UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH
- Metody dokładne

Rozpatruje się układ n równań liniowych zawierających n niewiadomych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

który można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\; \ldots\; a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\; \ldots\; a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2}\; \ldots\; a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A – macierz główna układu
X – wektor niewiadomych
B – wektor wyrazów wolnych

Założenie:

Układ równań jest oznaczony, (tzn. posiada jedno rozwiązanie)

$$\Downarrow$$

Macierz główna układu równań $\mathbf{A}$ nie jest osobliwa (wyznacznik tej macierzy jest różny od zera)

Zastosowanie macierzy odwrotnej

Układ równań:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Można rozwiązać obliczając macierz odwrotną do macierzy głównej układu:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Układ równań, w którym tylko główna przekątna macierzy $\mathbf{A}$ ma elementy niezerowe

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 & & & = b_1 \\
& a_{22}x_2 & & = b_2 \\
& \ldots & & \\
& & a_{nn}x_n & = b_n
\end{cases}
$$

Algorytm:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Trójkątny układ równań

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

Algorytm:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{s=i+1}^{n} a_{is} x_s}{a_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Przy spełnionym warunku:

$$a_{ii} \neq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Przykład

Rozwiązać trójkątny układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{3}} = 8$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 8}{\frac{15}{4}} = -\frac{2}{5}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = \frac{2 - 1 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) - 3 \cdot 8}{4} = -\frac{27}{5}$$

Wzory Cramera
(metoda wyznacznikowa)

Układ równań liniowych zapisujemy w postaci macierzowej.

Przez **W** oznaczamy macierz główną układu równań, czyli:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

Obliczamy wyznacznik tej macierzy: $|\mathbf{W}|$

Jeżeli $|\mathbf{W}| \neq 0$ to obliczamy wyznaczniki macierzy pomocniczych:

$$\left|\mathbf{W1}\right| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \left|\mathbf{W2}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

itd..

Następnie obliczamy elementy wektora niewiadomych $\mathbf{X}$:

$$x_1 = \frac{|\mathbf{W1}|}{|\mathbf{W}|} \qquad x_2 = \frac{|\mathbf{W2}|}{|\mathbf{W}|} \qquad x_3 = \frac{|\mathbf{W3}|}{|\mathbf{W}|}$$

itd..

Przykład

Rozwiązać układ równań metodą wyznacznikową:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 48 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{W}| = -8$$

$$\mathbf{W1} = \begin{bmatrix} 22 & 3 & 2 \\ 48 & 8 & 4 \\ 32 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{W1}| = -24$$

$$\mathbf{W2} = \begin{bmatrix} 2 & 22 & 2 \\ 4 & 48 & 4 \\ 5 & 32 & 3 \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{W2}| = -16$$

$$\mathbf{W3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 22 \\ 4 & 8 & 48 \\ 5 & 1 & 32 \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{W3}| = -40$$

$$x_1 = \frac{|\mathbf{W1}|}{|\mathbf{W}|} \qquad = \frac{-24}{-8} \quad = 3$$

$$x_2 = \frac{|\mathbf{W2}|}{|\mathbf{W}|} \qquad = \frac{-16}{-8} \quad = 2$$

$$x_3 = \frac{|\mathbf{W3}|}{|\mathbf{W}|} \qquad = \frac{-40}{-8} \quad = 5$$

Metoda Thomasa dla układów trójprzekątniowych

Trójprzekątniowy układ równań:

$$a_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_2 & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$c_n = 0$$

Układ można zapisać w następujący sposób:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$a_1 = 0,\ \ c_n = 0 \qquad (1)$$

Rozwiązania tego układu równań poszukuje się w postaci:

$$x_i = \beta_i\, x_{i+1} + \gamma_i \qquad (2)$$

lub inaczej zapisując:

$$x_{i-1} = \beta_{i-1}\, x_i + \gamma_{i-1} \qquad (3)$$

β_i, γ_i – nieznane współczynniki

Po podstawieniu (3) do (1) i obliczeniu x_i:

$$x_i = -\frac{c_i}{a_i\beta_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i\gamma_{i-1}}{a_i\beta_{i-1} + b_i} \tag{4}$$

Z porównania prawych stron (2) i (4):

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i\,\beta_{i-1} + b_i} \qquad \gamma_i = \frac{d_i - a_i\gamma_{i-1}}{a_i\,\beta_{i-1} + b_i} \tag{5}$$

Na podstawie równania (1) można wyznaczyć wartości początkowe (dla $i = 1$):

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} \tag{6}$$

Ponieważ z (2) dla $i = 1$ wynika, że:

$$x_1 = \beta_1 x_2 + \gamma_1 \tag{7}$$

więc:

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1} \ , \qquad \gamma_1 = \frac{d_1}{b_1} \tag{8}$$

Do ostatniego równania układu (1), czyli:

