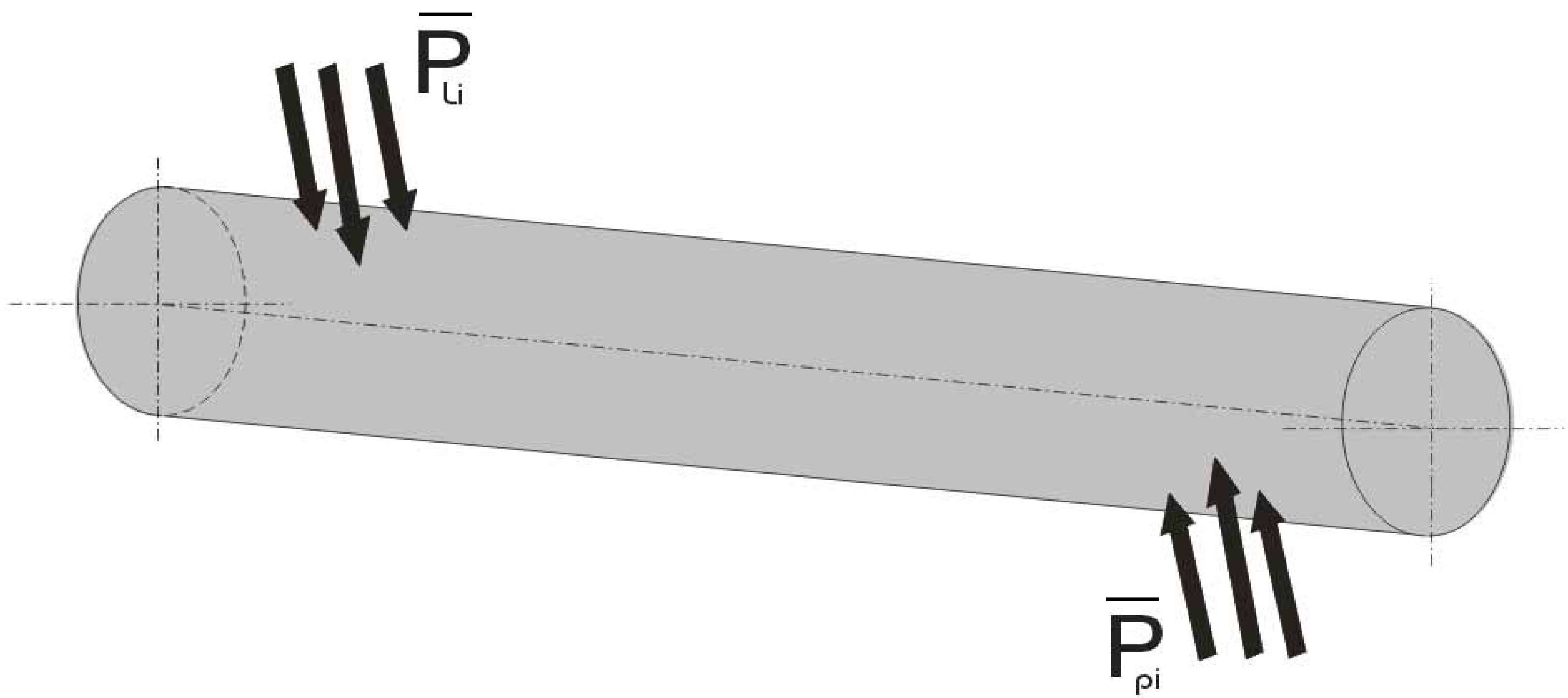
