PRZYBLIŻONE METODY ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ

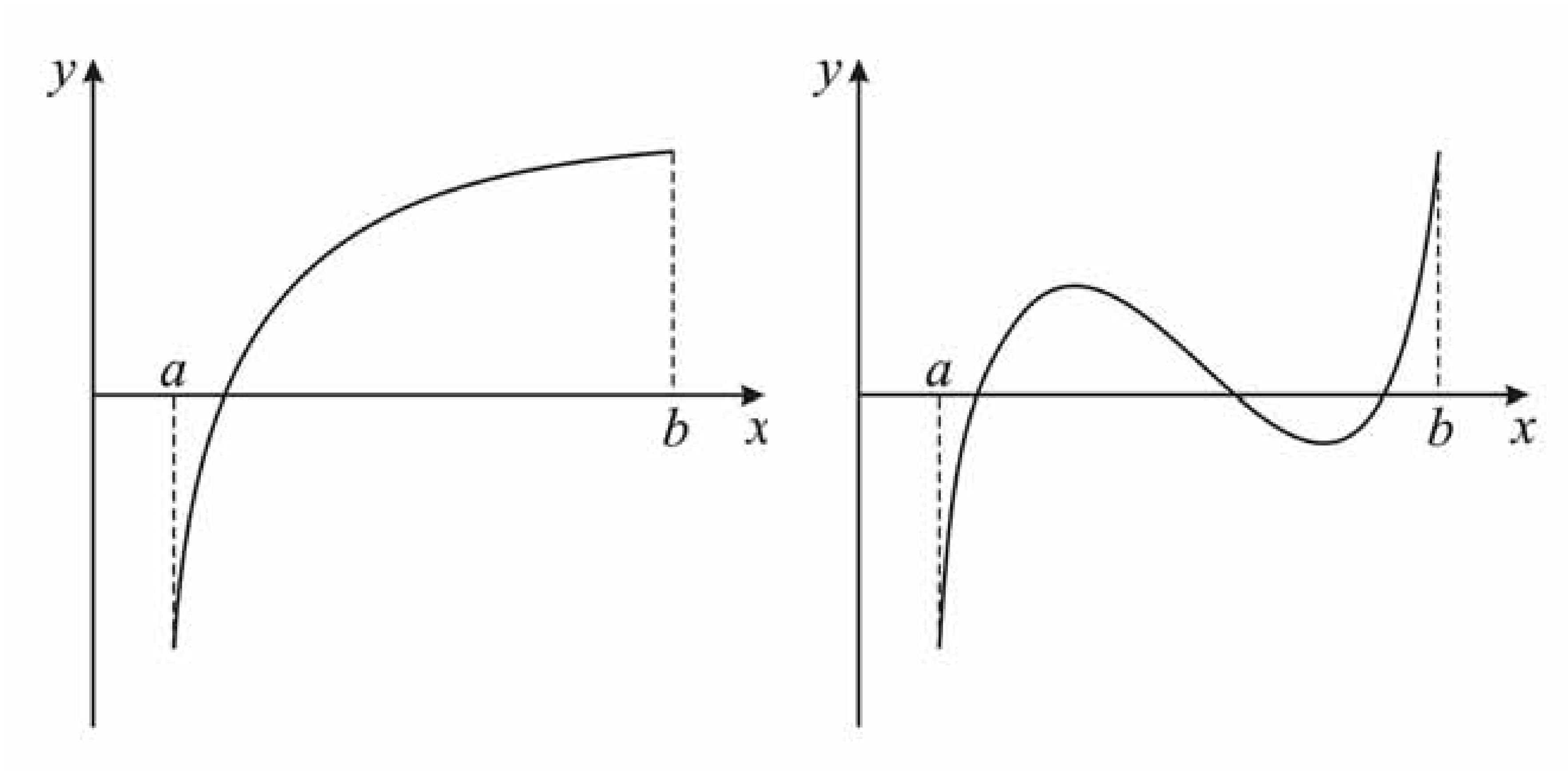
Metody kolejnych przybliżeń

Twierdzenie 1. (Bolzano – Cauchy'ego)

Jeżeli funkcja $F(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$ i $F(a)\cdot F(b) < 0$, to między punktami a i b znajduje się co najmniej jeden pierwiastek równania $F(x) = 0$.

Twierdzenie 2.

Jeżeli w przedziale $[a, b]$ spełnione są założenia twierdzenia 1. i dodatkowo $\operatorname{sgn} F'(x) = \mathrm{const}$ dla $x \in [a,b]$, to przedział ten jest przedziałem izolacji pierwiastka równania $F(x) = 0$.



Przebieg funkcji między punktami a i b

Przykład

Sprawdzić czy podany przedział jest przedziałem izolacji jednego pierwiastka równania $F(x) = 0$.

$$F(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$$

$$[a,b] = [1,2]$$

$$F(a) = F(1) \quad = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 \qquad = 1$$

$$F(b) = F(2) \quad = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 \quad = -3$$

Ponieważ: $F(1) \cdot F(2) < 0$

to wiadomo, że pomiędzy punktami a i b znajduje się co najmniej jeden pierwiastek równania $F(x) = 0$.

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}\,F(x)}{\mathrm{d}\,x} \quad = 3x^2 - 6x - 2$$

$$F'(a) = F'(1) \quad = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 2 \quad = -5$$

$$F'(b) = F'(2) \quad = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 2 \quad = -2$$

Ponieważ: $\operatorname{sgn} F'(x) = \mathrm{const} \quad \text{dla} \quad x \in [a, b]$

czyli funkcja ma stały znak w przedziale $[a,b]$,

to przedział $[a, b]$ jest przedziałem izolacji jednego pierwiastka równania $F(x) = 0$.

