Wykład 1

Tematyka wykładów:

1. Liczby zespolone
   - wprowadzenie,
   - funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej,
   - funkcja zespolona zmiennej zespolonej.
2. Przekształcenie Laplace'a
   - przekształcenie Laplace'a i jego podstawowe własności,
   - wyznaczanie obszaru (transformaty Laplace'a) gdy znany jest oryginał,
   - przekształcenie odwrotne względem przekształcenia Laplace'a i jego własności,

Przekształcenia całkowe

- wyznaczanie oryginału gdy znana jest transformata Laplace'a (metoda rozkładu na ułamki proste, metoda splotu),
- wyznaczanie rozwiązania równań różniczkowych rzędu n oraz układów równań różniczkowych liniowych przy danych warunkach początkowych,
- równania całkowe (układy) typu splotu.

3. Szeregi Fouriera
   - wprowadzenie,
   - rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera.

Literatura:

1. Kącki E., Siewierski L. „Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami” Warszawa 1975.
2. Kącki E. „Równania rócznikowe cząstkowe w elektrotechnice” Warszawa 1971.
3. Ditkin W.A., Prudnikow A.P. „ Przekształcenia całkowe i rachunek operatorowy” Warszawa 1964.

1. Wprowadzenie

Liczbą zespoloną nazywamy liczbę postaci:

$$z = a + bi$$

gdzie:
a - część *rzeczywista* (realis – Re) liczby zespolonej,
b – część *urojona* (imaginarius – Im) liczby zespolonej,
i – *jednostka urojona*.

np.: $z = 2 + 2i, \quad z = -3 - i, \quad z = i.$

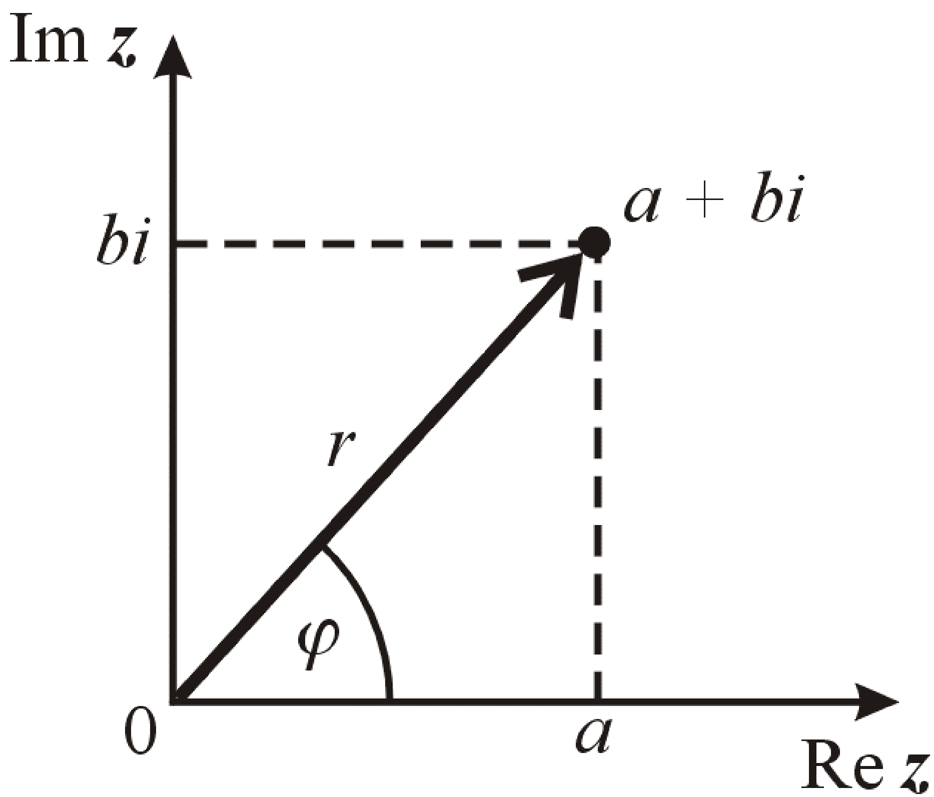
Liczby zespolone

Postać liczby $z = a + bi$ nazywamy postacią *algebraiczną* lub *kanoniczną*.
Podstawowa własność jednostki urojonej:

$$i^2 = -1 \qquad \sqrt{-1} = i$$

Interpretacją geometryczną liczby zespolonej jest *punkt* na płaszczyźnie zespolonej, którego odcięta równa jest wartości części rzeczywistej liczby zespolonej, a rzędna – części urojonej tejże liczby.