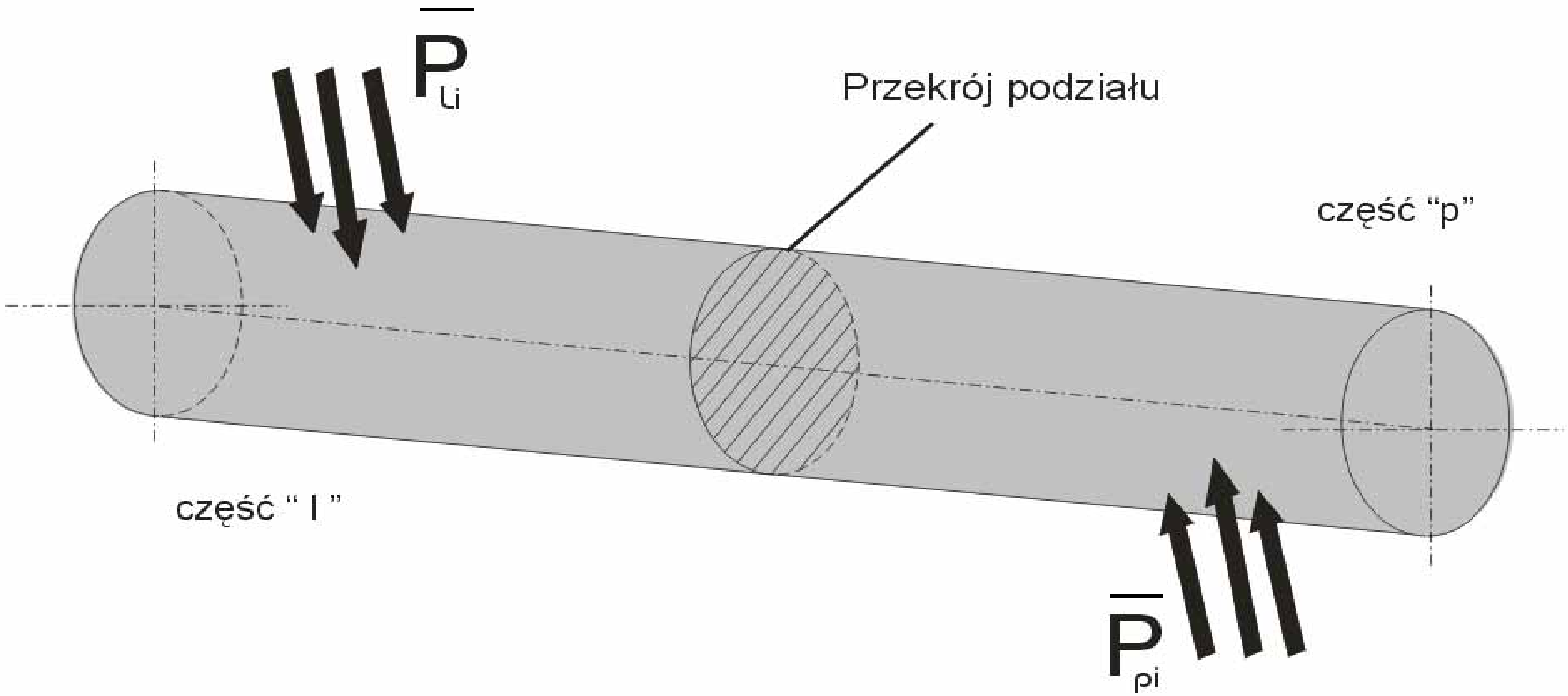
Siły wewnętrzne i naprężenia w pręcie

prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

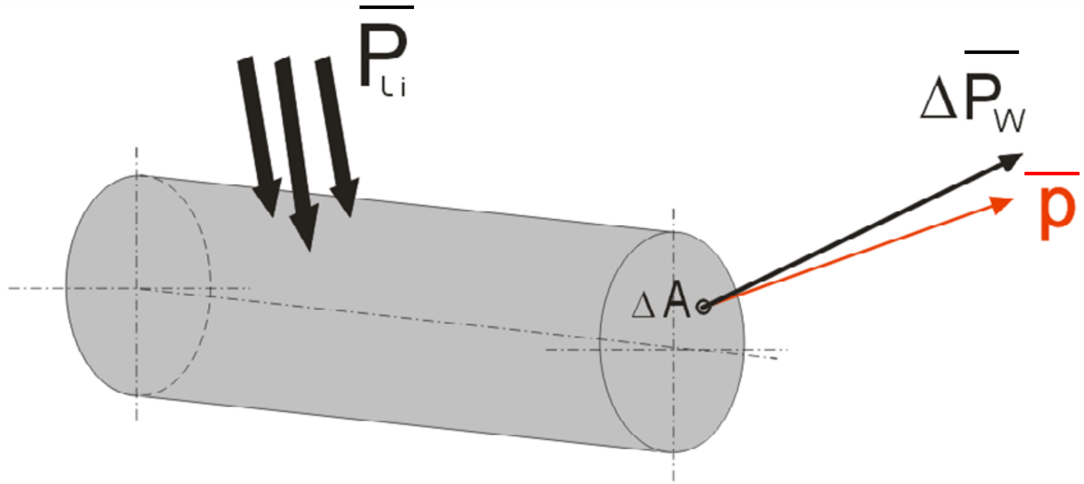
Rozważmy pręt prosty będący w równowadze przez układ znanych sił zewnętrznych (obciążeń czynnych i reakcji więzów).



Podzielmy go w myśli dowolnym przekrojem normalnym (którego położenie określa współrzędna x) na część lewą „l" oraz prawą „p".



Miarą lokalnego oddziaływania mechanicznego odrzuconej części „p” na rozważaną cześć „l” pręta w określonym punkcie przekroju jest *wektor naprężenia całkowitego* $\overline{p}$.

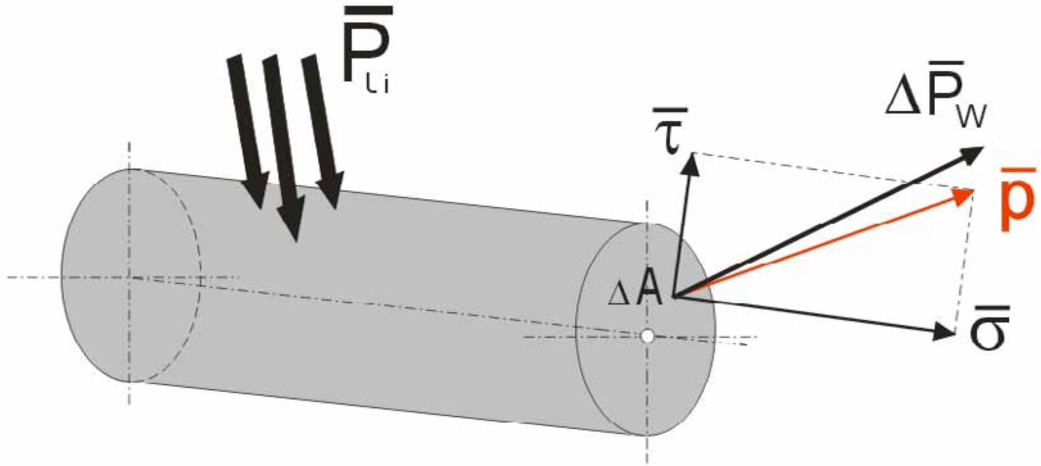


$$\overline{p} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \overline{P}_W}{\Delta A}$$