Metoda bisekcji

Niech $[a,b]$ będzie przedziałem izolacji pierwiastka równania $F(x) = 0$.

Jako pierwsze dwa wyrazy ciągu przybliżeń przyjmuje się:

$$x_1 = a \quad x_2 = b$$

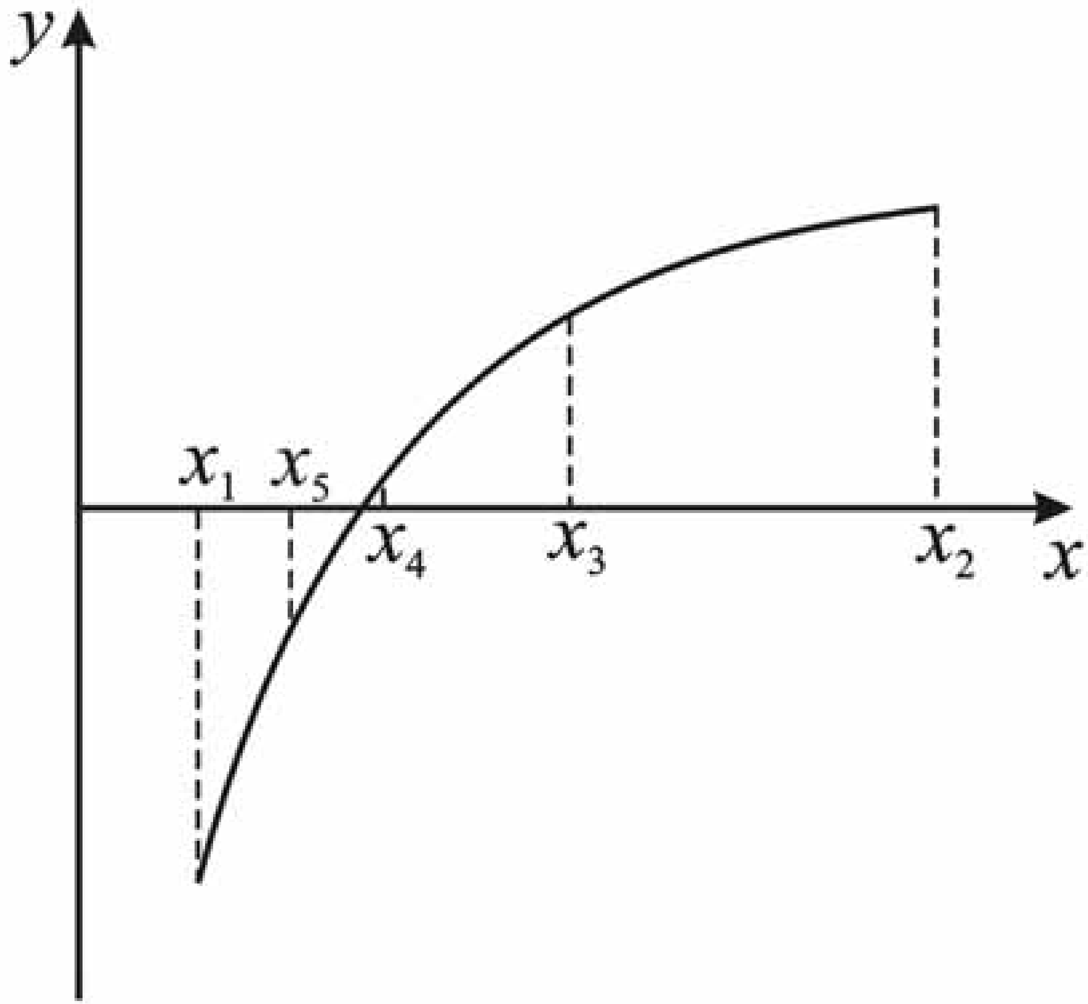
Kolejne przybliżenia wynikają ze wzoru:

$$\boxed{x_i = \frac{x_{i-1} + x_k}{2}, \quad k \in [1,(i-2)], \quad i > 2}$$

k dobierane jest tak, aby:

$$\left| x_i - x_{i-1} \right| \approx \left| x_i - x_k \right|$$

$$F(x_{i-1})F(x_i) < 0$$


y
x
x_1
x_5
x_4
x_3
x_2

Ponieważ kolejne przybliżenia znajdują się każdorazowo w przedziałach izolacji, oraz

$$\left|x_{i+1} - x_i\right| < \left|x_i - x_{i-1}\right|$$

$$\Downarrow$$

Metoda jest zbieżna

Zaleta metody: prostota

Wada metody: wolna zbieżność procesu iteracyjnego

Algorytm

$$x_1 = a$$

$$x_2 = b$$

$$\begin{cases} i = 1, 2, \ldots, m \\ x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = F(x) \\ y_1 = F(x_1) \\ \textbf{jeżeli } y \cdot y_1 > 0 \textbf{ to } x_1 = x \\ \textbf{w przeciwnym wypadku } x_2 = x \end{cases}$$

Przykład

Dla funkcji i przedziału izolacji z poprzedniego przykładu obliczyć metodą bisekcji pierwiastek równania $F(x) = 0$ z dokładnością ε.