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \tag{9}$$

wstawiamy zależność (3) (dla $i = n$):

$$a_n \left(\beta_{n-1} x_n + \gamma_{n-1} \right) + b_n x_n = d_n \tag{10}$$

skąd otrzymujemy:

$$x_n = \frac{d_n - a_n \gamma_{n-1}}{a_n \beta_{n-1} + b_n} = \gamma_n \tag{11}$$

Po wyznaczeniu wartości x_n kolejne niewiadome obliczamy z równania (3) dla $i = n - 1, n - 2, ..., 1$

Algorytm:

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1} \qquad \gamma_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \qquad \gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \qquad i = 2,3,\ldots,n$$

$$x_n = \gamma_n$$

$$x_i = \beta_i x_{i+1} + \gamma_i \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Przykład

Rozwiązać układ równań metodą Thomasa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1} \qquad = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\beta_2 = -\frac{c_2}{a_2\beta_1 + b_2} \qquad = -\frac{1}{3\cdot(-1)+1} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_3 = -\frac{c_3}{a_3\beta_2 + b_3} \qquad = -\frac{4}{1\cdot(1/2)+2} = -\frac{8}{5}$$

$$\beta_4 = -\frac{c_4}{a_4\beta_3 + b_4} \qquad = -\frac{1}{1\cdot(-8/5)+1} = \frac{5}{3}$$

$$\beta_5 = -\frac{c_5}{a_5\beta_4 + b_5} \qquad = -\frac{0}{2\cdot(5/3)+2} = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\gamma_2 = \frac{d_2 - a_2\gamma_1}{a_2\beta_1 + b_2} = \frac{6 - 3\cdot 1}{3\cdot(-1) + 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\gamma_3 = \frac{d_3 - a_3\gamma_2}{a_3\beta_2 + b_3} = \frac{4 - 1\cdot(-3/2)}{1\cdot(1/2) + 2} = \frac{11}{5}$$

$$\gamma_4 = \frac{d_4 - a_4\gamma_3}{a_4\beta_3 + b_4} = \frac{1 - 1\cdot(11/5)}{1\cdot(-8/5) + 1} = 2$$

$$\gamma_5 = \frac{d_5 - a_5\gamma_4}{a_5\beta_4 + b_5} = \frac{4 - 2\cdot 2}{2\cdot(5/3) + 2} = 0$$

$$x_5 = \gamma_5 \qquad = 0$$

$$x_4 = \beta_4 x_5 + \gamma_4 \qquad = \frac{5}{3} \cdot 0 + 2 = 2$$

$$x_3 = \beta_3 x_4 + \gamma_3 \qquad = -\frac{8}{5} \cdot 2 + \frac{11}{5} = -1$$

$$x_2 = \beta_2 x_3 + \gamma \qquad = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \left(-\frac{3}{2}\right) = -2$$

$$x_1 = \beta_1 x_2 + \gamma_1 \qquad = -1 \cdot (-2) + 1 = 3$$

Metoda eliminacji Gaussa

Macierz główną układu równań i wektor wyrazów wolnych:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Zapisujemy w postaci macierzy $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & c_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & c_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

Podstawowy wariant metody:

1. etap:

Przekształcenie macierzy $\mathbf{C}$ w taki sposób, aby n pierwszych kolumn tworzyło macierz trójkątną.

2. etap:

Rozwiązanie trójkątnego układu równań.

Jeżeli $c_{11} \neq 0$

Pierwsze równanie mnożymy przez: $\dfrac{c_{i1}}{c_{11}}$

Odejmujemy to równanie od każdego kolejnego, i – tego równania ($i = 2, 3, ..., n$)

Obliczone współczynniki zapisujemy na miejscu poprzednich.

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = c_{1,n+1} \\
\qquad\quad c_{22}^{(1)}x_2 + c_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{2n}^{(1)}x_n = c_{2,n+1}^{(1)} \\
\qquad\quad c_{32}^{(1)}x_2 + c_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{3n}^{(1)}x_n = c_{3,n+1}^{(1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots \\
\qquad\quad c_{n2}^{(1)}x_2 + c_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{nn}^{(1)}x_n = c_{n,n+1}^{(1)}
\end{cases}
$$

Układ ten odpowiada sprowadzeniu macierzy $\mathbf{C}$ do $\mathbf{C_1}$:

$$\mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ 0 & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)} & \dots & c_{2n}^{(1)} & c_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & c_{32}^{(1)} & c_{33}^{(1)} & \dots & c_{3n}^{(1)} & c_{3,n+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{n2}^{(1)} & c_{n3}^{(1)} & \dots & c_{nn}^{(1)} & c_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

za pomocą wzorów określających nowe współczynniki:

$$c_{ij}^{(1)} = c_{ij} - \frac{c_{i1}}{c_{11}} c_{ij}, \quad i = 2,3,\dots,n \quad j = 2,3,\dots,n+1$$

Jeżeli $c_{22}^{(1)} \neq 0$

Drugie równanie mnożymy przez: $\dfrac{c_{i2}^{(1)}}{c_{22}^{(1)}}$

Odejmujemy to równanie od każdego kolejnego, i – tego równania ($i = 3, 4, ..., n$)

Obliczone współczynniki zapisujemy na miejscu poprzednich.