Liczby zespolone



Liczby zespolone

Położenie punktu (a, b) jest również wyznaczone przez długość r promienia wodzącego punktu (a, b) i kąt φ jaki ten promień tworzy z osią odciętych.

Wartością bezwzględną (*modułem*) liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy następującą liczbę:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

np.

$$z = 2 + 2i \rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

Liczby zespolone

Własności wartości bezwzględnej liczby zespolonej

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Liczbę sprzężoną $\overline{z}$ do liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę:

$$\overline{z} = a - bi$$

np. $z = 2 + 2i \rightarrow \overline{z} = 2 - 2i,\; z = -3 - i \rightarrow \overline{z} = -3 + i$

Liczby zespolone

Własności sprzężenia liczb zespolonych:

$$\left|\overline{z}\right| = |z|$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$$

2. Działania algebraiczne na liczbach zespolonych

Dla liczb zespolonych w postaci kanonicznej działania wykonujemy tak, jak na wielomianach W(i) nad ciałem liczb rzeczywistych , zatem zakładając istnienie dwóch liczb zespolonych $z_1 = a + bi$ oraz $z_2 = c + di$ działania arytmetyczne definiuje się następująco:

Dodawanie:

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$$

np.

$$z_1 = 2+2i, \quad z_2 = -1-3i$$

$$z_1 + z_2 = (2+2i)+(-1-3i) = 2-1+(2-3)i = 1-i$$

Liczby zespolone

Odejmowanie:

$$\left(a+bi\right)-\left(c+di\right)=a-c+\left(b-d\right)i$$

np. $z_1-z_2=\left(2+2i\right)-\left(-1-3i\right)=2+1+\left(2+3\right)i=3-5i$

Mnożenie:

$$\left(a+bi\right)\cdot\left(c+di\right)=ac+ad\,i+bc\,i+bd\,i^2=$$
$$=ac+\left(ad+bc\right)i+bd\cdot\left(-1\right)=ac-bd+\left(ad+bc\right)i$$

Liczby zespolone

np. $z_1 \cdot z_2 = (2+2i)\cdot(-1-3i) = -2+6+(-6-2)i = 4-8i$

Dzielenie:

Przy dzieleniu musimy wyrugować urojoność z mianownika poprzez pomnożenie licznika i mianownika przez liczbę sprzężoną z mianownikiem.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)}{(c+di)}\cdot\frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}, \; c+di \neq 0$$

Liczby zespolone

np. $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+2i}{-1-3i}=\frac{2+2i}{-1-3i}\cdot\frac{-1+3i}{-1+3i}=\frac{-2-6+\left(-2+6\right)i}{\left(-1\right)^2+\left(-3\right)^2}=$$

$$=\frac{-8+4i}{10}=-\frac{8}{10}+\frac{4}{10}i$$

3. Postaci liczb zespolonych

Postać algebraiczna liczby zespolonej:

$$z = a + bi$$

$$a = \operatorname{Re} z \quad b = \operatorname{Im} z$$

np. $z = 2 - 3i$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{lub} \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Liczby zespolone

gdzie:

$|z|$ - moduł z liczby zespolonej (długość promienia wodzącego),

φ - kąt pomiędzy osią biegunową a promieniem wodzącym (argument liczby zespolonej).