$F(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ $\quad [a, b] = [1, 2]$

$$x_1 = a = 1 \quad x_2 = b = 2$$

$$\varepsilon = 0.1$$

$$\Downarrow$$

$$\left|F(x_i)\right| < \varepsilon$$

1. iteracja

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$y = F(x) = F(1.5) \quad = -1.375$$

$$\left|F(x)\right| > \varepsilon$$

$$y_1 = F(x_1) = F(1) \quad = 1$$

$$y \cdot y_1 = -1.375 \quad < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x = 1.5$$

2. iteracja

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1.5$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

$$y = F(x) = F(1.25) = -0.234$$

$$\left| F(x) \right| > \varepsilon$$

$$y_1 = F(x_1) = F(1) = 1$$

$$y \cdot y_1 = -0.234 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x = 1.25$$

3. iteracja

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1.25$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 1.25}{2} = 1.125$$

$$y = F(x) = F(1.125) \quad = 0.376$$

$$\left| F(x) \right| > \varepsilon$$

$$y_1 = F(x_1) = F(1) \quad = 1$$

$$y \cdot y_1 = 0.376 \quad > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x = 1.125$$

4. iteracja

$$x_1 = 1.125 \quad x_2 = 1.25$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad = \frac{1.125 + 1.25}{2} = 1.1875$$

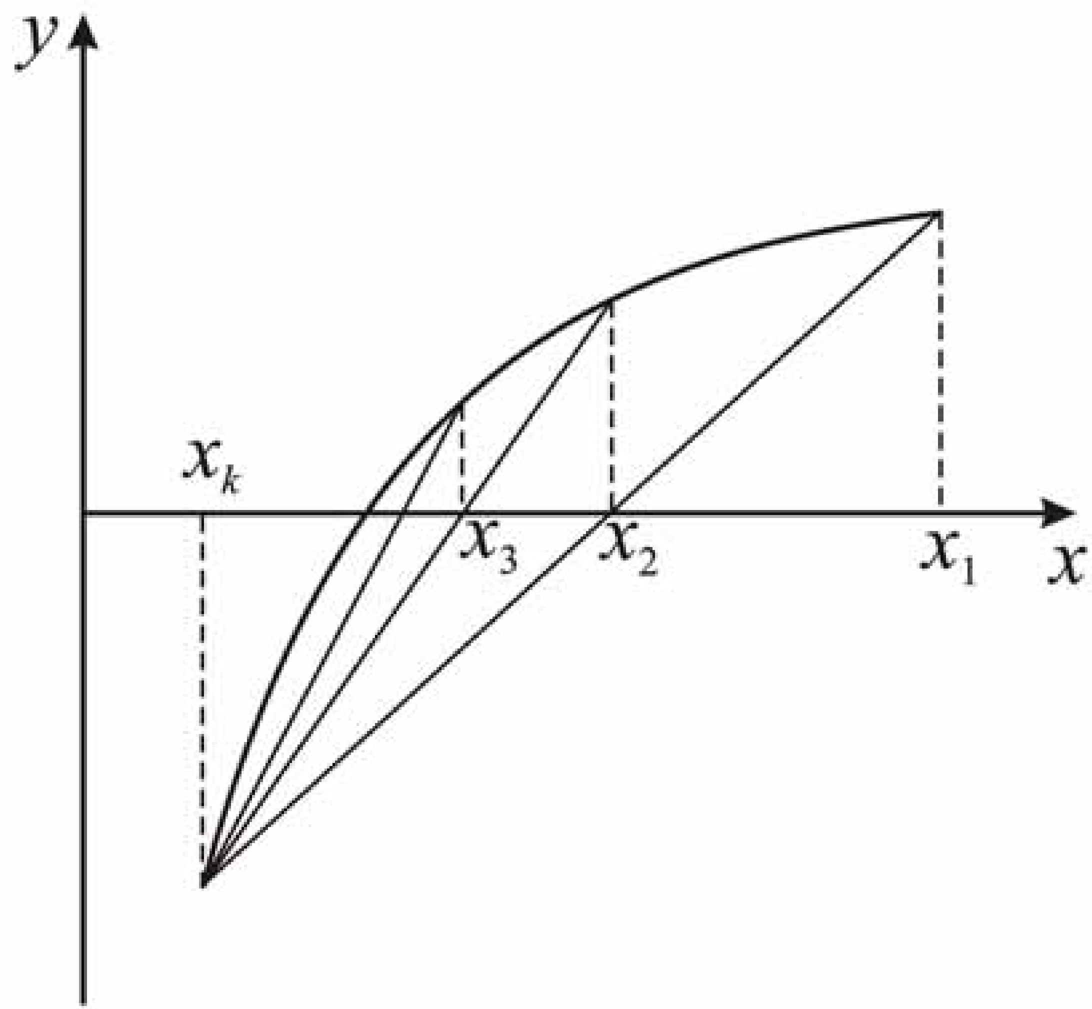
$$y = F(x) = F(1.1875) \quad = 0.069$$

$$\left|F(x)\right| < \varepsilon$$

Pierwiastek: $x = 1.1875$

Metoda cięciw

Rozwiązanie równania $F(x)=0$ jest przybliżone ciągiem miejsc zerowych cięciw poprowadzonych między punktami stanowiącymi końce kolejnych przedziałów izolacji.


y
x
x_k
x_3
x_2
x_1

Równanie cięciw, można zapisać w postaci:

$$\frac{y - F(x_{i-1})}{F(x_k) - F(x_{i-1})} = \frac{x - x_{i-1}}{x_k - x_{i-1}}$$

x_k – drugi kraniec przedziału izolacji $[x_{i-1}, x_k]$

Czyli pierwszą cięciwę prowadzimy miedzy punktami:

$$(a, F(a)) \quad (b, F(b))$$

Dla $y = 0$:

$$\boxed{x_i = x_{i-1} - F(x_{i-1}) \frac{x_k - x_{i-1}}{F(x_k) - F(x_{i-1})}} \quad *$$

Założenie:

W przedziale $[a,b]$, lub w kolejnym przedziale izolacji znak drugiej pochodnej funkcji $F(x)$ nie zmienia się.

