=\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_1(s)\right]+\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_2(s)\right]$$

Dowód:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_1(s)+\Phi_2(s)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega}\left[\Phi_1(s)+\Phi_2(s)\right]e^{st}\,\mathrm{d}s=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega}\Phi_1(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega}\Phi_2(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s=$$

$$=\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_1(s)\right]+\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_2(s)\right]$$

Przekształcenie Laplace'a

Własność 3:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[c_1\Phi_1(s)+c_2\Phi_2(s)\right]=c_1\,\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_1(s)\right]+c_2\,\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_2(s)\right]$$

gdzie $c_1,\, c_2$ - dowolne stałe.

Dowód:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[c_1\Phi_1(s)+c_2\Phi_2(s)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega}\left[c_1\Phi_1(s)+c_2\Phi_2(s)\right]e^{st}\,\mathrm{d}s=$$

$$=\frac{c_1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega}\Phi_1(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s+\frac{c_2}{2\pi i}\int_{\lambda-i\omega}^{\lambda+i\omega}\Phi_2(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s=$$

$$=c_1\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_1(s)\right]+c_2\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_2(s)\right]$$

Definicja:

Splotem dwóch funkcji $f_1(t)$ oraz $f_2(t)$ całkowalnych w przedziale $\langle 0,\ a \rangle$ nazywamy funkcję zmiennej t określoną całką

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \qquad 0 \le t \le a.$$

Własności:

1. Splot jest operacją przemienną

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

2. Splot jest operacją łączną

$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]*f_3(t)=f_1(t)*\left[f_2(t)*f_3(t)\right]$$

3. Splot jest operacją rozdzielną względem dodawania

$$\left[f_1(t)+f_2(t)\right]*f_3(t)=f_1(t)*f_3(t)+f_2(t)*f_3(t)$$

Twierdzenie 2 (Borela o mnożeniu transformat):

Iloczyn transformaty Laplace’a z oryginału $f_1(t)$ przez transformatę z oryginału $f_2(t)$ równa się transformacie Laplace’a ze splotu tych oryginałów

$$\mathrm{L}\left[f_1(t)\right]\mathrm{L}\left[f_2(t)\right]=\mathrm{L}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]$$

Wzór Borela (o splocie):

Odwrotne przekształcenie Laplace'a z iloczynu dwóch transformat $\Phi_1(s)$ i $\Phi_2(s)$ jest równe splotowi $f_1(t) * f_2(t)$ ich oryginałów

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_1(s)\,\Phi_2(s)\right] = \mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_1(s)\right] * \mathrm{L}^{-1}\left[\Phi_2(s)\right]$$