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Przykład 1

Przedstaw w postaci trygonometrycznej liczbę zespoloną

$$z = 1 + i.$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Liczby zespolone

<u>Postać wykładnicza</u> liczby zespolonej:

$$z = |z| e^{\varphi i} \qquad \text{lub} \qquad z = r \cdot e^{\varphi i}$$

Przykład 2

Przedstaw w postaci wykładniczej liczbę zespoloną

$z = 1 + i\sqrt{3}.$

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Liczby zespolone

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{2}\\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

4. Wzory Moivre'a

Wzory Moivre'a opisują mnożenie , dzielenie i potęgowanie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.
Zakładając istnienie dwóch liczb zespolonych
$z_1 = r\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$ oraz $z_2 = R\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$
odpowiednie działania algebraiczne definiuje się następująco:

Mnożenie:

$$r\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\cdot R\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) =$$
$$= rR\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right]$$

Liczby zespolone

Dzielenie:

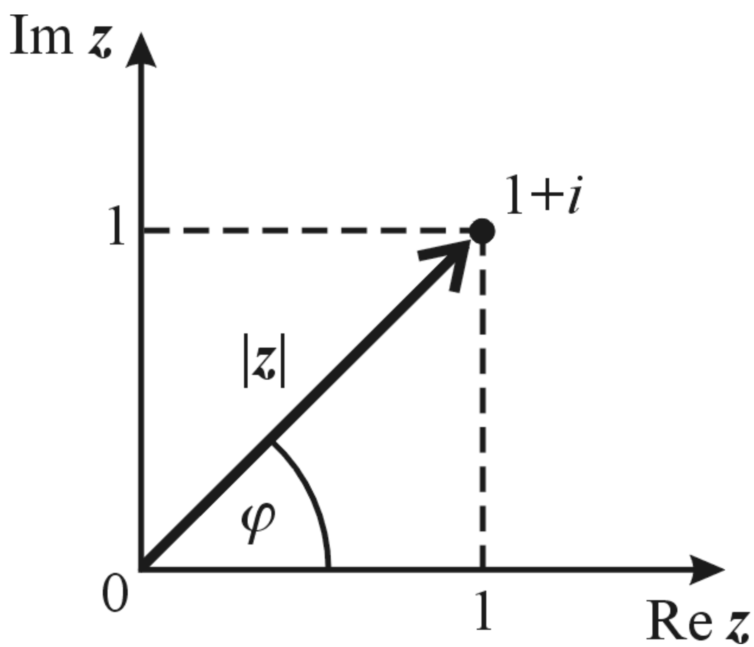
$$\frac{r\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{R\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{r}{R}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$$

Potęgowanie:

$$\left[r\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\right]^n = r^n\left(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1\right)$$

Przykład 3

Obliczyć $(1+i)^{10}$ korzystając ze wzorów Moivre'a



Liczby zespolone

$$z = 1 + i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z^{10} = \left[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{10} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10} =$$

Liczby zespolone

$$=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}\cdot\left(\cos\frac{10\cdot\pi}{4}+i\sin\frac{10\cdot\pi}{4}\right)=$$

$$=2^5\left(\cos\frac{5}{2}\pi+i\sin\frac{5}{2}\pi\right)=$$

$$=2^5\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=2^5\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}+i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right)=2^5\cdot i=32i$$

5. Wzory Eulera

Wzory Eulera określają zależność między e^{zi} i $\sin z, \cos z$.

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$

6. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastkiem *n*-tego stopnia z liczby zespolonej *z* nazywamy każdą liczbę zespoloną, której n-ta potęga równa się tejże liczbie zespolonej *z* .

Liczba 0 ma przy dowolnym *n* jeden pierwiastek *n*-tego stopnia równy 0.

Jeżeli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ i $n \in \mathrm{N}$, to istnieje dokładnie *n* różnych pierwiastków *n*–tego stopnia z liczby zespolonej *z*.

Liczby zespolone

Są nimi liczby:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Pierwiastkami n-tego stopnia z jedności są liczby:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Liczby zespolone

Wyciąganie pierwiastka stopnia n, gdzie daje zawsze n różnych wartości.
W interpretacji geometrycznej punkty w_k są wierzchołkami *n*-kąta foremnego mającego środek w punkcie (0,0).