⇓

Wyrazy ciągu * dają przybliżenie pierwiastka z niedomiarem lub nadmiarem.

Przybliżenie z niedomiarem:

$F'(x) > 0 \quad F''(x) > 0$ lub $F'(x) < 0 \quad F''(x) < 0$

wtedy:

$$x_i < x_{i+1} < x_{i+2} < \ldots < x^*$$

Przybliżenie z nadmiarem:

$F'(x) > 0 \quad F''(x) < 0$ lub $F'(x) < 0 \quad F''(x) > 0$

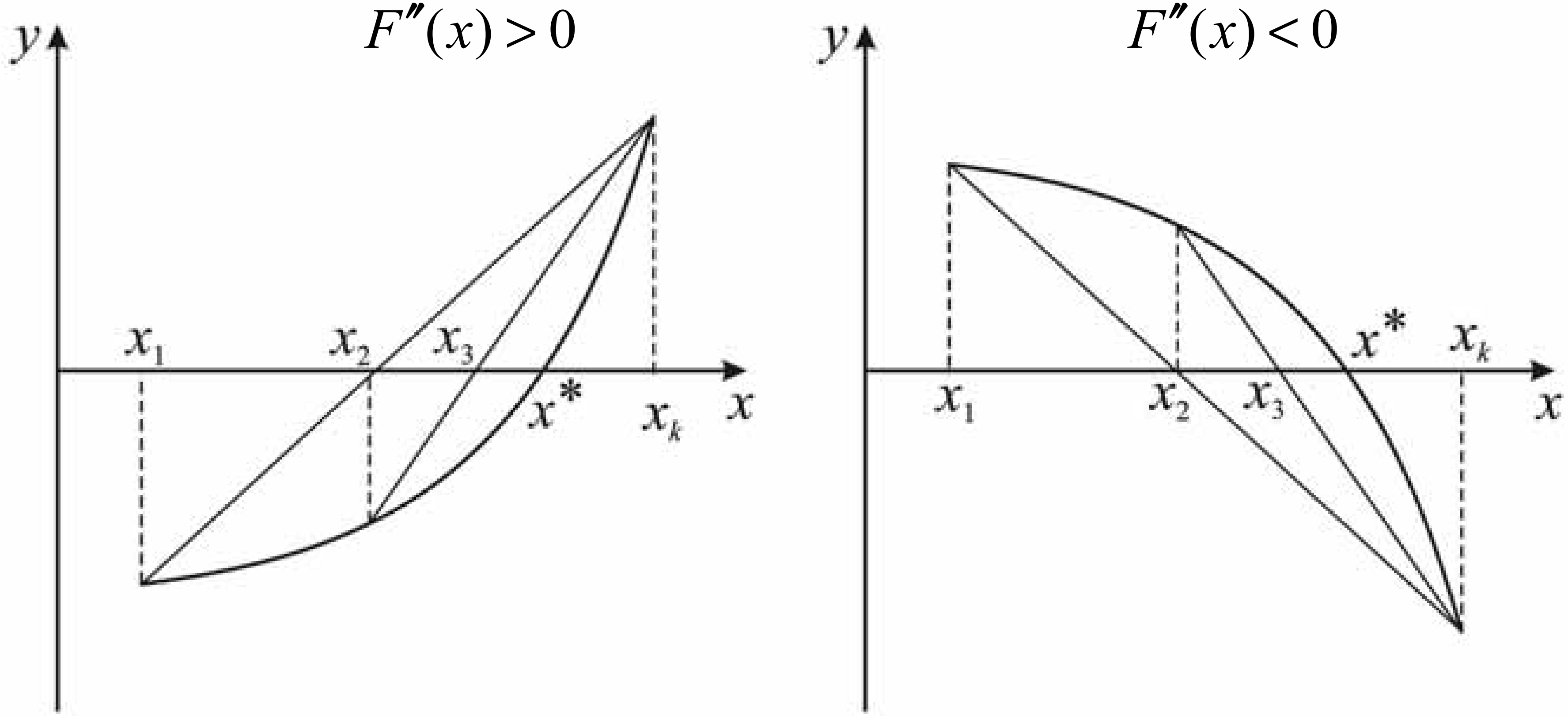
wtedy:

$$x_i > x_{i+1} > x_{i+2} > \ldots > x^*$$

Przy czym dwie sąsiednie wartości ciągu przybliżeń związane są wzorem *

$$F'(x) > 0 \qquad\qquad F'(x) < 0$$

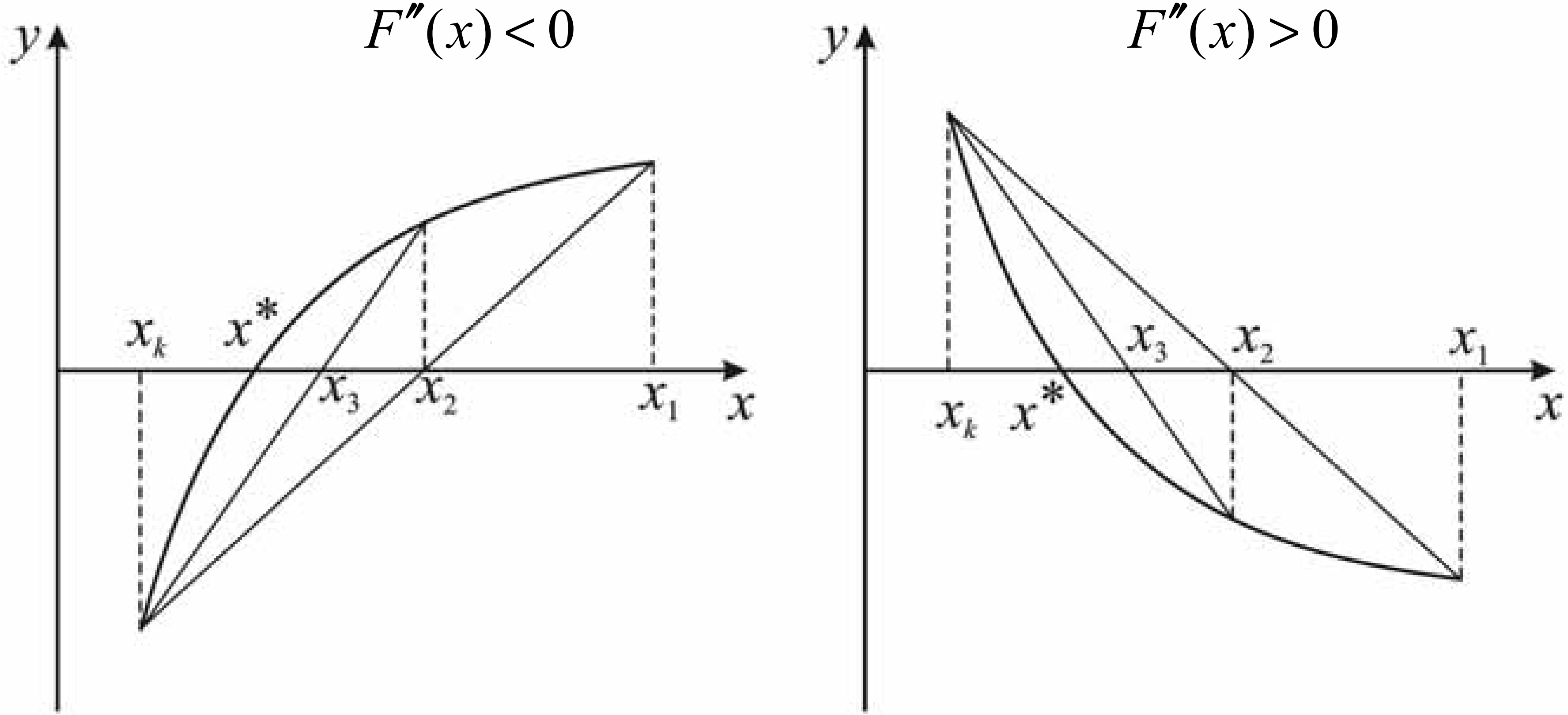
$$F''(x) > 0 \qquad\qquad F''(x) < 0$$



Oszacowanie pierwiastka z niedomiarem

$F'(x) > 0$ $\quad$ $F'(x) < 0$

$F''(x) < 0$ $\quad$ $F''(x) > 0$



Oszacowanie pierwiastka z nadmiarem

Ciąg $\{x_i\}$ jest monotoniczny i ograniczony, posiada więc granicę:

$$\lim_{i\to\infty} x_i = g$$

czyli:

$$\lim_{i\to\infty}\{x_i\} = g - F(g)\frac{x_k - g}{F(x_k) - F(g)} = g$$

stąd wynika:

$$F(g) = 0 \quad \Rightarrow \quad g = x^*$$

co dowodzi zbieżności metody.

x_k – punkt stały pęku cięciw

$\Downarrow$

Lewy lub prawy kraniec przedziału $[a,b]$, czyli $x_k = a$ lub $x_k = b$.

$x \in [a,b]$,	$F'(x) \cdot F''(x) > 0$	$x_k = b$
$x \in [a,b]$,	$F'(x) \cdot F''(x) < 0$	$x_k = a$

Przykład

Dla funkcji i przedziału izolacji z poprzedniego przykładu obliczyć metodą cięciw pierwiastek równania $F(x) = 0$ z dokładnością ε.

$$F(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$$

$$[a, b] = [1, 2]$$

$$\varepsilon = 0.1$$

$$F'(x) = 3x^2 - 6x - 2 \qquad F''(x) = 6x - 6$$

Określenie punktu pęku cięciw x_k:

$$z = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$F'(z) = F'(1.5) = -4.25$$

$$F''(z) = F''(1.5) = 6$$

$$F'(z) \cdot F''(z) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = a = 1 \qquad F(x_k) = 1$$

