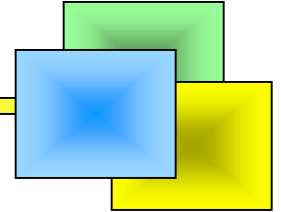


Wykład 6

fragmenty



Zastosowania przekształceń Laplace'a

1. Równania różniczkowe liniowe

Dane jest równanie różniczkowe liniowe rzędu n o stałych współczynnikach:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$$

Zakładamy, że $a_0 \neq 0$ oraz funkcja $f(t)$ i szukane rozwiązanie $y(t)$ wraz ze wszystkimi pochodnymi są oryginałami.

Przekształcenie Laplace'a

Szukamy takiego rozwiązania równania, aby spełniało one warunki początkowe (WP):

$$y(0) = b_0, y'(0) = b_1, y''(0) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}.$$

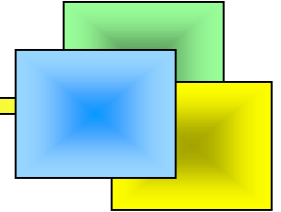
Przykład 1

Rozwiązać równanie

$$y'(t) + 3y(t) = 5t^2 + 2t + 4$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$

Przekształcenie Laplace'a



Rozwiązanie:

Stosujemy transformatę Laplace'a do obu stron równania:

$$L[y'(t) + 3y(t)] = L(5t^2 + 2t + 4)$$

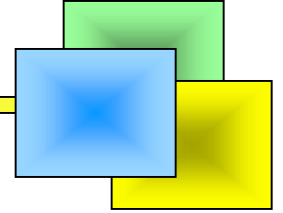
$$L[y'(t)] + 3L[y(t)] = 5L(t^2) + 2L(t) + 4L(1)$$

Odczytujemy z tablic uwzględniając WP:

$$L[y'(t)] = sL[y(t)] - y(0) = sL[y(t)] - 1$$

$$L(t^2) = \frac{2}{s^3} \quad L(t) = \frac{1}{s^2} \quad L(1) = \frac{1}{s}$$

Przekształcenie Laplace'a



Wstawiamy do równania wyjściowego:

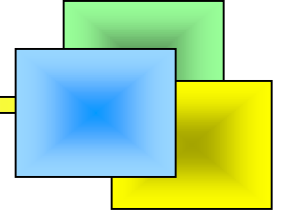
$$sL[y(t)] + 3L[y(t)] - 1 = \frac{10}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s}$$

Rozwiązujemy równanie, w którym niewiadomą jest $L[y(t)]$:

$$(s + 3)L[y(t)] = 1 + \frac{10}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s}$$

$$L[y(t)] = \frac{s^3 + 4s^2 + 2s + 10}{(s + 3)s^3}$$

Przekształcenie Laplace'a



Rozkładamy prawą stronę równania na ułamki proste

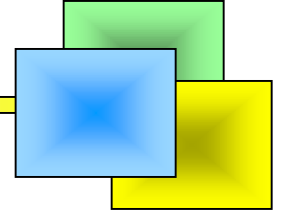
$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s^3}$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = -\frac{13}{27} \frac{1}{s+3} + \frac{40}{27} \frac{1}{s} - \frac{4}{9} \frac{1}{s^2} + \frac{10}{3} \frac{1}{s^3}$$

Wykorzystujemy transformatę odwrotną

$$y(t) = -\frac{13}{27} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) + \frac{40}{27} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{4}{9} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{10}{3} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)$$

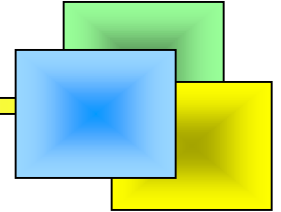
Przekształcenie Laplace'a



Czyli

$$y(t) = -\frac{13}{27}e^{-3t} + \frac{40}{27} - \frac{4}{9}t + \frac{5}{3}t^2$$





2. Układy równań różniczkowych liniowych

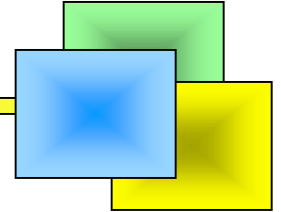
Przykład 1

Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y' + y - z = e^t \\ z' + 3y - 2z = 2e^t \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $y(0) = 1, \quad z(0) = 1$

Przekształcenie Laplace'a



Rozwiązanie:

Stosujemy transformatę Laplace'a do obu stron równania:

$$\begin{cases} \mathbf{L}(y') + \mathbf{L}(y) - \mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(e^t) \\ \mathbf{L}(z') + 3\mathbf{L}(y) - 2\mathbf{L}(z) = 2\mathbf{L}(e^t) \end{cases}$$

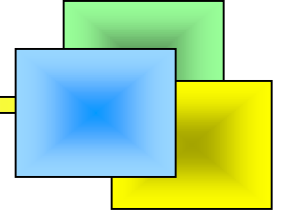
Odczytujemy z tablic

$$\mathbf{L}[y'] = s\mathbf{L}(y) - y(0) = s\mathbf{L}(y) - 1$$

$$\mathbf{L}[z'] = s\mathbf{L}(z) - z(0) = s\mathbf{L}(z) - 1$$

$$\mathbf{L}(e^t) = \frac{1}{s-1}$$

Przekształcenie Laplace'a



Wstawiamy do układu:

$$\begin{cases} (s+1)L(y) - L(z) = \frac{1}{s-1} + 1 \\ 3L(y) + (s-2)L(z) = \frac{2}{s-1} + 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ względem niewiadomych $L(y)$ i $L(z)$

$$\begin{cases} (s+1)L(y) - L(z) = \frac{s}{s-1} \\ 3L(y) + (s-2)L(z) = \frac{s+1}{s-1} \end{cases}$$

Przekształcenie Laplace'a

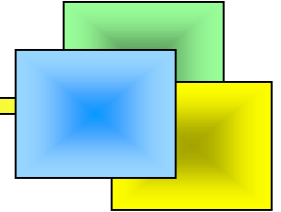
Wyznaczamy niewiadome np. metodą wyznaczników:

$$W = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s-2 \end{vmatrix} = s^2 - s + 1$$

$$W_{L(y)} = \begin{vmatrix} \frac{s}{s-1} & -1 \\ \frac{s+1}{s-1} & s-2 \end{vmatrix} = \frac{s^2 - s + 1}{s-1}$$

$$W_{L(z)} = \begin{vmatrix} s+1 & \frac{s}{s-1} \\ 3 & \frac{s+1}{s-1} \end{vmatrix} = \frac{s^2 - s + 1}{s-1}$$

Przekształcenie Laplace'a



Otrzymujemy

$$L(y) = \frac{W_{L(y)}}{W} = \frac{1}{s-1}$$

$$L(z) = \frac{W_{L(z)}}{W} = \frac{1}{s-1}$$

Wykorzystujemy transformatę odwrotną

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = e^t$$

$$z = L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = e^t$$