ΔA – element powierzchni przekroju w otoczeniu punktu

$\Delta\overline{P}_w$ – wypadkowa sił powierzchniowych działających na ΔA

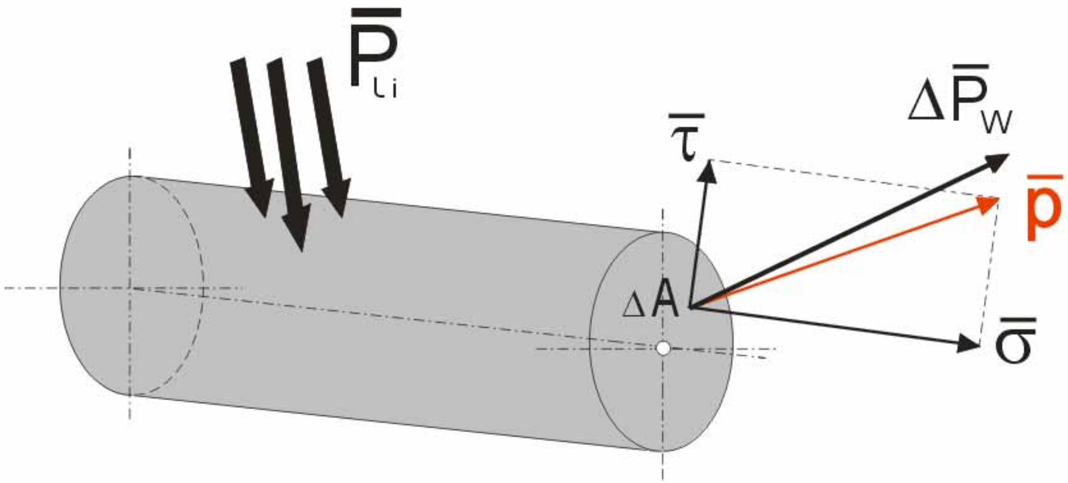
Wektor naprężenia całkowitego $\bar{p}$ rozkłada się na składową normalną do przekroju $\bar{\sigma}$ oraz składową styczną $\bar{\tau}$ leżącą w płaszczyźnie przekroju.



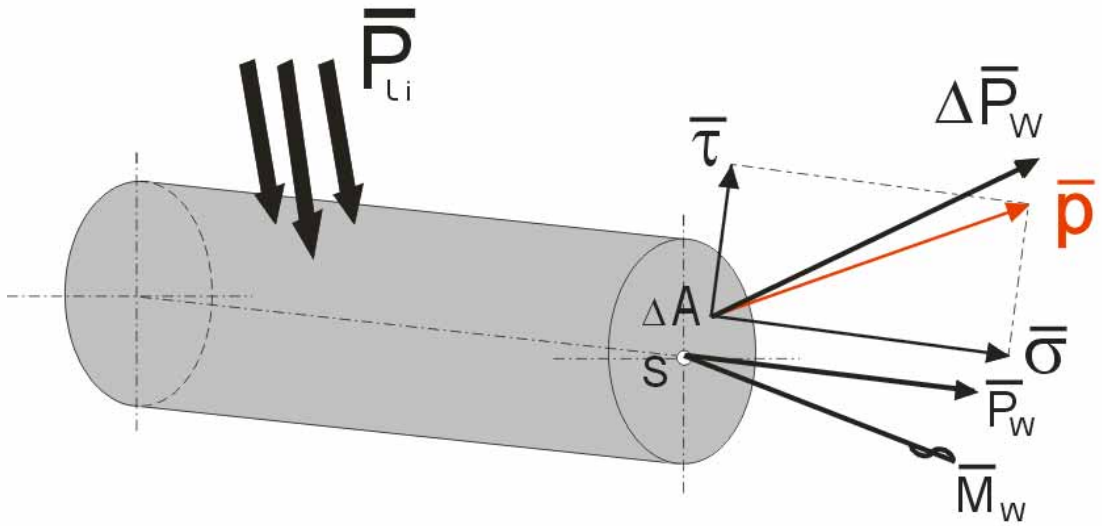
Między $\bar{p}$, $\bar{\sigma}$ oraz $\bar{\tau}$ zachodzą związki

$$\bar{p} = \bar{\sigma} + \bar{\tau} \qquad p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