$$x_1 = b = 2 \qquad F(x_1) = -3$$

1. iteracja

$$x_2 = x_1 - F(x_1)\frac{x_k - x_1}{F(x_k) - F(x_1)} \qquad = 1.25$$

$$F(x_2) = F(1.25) \qquad = -0.234$$

$$\left|F(x)\right| > \varepsilon$$

2. iteracja

$$x_3 = x_2 - F(x_2)\frac{x_k - x_2}{F(x_k) - F(x_2)} \qquad = 1.202$$

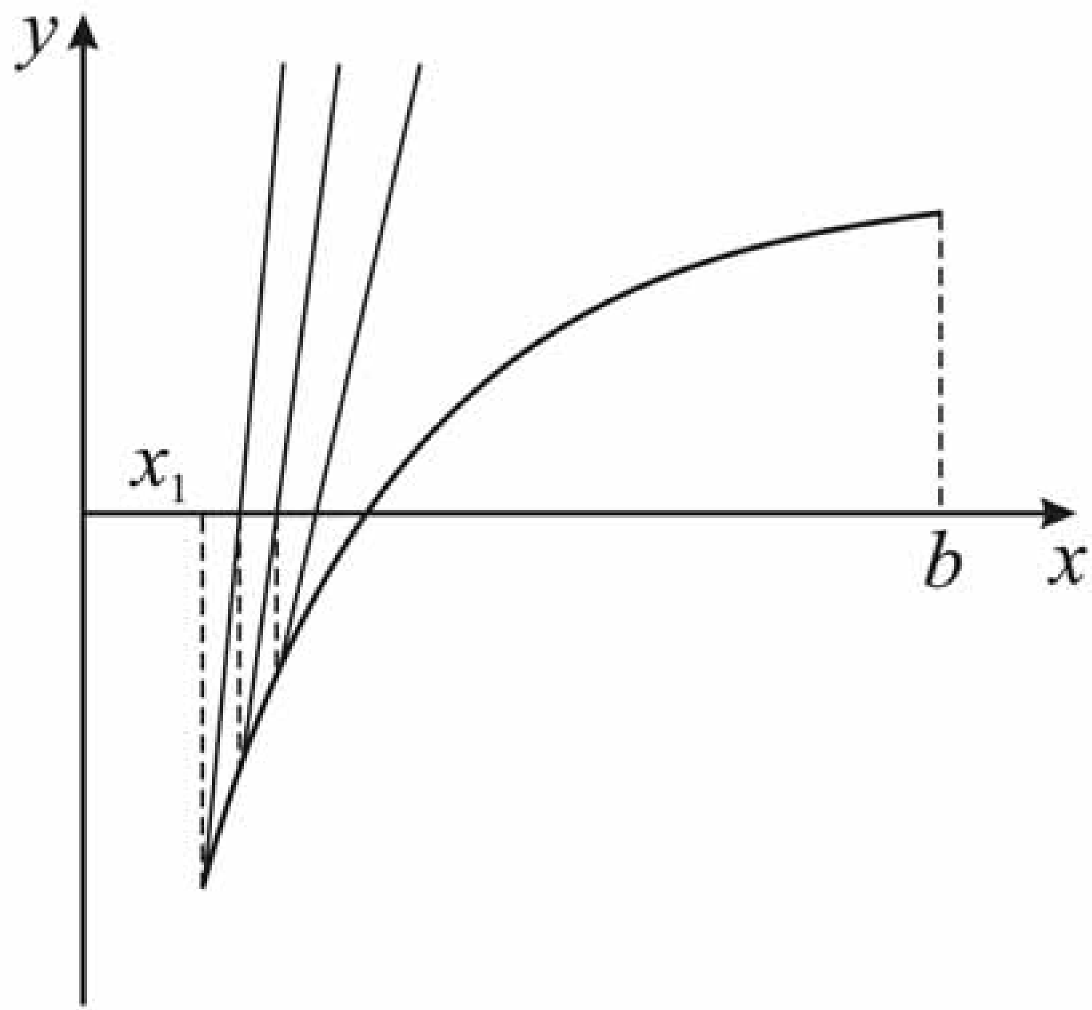
$$F(x_3) = F(1.202) \qquad = -0.0017576$$

$$\left|F(x)\right| < \varepsilon$$

Pierwiastek: $x = 1.202$

Metoda stycznych (Newtona)

Rozwiązanie równania $F(x) = 0$ w przedziale $[a,b]$ jest przybliżone ciągiem miejsc zerowych stycznych do funkcji $F(x)$.


y
x
x_1
b

Równanie stycznej w punkcie x_{i-1}:

$$y - F(x_{i-1}) = F'(x_{i-1})(x - x_{i-1})$$

Dla $y = 0$:

$$\boxed{x_i = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F'(x_{i-1})}, \quad i > 1}$$

Wybór pierwszego przybliżenia $x_1 = a$ lub $x_1 = b$:

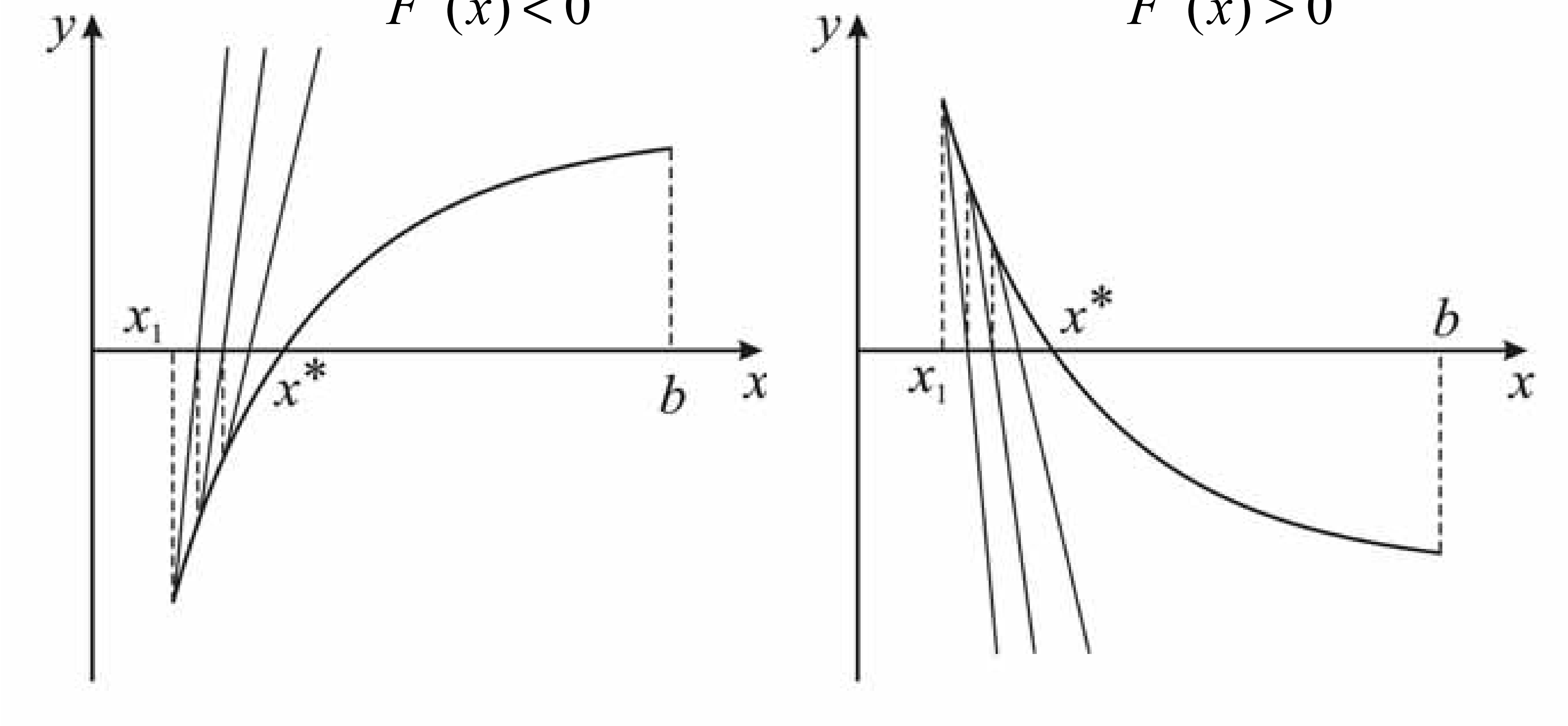
$$F'(x) \cdot F''(x) > 0 \qquad x_1 = b$$