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = c_{1,n+1} \\
\qquad c_{22}^{(1)}x_2 + c_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{2n}^{(1)}x_n = c_{2,n+1}^{(1)} \\
\qquad\qquad c_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + c_{3n}^{(2)}x_n = c_{3,n+1}^{(2)} \\
\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad c_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + c_{nn}^{(2)}x_n = c_{n,n+1}^{(2)}
\end{cases}
$$

Układ ten odpowiada sprowadzeniu macierzy $\mathbf{C_1}$ do $\mathbf{C_2}$:

$$\mathbf{C_2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ 0 & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)} & \dots & c_{2n}^{(1)} & c_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & c_{33}^{(2)} & \dots & c_{3n}^{(2)} & c_{3,n+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{n3}^{(2)} & \dots & c_{nn}^{(2)} & c_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

za pomocą wzorów określających nowe współczynniki:

$$c_{ij}^{(2)} = c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{i2}^{(1)}}{c_{22}^{(1)}} c_{2j}^{(1)}, \quad i = 3,4,\dots,n \quad j = 3,4,\dots,n+1$$

Po wykonaniu n kroków otrzymujemy trójkątny układ równań:

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = c_{1,n+1} \\
\qquad\quad c_{22}^{(1)}x_2 + c_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + c_{2n}^{(1)}x_n = c_{2,n+1}^{(1)} \\
\qquad\qquad\qquad c_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + c_{3n}^{(2)}x_n = c_{3,n+1}^{(2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}^{(n-1)}x_n = c_{n,n+1}^{(n-1)}
\end{cases}
$$

Dla tego układu macierz $\mathbf{C_{n-1}}$ ma postać:

$$\mathbf{C_{n-1}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ 0 & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)} & \dots & c_{2n}^{(1)} & c_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & c_{33}^{(2)} & \dots & c_{3n}^{(2)} & c_{3,n+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn}^{(n-1)} & c_{n,n+1}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Algorytm:

$$
\begin{cases}
s = 1, 2, \ldots, n-1 \\
\begin{cases}
i = s+1, s+2, \ldots, n \\
c_{ij}^{(s)} = c_{ij}^{(s-1)} - \dfrac{c_{is}^{(s-1)}}{c_{ss}^{(s-1)}} c_{sj}^{(s-1)}, \quad j = s+1, s+2, \ldots, n+1
\end{cases}
\end{cases}
$$

Przykład

Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$s = 1$

$i = 2$

$$c_{22}^{(1)} = c_{22} - \frac{c_{21}}{c_{11}} c_{12} \quad = 4 - \frac{1}{4} \cdot 1 \quad = \frac{15}{4}$$

$$c_{23}^{(1)} = c_{23} - \frac{c_{21}}{c_{11}} c_{13} \quad = 1 - \frac{1}{4} \cdot 3 \quad = \frac{1}{4}$$

$$c_{24}^{(1)} = c_{24} - \frac{c_{21}}{c_{11}} c_{14} \quad = 1 - \frac{1}{4} \cdot 2 \quad = \frac{1}{2}$$

$i = 3$

$$c_{32}^{(1)} = c_{32} - \frac{c_{31}}{c_{11}} c_{12} \qquad = 3 - \frac{2}{4} \cdot 1 \qquad = \frac{5}{2}$$

$$c_{33}^{(1)} = c_{33} - \frac{c_{31}}{c_{11}} c_{13} \qquad = 2 - \frac{2}{4} \cdot 3 \qquad = \frac{1}{2}$$

$$c_{34}^{(1)} = c_{34} - \frac{c_{31}}{c_{11}} c_{14} \qquad = 4 - \frac{2}{4} \cdot 2 \qquad = 3$$

$$\mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$s = 2$

$i = 3$

$$c_{33}^{(2)} = c_{33}^{(1)} - \frac{c_{32}^{(1)}}{c_{22}^{(1)}} c_{23}^{(1)} \qquad = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{4} \qquad = \frac{1}{3}$$

$$c_{34}^{(2)} = c_{34}^{(1)} - \frac{c_{32}^{(1)}}{c_{22}^{(1)}} c_{24}^{(1)} \qquad = 3 - \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2} \qquad = \frac{8}{3}$$

$$\mathbf{C_2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Macierz odpowiada trójkątnemu układowi równań.

Rozwiązanie takiego układu równań:

$$\Downarrow$$

patrz wcześniejszy przykład