Wykład 6

fragmenty

Zastosowania przekształceń Laplace'a

1. Równania różniczkowe liniowe

Dane jest równanie różniczkowe liniowe rzędu n o stałych współczynnikach:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$$

Zakładamy, że $a_0 \neq 0$ oraz funkcja $f(t)$ i szukane rozwiązanie $y(t)$ wraz ze wszystkimi pochodnymi są oryginałami.

Przekształcenie Laplace'a

Szukamy takiego rozwiązania równania, aby spełniało one warunki początkowe (WP):

$$y(0) = b_0,\ y'(0) = b_1,\ y''(0) = b_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}.$$

Przykład 1

Rozwiązać równanie

$$y'(t) + 3y(t) = 5t^2 + 2t + 4$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$

Przekształcenie Laplace'a

Rozwiązanie:

Stosujemy transformatę Laplace'a do obu stron równania:

$$\mathrm{L}\left[y'(t)+3y(t)\right]=\mathrm{L}\left(5t^2+2t+4\right)$$

$$\mathrm{L}\left[y'(t)\right]+3\mathrm{L}\left[y(t)\right]=5\mathrm{L}\left(\mathrm{t}^2\right)+2\mathrm{L}\left(\mathrm{t}\right)+4\mathrm{L}\left(1\right)$$

Odczytujemy z tablic uwzględniając WP:

$$\mathrm{L}\left[y'(t)\right]=s\,\mathrm{L}\left[y(t)\right]-y(0)=s\,\mathrm{L}\left[y(t)\right]-1$$

$$\mathrm{L}\left(\mathrm{t}^2\right)=\frac{2}{\mathrm{s}^3} \qquad \mathrm{L}\left(\mathrm{t}\right)=\frac{1}{\mathrm{s}^2} \qquad \mathrm{L}\left(1\right)=\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Przekształcenie Laplace'a

Wstawiamy do równania wyjściowego:

$$s\,\mathrm{L}\left[y(t)\right]+3\mathrm{L}\left[y(t)\right]-1=\frac{10}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s}$$

Rozwiązujemy równanie, w którym niewiadomą jest $\mathrm{L}\left[y(t)\right]$:

$$(s+3)\mathrm{L}\left[y(t)\right]=1+\frac{10}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s}$$

$$\mathrm{L}\left[y(t)\right]=\frac{s^3+4s^2+2s+10}{(s+3)s^3}$$

Przekształcenie Laplace'a

Rozkładamy prawą stronę równania na ułamki proste

$$\mathrm{L}\left[y(t)\right] = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s^3}$$

$$\mathrm{L}\left[y(t)\right] = -\frac{13}{27}\frac{1}{s+3} + \frac{40}{27}\frac{1}{s} - \frac{4}{9}\frac{1}{s^2} + \frac{10}{3}\frac{1}{s^3}$$

Wykorzystujemy transformatę odwrotną

$$y(t) = -\frac{13}{27}\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) + \frac{40}{27}\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) -$$

$$-\frac{4}{9}\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{10}{3}\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)$$

Przekształcenie Laplace'a

Czyli

$$y(t) = -\frac{13}{27}e^{-3t} + \frac{40}{27} - \frac{4}{9}t + \frac{5}{3}t^2$$

2. Układy równań różniczkowych liniowych

Przykład 1

Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y' + y - z = e^t \\ z' + 3y - 2z = 2e^t \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $y(0) = 1, \quad z(0) = 1$

Przekształcenie Laplace'a

Rozwiązanie:

Stosujemy transformatę Laplace'a do obu stron równania:

$$\begin{cases} \mathrm{L}(y') + \mathrm{L}(y) - \mathrm{L}(z) = \mathrm{L}\left(e^{t}\right) \\ \mathrm{L}(z') + 3\mathrm{L}(y) - 2\mathrm{L}(z) = 2\mathrm{L}\left(e^{t}\right) \end{cases}$$

Odczytujemy z tablic

$$\mathrm{L}\left[y'\right] = s\mathrm{L}(y) - y(0) = s\mathrm{L}(y) - 1$$

$$\mathrm{L}\left[z'\right] = s\,\mathrm{L}(z) - z(0) = s\mathrm{L}(z) - 1$$

$$\mathrm{L}\left(\mathrm{e}^{t}\right) = \frac{1}{s-1}$$

Przekształcenie Laplace'a

Wstawiamy do układu:

$$\begin{cases}(s+1)L\left(y\right)-L\left(z\right)=\dfrac{1}{s-1}+1\\[2ex] 3L\left(y\right)+(s-2)L\left(z\right)=\dfrac{2}{s-1}+1\end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ względem niewiadomych $L(y)$ i $L(z)$

$$\begin{cases}(s+1)L\left(y\right)-L\left(z\right)=\dfrac{s}{s-1}\\[2ex] 3L\left(y\right)+(s-2)L\left(z\right)=\dfrac{s+1}{s-1}\end{cases}$$

Przekształcenie Laplace'a

Wyznaczamy niewiadome np. metodą wyznaczników:

$$W = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s-2 \end{vmatrix} = s^2 - s + 1$$

$$W_{\mathrm{L}(y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{s}{s-1} & -1 \\ \dfrac{s+1}{s-1} & s-2 \end{vmatrix} = \frac{s^2 - s + 1}{s-1}$$

$$W_{\mathrm{L}(z)} = \begin{vmatrix} s+1 & \dfrac{s}{s-1} \\ 3 & \dfrac{s+1}{s-1} \end{vmatrix} = \frac{s^2 - s + 1}{s-1}$$

Przekształcenie Laplace'a

Otrzymujemy

$$\mathrm{L}(y)=\frac{W_{\mathrm{L}(y)}}{W}=\frac{1}{s-1}$$

$$\mathrm{L}(z)=\frac{W_{\mathrm{L}(z)}}{W}=\frac{1}{s-1}$$

Wykorzystujemy transformatę odwrotną

$$\mathrm{y=L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=e^{t}$$

$$\mathrm{z=L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=e^{t}$$