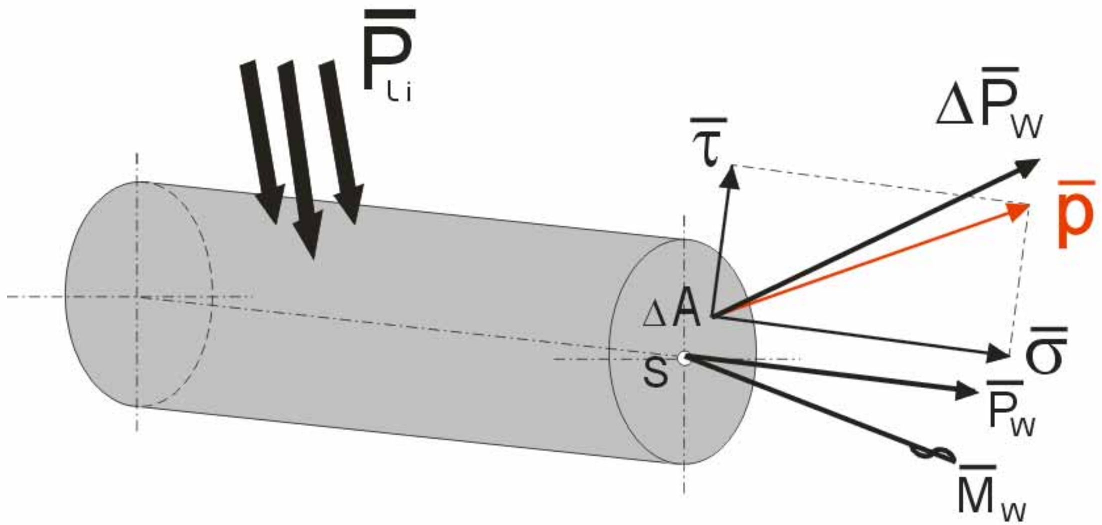
Jednostką naprężenia jest paskal $Pa = \frac{N}{m^2}$. Naprężenie normalne $\bar{\sigma}$ uważa się za dodatnie, jeśli jest zwrócone od przekroju, a za ujemne, jeśli jest zwrócone do przekroju na którym działa.
Znak naprężenia stycznego $\bar{\tau}$ nie ma znaczenia praktycznego.



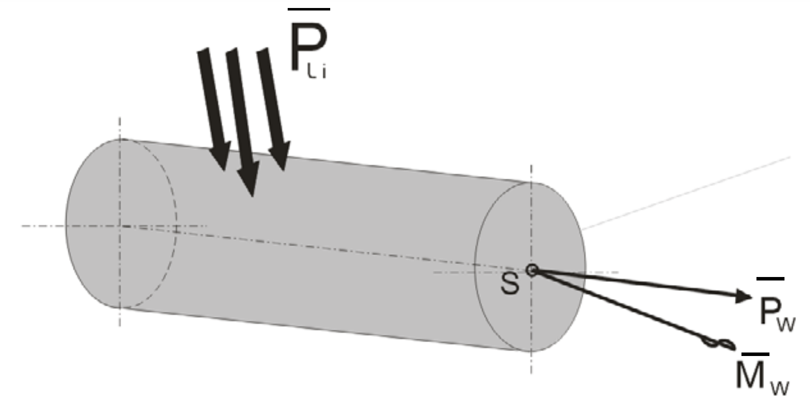
Każdemu punktowi przekroju jest przyporządkowany wektor naprężenia. Określone w ten sposób pole wektorowe naprężenia tworzy układ powierzchniowych sił wewnętrznych $\bar{p}$ (y,z). Po zredukowaniu do środka ciężkości S przekroju można go zastąpić wektorem głównym $\bar{P}_w$ i momentem głównym $\bar{M}_w$ sił wewnętrznych



Siły te stanowią miarę globalnego oddziaływania mechanicznego odrzuconej części „p” na rozważaną część „l” pręta w analizowanym przekroju. Lokalne i globalne oddziaływanie mechaniczne części „l” na część „p” pręta określają odpowiednio wektory równe, ale przeciwnie skierowane do $\bar{p}$, $\bar{P}_w$ i $\bar{M}_w$



Wektor główny $\overline{P}_w$ i moment główny $\overline{M}_w$ można wyznaczyć z warunków równowagi lewej „l” albo prawej „p” części pręta, które mają następującą postać



$$\overline{P}_w + \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{li} = 0 \qquad \overline{P}_w + \sum_{j=1}^{m} \overline{P}_{pj} = 0$$

$$\overline{M}_w + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{li} = 0 \qquad \overline{M}_w + \sum_{j=1}^{m} \overline{M}_{pj} = 0$$