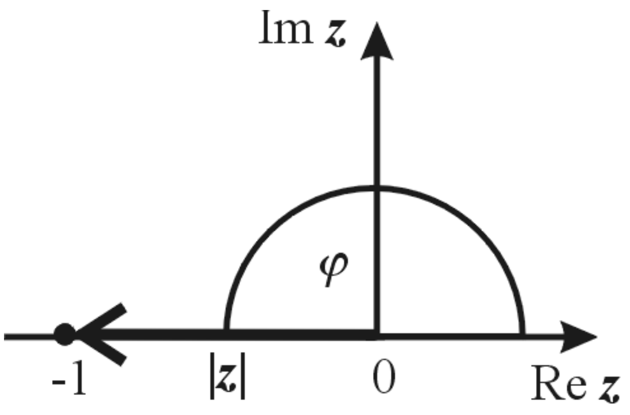
Przykład 4
Wyznaczyć wszystkie pierwiastki zespolone $\sqrt[4]{-1}$ oraz podać ich interpretację geometryczną.

Liczby zespolone

$$z = -1$$

$$|z| = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= -1 \\ \sin\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \varphi = \pi$$



$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad n = 4, \quad k = 0,1,2,3$$

$$w_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Liczby zespolone

$$w_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} =$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} =$$

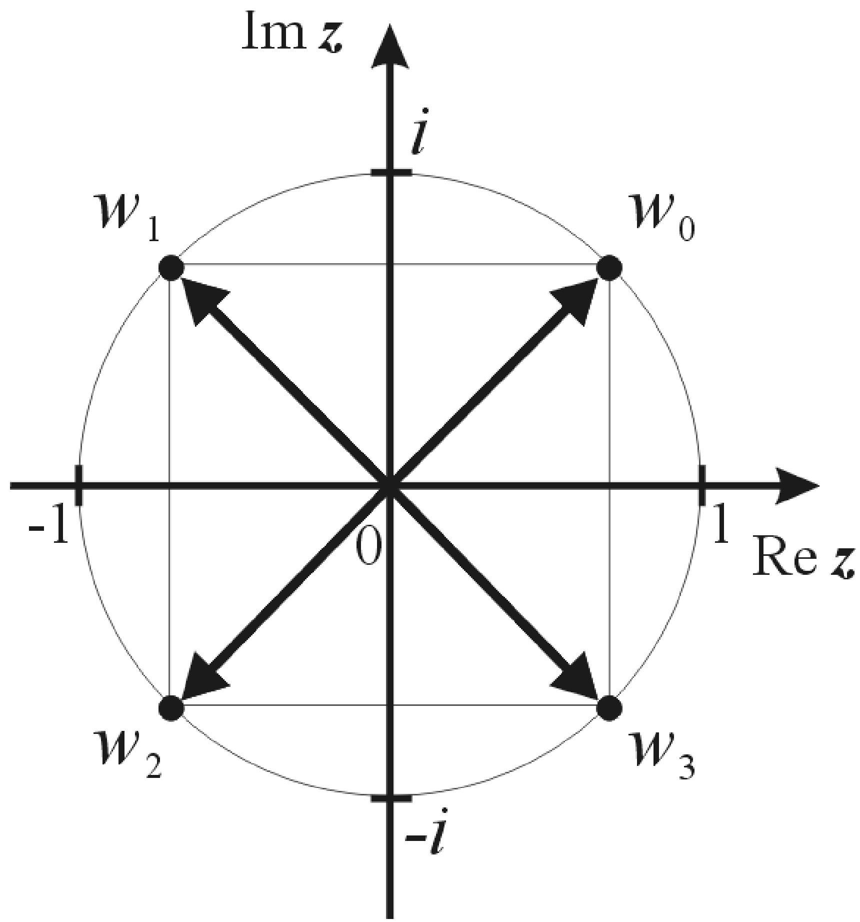
$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Liczby zespolone

$$w_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} =$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Interpretacja geometryczna



Liczby zespolone

Wszystkie pierwiastki zespolone $\sqrt[4]{-1}$ tworzą czworokąt foremny – kwadrat, którego środek znajduje się w punkcie (0,0) na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (tzw. płaszczyźnie Gaussa). Długość boku tego kwadratu wynosi $\sqrt{2}$.
Promień okręgu, w który wpisany jest ten kwadrat równy jest $|z|$ czyli 1.

Dziękuję za uwagę