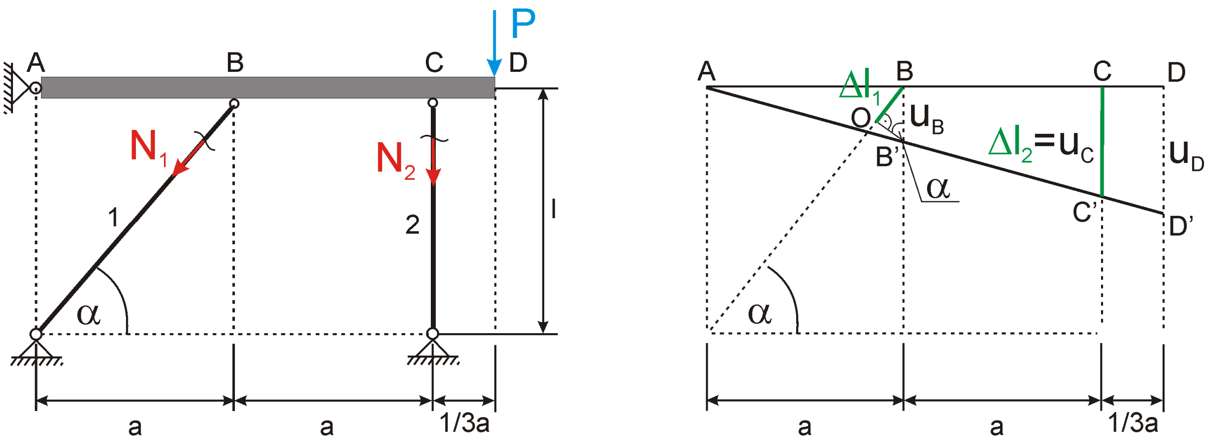
ZADANIE 1

Sztywną belkę ABCD zamocowano przegubowo w punkcie A, podparto za pomocą prętów 1 i 2 odpowiednio w punktach B i C oraz obciążono siłą P jak pokazano na Rys. 1a. Pola przekrojów prętów wynoszą A, a materiał, z którego są wykonane, ma moduł Younga E. Należy wyznaczyć naprężenia w prętach 1 i 2 oraz przemieszczenie punktu D.

DANE: P, l, a, α, A, E

SZUKANE: σ_1, σ_2, u_D



a) b)

Rys. 1.

Aby wyznaczyć naprężenia w prętach 1 i 2 należy obliczyć siły wewnętrzne N_1 i N_2 w tych prętach. Rozpatrujemy równowagę belki, rozcinamy myślowo pręty i zaznaczamy zwroty sił wewnętrznych w prętach jak przedstawiono na Rys. 1a (od przekroju). Wykorzystamy tylko równanie momentów względem punktu A (pozostałe równania równowagi pozwalają obliczyć składowe reakcji w przegubie A po wcześniejszym wyznaczeniu sił N_1 i N_2).

RÓWNANIE RÓWNOWAGI – suma momentów względem punktu A

$$\sum M_{iA} = 0$$

$$N_1 \sin\alpha \cdot a + N_2 \cdot 2a + P \cdot \frac{7}{3} a = 0 \qquad (1)$$

Ponieważ liczba niewiadomych sił i reakcji (4) jest większa niż liczba równań równowagi (3) (układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny), potrzebne jest dodatkowe równanie. Równanie to określa zależności geometryczne po odkształceniu się układu (Rys. 1b). Belka ABCD po zadziałaniu siły P zajmie nowe położenie AB'C'D' (obróci się dokoła punktu A), a każdy punkt belki przemieści się po prostej prostopadłej do osi belki. Koniec B pręta 1 przesunie się wzdłuż osi tego pręta o odcinek BO=Δl_1 (pręt skróci się) (Rys. 1b) oraz przemieści się po prostej prostopadłej do tego odcinka aż do punktu B', do którego przemieści się także punkt B belki ABCD (u_B). Koniec C pręta 2 (pręt skróci się) oraz ten sam punkt C belki przemieszczą się po prostej prostopadłej do osi belki i zajmą nowe położenie C' ($\Delta l_2 = u_C$). Zgodnie z Rys. 1b warunek geometryczny ma postać:

