Wykład 7

Szeregi Fouriera

Definicja:

Mówimy, że ciąg funkcji $\{X_n(x)\}$ całkowalnych z kwadratem w przedziale $[a, b]$ jest ciągiem ortogonalnym, jeżeli

$$\int_a^b X_n(x) X_m(x)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m, \\ A > 0 & \text{dla } n = m. \end{cases}$$

Zadanie :

Sprawdzić, że ciąg funkcji

$$\{1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \dots\ \}$$

Jest ciągiem ortogonalnym w $[-\pi, \pi]$.

Szeregi Fouriera

Rozwiązanie:

Należy sprawdzić (zakładając $n \neq m$)

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x = 0$

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x = 0$

4) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x = 0$

5) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, \mathrm{d}x = 0$

6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = A > 0$

7) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, \mathrm{d}x = A > 0$

8) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = A > 0$

Szeregi Fouriera

Zadanie 1 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} u = nx \\ \mathrm{d}u = n \, \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \frac{1}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin u \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{n} \left[\cos u \right]_{-n\pi}^{n\pi} =$$

$$= -\frac{1}{n} \left[\cos n\pi - \cos n\pi \right] = 0$$

Zadanie 2 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} u = nx \\ \mathrm{d}u = n \, \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \frac{1}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n} \left[\sin u \right]_{-n\pi}^{n\pi} = 0$$

Szeregi Fouriera

Wzory

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Po odjęciu stronami

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

Zadanie 3 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} u_1 = (n+m)x & u_2 = (n-m)x \\ \mathrm{d}u_1 = (n+m)\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}u_2 = (n-m)\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2(n-m)}\int_{-(n-m)\pi}^{(n-m)\pi} \cos u_2 \,\mathrm{d}u_2 - \frac{1}{2(n+m)}\int_{-(n+m)\pi}^{(n+m)\pi} \cos u_1 \,\mathrm{d}u_1 =$$

$$= \frac{1}{n-m}\sin(n-m)\pi - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)\pi = 0$$

Szeregi Fouriera

Wzory

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Po dodaniu stronami

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

Zadanie 4 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos mx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} u_1 = (n+m)x & u_2 = (n-m)x \\ \mathrm{d}u_1 = (n+m)\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}u_2 = (n-m)\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2(n+m)} \int_{-(n+m)\pi}^{(n+m)\pi} \cos u_1 \, \mathrm{d}u_1 + \frac{1}{2(n-m)} \int_{-(n-m)\pi}^{(n-m)\pi} \cos u_2 \, \mathrm{d}u_2 =$$

$$= \frac{1}{n+m} \sin(n+m)\pi - \frac{1}{n-m} \sin(n-m)\pi = 0$$

Szeregi Fouriera

Wzory

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Po dodaniu stronami

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

Zadanie 5 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} u_1 = (n+m)x & u_2 = (n-m)x \\ \mathrm{d}u_1 = (n+m)\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}u_2 = (n-m)\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2(n+m)} \int_{-(n+m)\pi}^{(n+m)\pi} \sin u_1 \,\mathrm{d}u_1 + \frac{1}{2(n-m)} \int_{-(n-m)\pi}^{(n-m)\pi} \sin u_2 \,\mathrm{d}u_2 =$$

$$= \frac{1}{2(n+m)} \left[\cos u_1\right]_{-(n+m)\pi}^{(n+m)\pi} + \frac{1}{2(n-m)} \left[\cos u_2\right]_{-(n+m)\pi}^{(n+m)\pi} = 0$$

Szeregi Fouriera

Wzory

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$

Zadanie 6 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} u = 2nx \\ \mathrm{d}u = 2n\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{-2n\pi}^{2n\pi} \cos u \, \mathrm{d}x = \pi - \frac{1}{2}\left[\sin u\right]_{-2n\pi}^{2n\pi} = \pi - 0 = \pi$$

Zadanie 7 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} u = 2nx \\ \mathrm{d}u = 2n\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-2n\pi}^{2n\pi} \cos u\,\mathrm{d}x = \pi + \frac{1}{2}\left[\sin u\right]_{-2n\pi}^{2n\pi} = \pi + 0 = \pi$$

Sprawdziliśmy, że dany ciąg jest ortogonalny w przedziale $[-\pi, \pi]$, przy czym $A = \pi$.

Rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera

Definicja:

Niech $f(x)$ będzie funkcją o okresie 2π mającą w przedziale $[-\pi, \pi]$ co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości i całkowalną w tym przedziale.
Szeregiem Fouriera tej funkcji nazywamy szereg:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie a_0, a_n, b_n – współczynniki.

Szeregi Fouriera

Czyli

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

Wyznaczanie współczynników

Wiemy, że ciąg $\{1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots\}$ jest ciągiem ortogonalnym w przedziale $[-\pi, \pi]$. Obie strony wzoru na szereg Fouriera całkujemy od $-\pi$ do π.