$$F'(x) \cdot F''(x) < 0 \qquad x_1 = a$$

- Jeżeli druga pochodna w przedziale izolacji nie ma stałego znaku, to proces iteracyjny może być rozbieżny

$$F'(x) > 0 \qquad F'(x) < 0$$

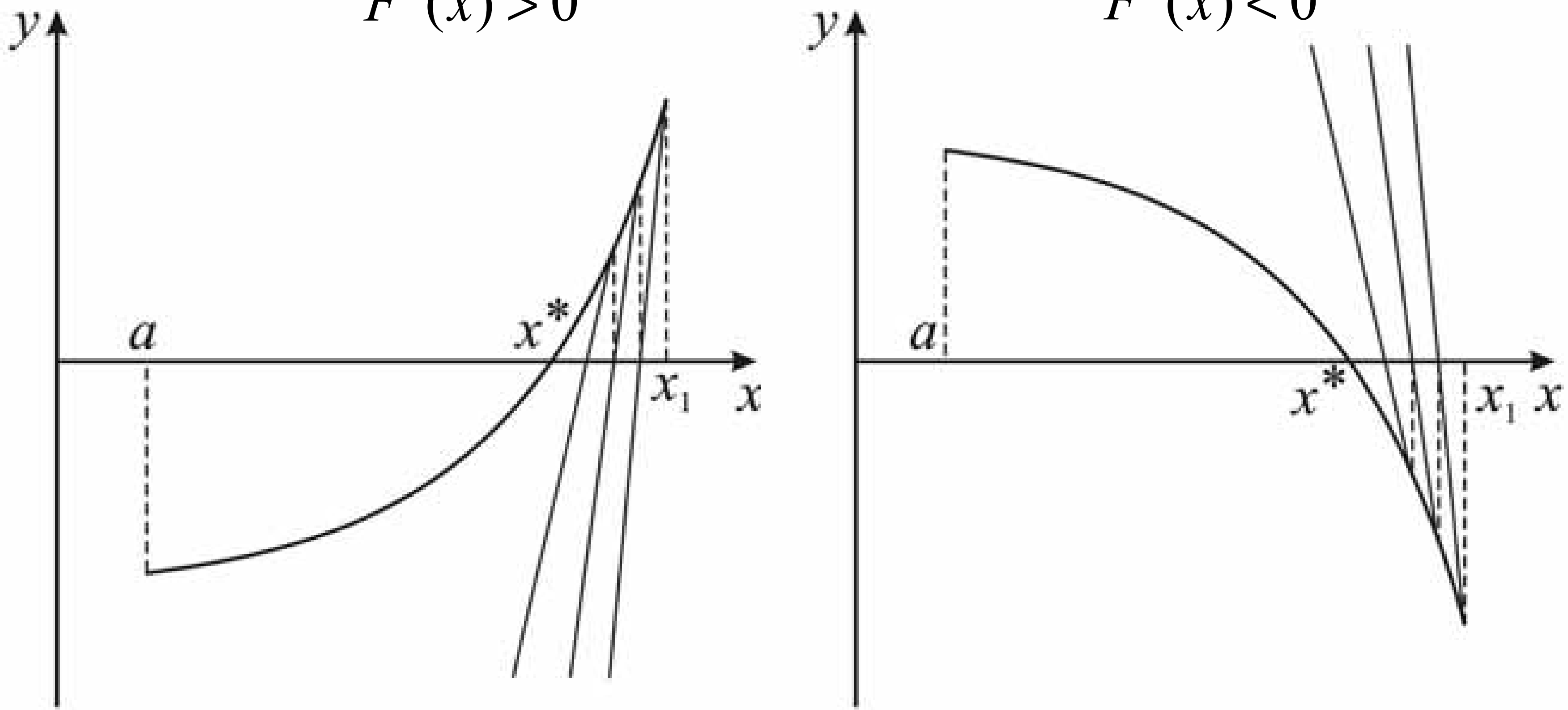
$$F''(x) < 0 \qquad F''(x) > 0$$



Wybór pierwszego przybliżenia w metodzie stycznych

$F'(x) > 0$ $\qquad\qquad$ $F'(x) < 0$

$F''(x) > 0$ $\qquad\qquad$ $F''(x) < 0$



Wybór pierwszego przybliżenia w metodzie stycznych c. d.