WARUNEK GEOMETRYCZNY

$$\frac{u_B}{a} = \frac{u_C}{2a} \qquad (2)$$

czyli

$$u_B = \frac{u_C}{2} \qquad (3)$$

Z trójkąta OBB' otrzymujemy

$$\sin\alpha = \frac{\Delta l_1}{u_B}$$

czyli

$$u_B = \frac{\Delta l_1}{\sin\alpha} \qquad (4)$$

Z Rys. 1b wynika, że

$$u_C = \Delta l_2 \qquad (5)$$

Wstawiając (4) i (5) do (3) otrzymuje się

$$\frac{\Delta l_1}{\sin\alpha} = \frac{\Delta l_2}{2}$$

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{2}\sin\alpha$$

$$2\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \sin\alpha \qquad (6)$$

Kolejnym krokiem jest napisanie związków fizycznych (prawa Hooke'a) dla prętów 1 i 2. Związki te mają następującą postać:

ZWIĄZKI FIZYCZNE

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA}, \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} \tag{7}$$

Z geometrii układu wynika, że:

$$\sin\alpha = \frac{l}{l_1} \tag{8}$$

czyli

$$l_1 = \frac{l}{\sin\alpha} \tag{9}$$

oraz

$$l_2 = l \tag{10}$$

Związki fizyczne (7) przyjmują teraz postać

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA\sin\alpha}, \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA} \tag{11}$$

Wstawiając te związki do równania (6) otrzymuje się

$$2\frac{N_1 l}{EA\sin\alpha} = \frac{N_2 l}{EA}\sin\alpha$$

$$2N_1 = N_2\sin^2\alpha$$

$$N_1 = \frac{N_2\sin^2\alpha}{2} \tag{12}$$

Zależność (12) wstawiamy do równania równowagi (1) i wyznaczamy siłę wewnętrzną w pręcie 2

$$\frac{N_2\sin^2\alpha}{2}\sin\alpha\cdot a + N_2\cdot 2a + P\cdot\frac{7}{3}a = 0 \tag{13}$$

$$N_2 \sin^3 \alpha + 4N_2 = -\frac{14}{3} P$$

$$N_2 \left(\sin^3 \alpha + 4 \right) = -\frac{14}{3} P$$

$$N_2 = -\frac{14}{3\left(\sin^3 \alpha + 4 \right)} P \qquad (14)$$

Siłę normalną pręcie 1 obliczamy wykorzystując zależność (12)

$$N_1 = -\frac{7 \sin^2 \alpha}{3\left(\sin^3 \alpha + 4 \right)} P \qquad (15)$$

Mając obliczone siły wewnętrzne można wyznaczyć naprężenia w prętach

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = -\frac{7 \sin^2 \alpha}{3\left(\sin^3 \alpha + 4 \right)} \frac{P}{A} \quad \text{(ściskanie)} \qquad (16)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = -\frac{14}{3\left(\sin^3 \alpha + 4 \right)} \frac{P}{A} \quad \text{(ściskanie)} \qquad (17)$$

Przemieszczenie punktu D można wyznaczyć korzystając z następującego warunku geometrycznego

$$\frac{u_D}{\frac{7}{3} a} = \frac{u_C}{2a} \qquad (18)$$

$$u_D = \frac{7}{3} a \frac{u_C}{2a} = \frac{7}{6} u_C = \frac{7}{6} \Delta l_2$$

$$u_D = \frac{7}{6} \frac{N_2 l}{EA} = \frac{7l}{6EA} \left[-\frac{14}{3\left(\sin^3 \alpha + 4 \right)} P \right] = -\frac{49Pl}{9EA\left(\sin^3 \alpha + 4 \right)}$$