Szeregi Fouriera

Otrzymujemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x}_{0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x}_{0} \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\left[x\right]_{-\pi}^{\pi} = a_0\,\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Szeregi Fouriera

Obie strony równania wyjściowego mnożymy przez $\cos mx$ i całkujemy od $-\pi$ do π. Wówczas otrzymujemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x}_{0} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,\mathrm{d}x}_{\pi \;\; dla \;\; n=m} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,\mathrm{d}x}_{0} \right)$$

Szeregi Fouriera

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m x \, f(x) \, \mathrm{d} x = a_m \pi$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos m x \, \mathrm{d} x$$

Obie strony równania wyjściowego mnożymy przez $\sin m x$ i całkujemy od $-\pi$ do π :

Szeregi Fouriera

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\mathrm{d}x}_{0} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,\mathrm{d}x}_{0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,\mathrm{d}x}_{\pi\ dla\ n=m} \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, f(x)\,\mathrm{d}x = b_m \pi$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\,\mathrm{d}x$$

Szereg Fouriera

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x$$

Szeregi Fouriera

Jeżeli $f(x)$ jest **funkcją nieparzystą**:

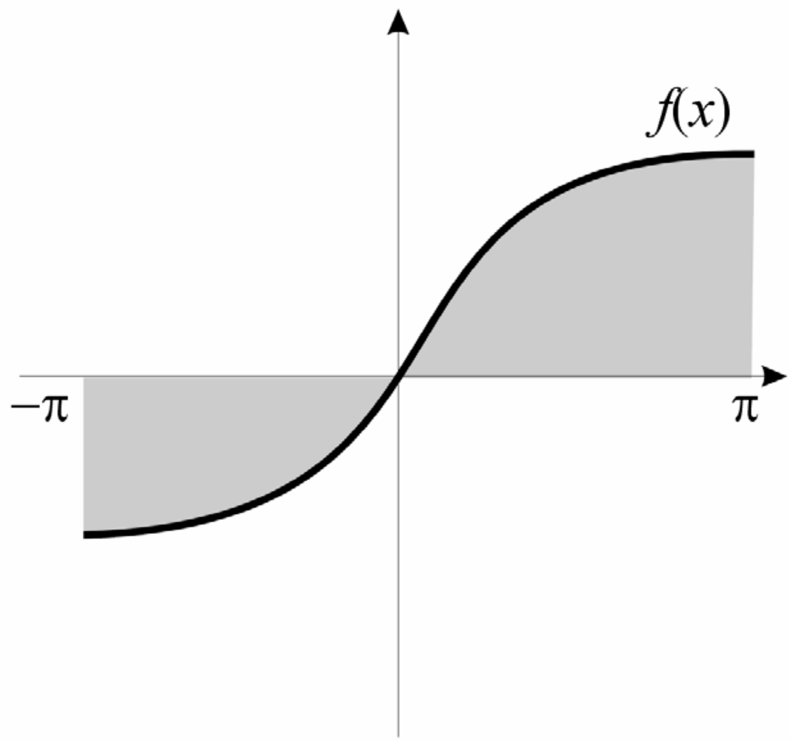
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

Szeregi Fouriera



Szeregi Fouriera

Jeżeli $f(x)$ jest **funkcją parzystą**:

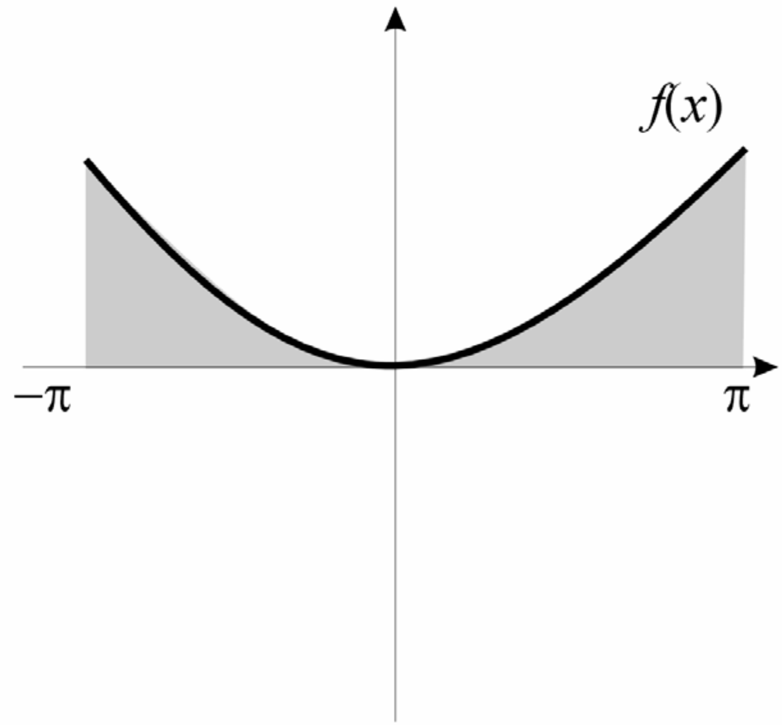
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\,x\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos n\,x\,\mathrm{d}\,x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\,x\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin n\,x\,\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin n\,x\,\mathrm{d}\,x\right] = 0$$

Szeregi Fouriera



Szeregi Fouriera

$f(x)$ jest funkcją nieparzystą

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x$$

Szeregi Fouriera

$f(x)$ jest funkcją parzystą

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = 0$$

Rozwinięcie funkcji o okresie 2L w szereg Fouriera

Definicja:

Niech $f(x)$ będzie funkcją o okresie $2L$ mającą w przedziale $[-L, L]$ co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości i całkowalną w tym przedziale.
Szeregiem Fouriera tej funkcji nazywamy szereg:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

gdzie a_0, a_n, b_n – współczynniki.

Szeregi Fouriera

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}\,x$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}\,x$$

$f(x)$ jest funkcją nieparzystą

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

Szeregi Fouriera

$f(x)$ jest funkcją parzystą

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = 0$$