Przykład

Dla funkcji i przedziału izolacji z poprzedniego przykładu obliczyć metodą stycznych pierwiastek równania $F(x) = 0$ z dokładnością ε.

$$F(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$$

$$[a, b] = [1, 2]$$

$$\varepsilon = 0.1$$

$$F'(x) = 3x^2 - 6x - 2$$

$$F''(x) = 6x - 6$$

$$z = \frac{a+b}{2} \qquad = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$F'(z) \cdot F''(z) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = a = 1$$

$$F(x_1) = 1$$

$$F'(x_1) = -5$$

1. iteracja

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} \qquad = 1.2$$

$$F(x_2) = 0.008$$

$$\left|F(x)\right| < \varepsilon$$

Można przerwać obliczenia!

$$F'(x_2) = -4.88$$

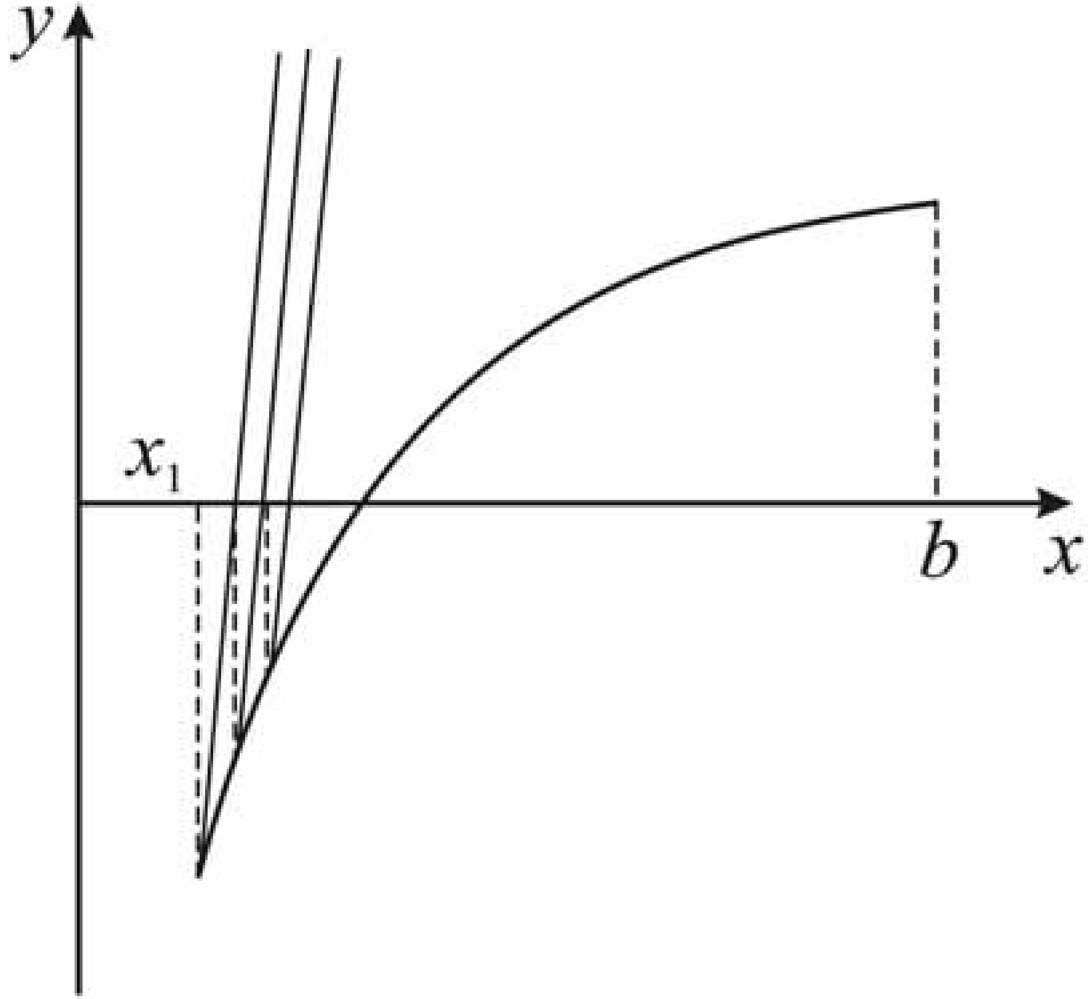
2. iteracja

$$x_3 = x_2 - \frac{F(x_2)}{F'(x_2)} \qquad = 1.202$$

$$F(x_3) = -0.00176$$

$$\left|F(x)\right| < \varepsilon$$

Metoda stycznych
- inny wariant


y
x_1
b
x

$$\boxed{x_i = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F'(x_1)}, \quad x_1 = a \text{ lub } x_1 = b, \quad i > 1}$$

Przykład

Dla funkcji i przedziału izolacji z poprzedniego przykładu obliczyć metodą stycznych pierwiastek równania $F(x) = 0$ z dokładnością ε.

$$F(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$$

$$[a,b] = [1,2]$$

$$\varepsilon = 0.1$$

$$F'(x) = 3x^2 - 6x - 2 \qquad F''(x) = 6x - 6$$

$$z = \frac{a+b}{2} \qquad = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$F'(z) \cdot F''(z) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = a = 1$$

$$F(x_1) = 1$$

$$F'(x_1) = -5$$

1. iteracja

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} \qquad = 1.2 \qquad F(x_2) = 0.008$$

$$\left|F(x)\right| < \varepsilon$$

Można przerwać obliczenia!

2. iteracja

$$x_3 = x_2 - \frac{F(x_2)}{F'(x_1)} \qquad = 1.202 \qquad F(x_3) = 0.0001935$$