Gdzie: $\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{li}$ $\sum_{j=1}^{m} \overline{P}_{pj}$ - wektory główne sił zewnętrznych działających odpowiednio na część „l” albo „p” pręta

$\sum_{j=1}^{m} \overline{M}_{pj}$ $\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{li}$ - momenty główne sił zewnętrznych działających odpowiednio na część „l” albo „p” pręta

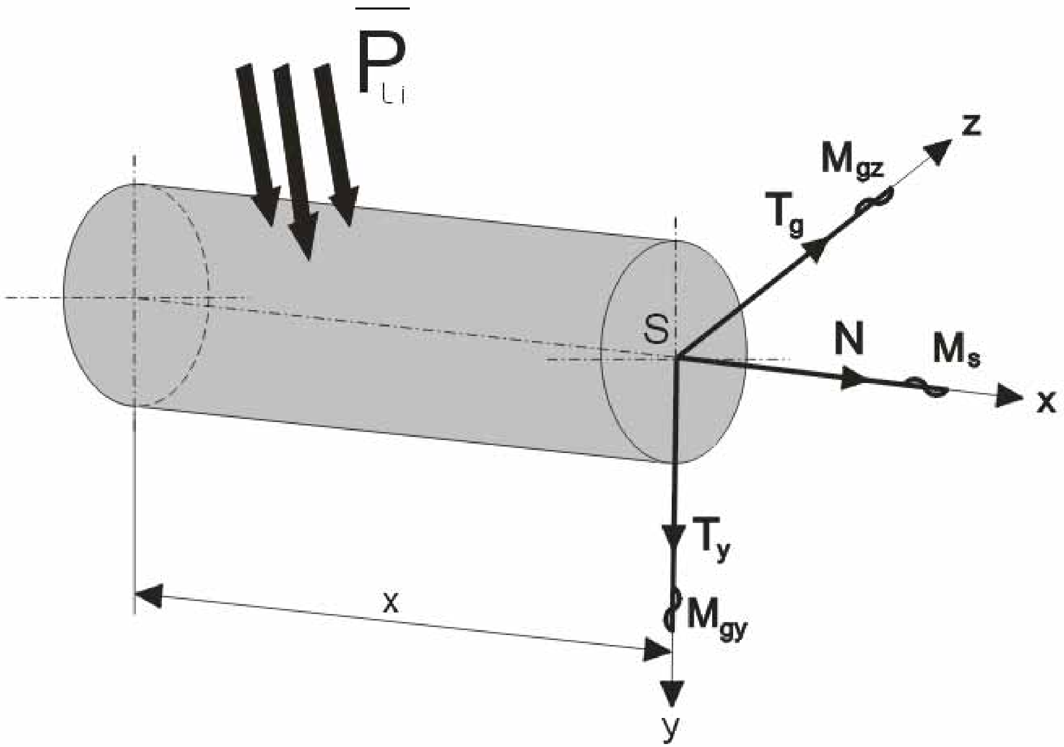
Redukcję sił zewnętrznych działających na część „l” albo „p” pręta należy wykonać względem środka ciężkości S przekroju

Wektor główny $\overline{P}_w$ i moment główny $\overline{M}_w$ sił wewnętrznych wyliczone z warunków równowagi części „l” albo „p” pręta wynoszą

$$\overline{P}_w = -\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{li} = -\sum_{j=1}^{m} \overline{P}_{pj}$$

$$\overline{M}_w = -\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{li} = -\sum_{j=1}^{m} \overline{M}_{pj}$$

$\overline{P}_w$ i $\overline{M}_w$ rozkłada się w układzie osi współrzędnych *xyz* (oś x pokrywa się z osią pręta, a osie *y,z* leżą w jego przekroju) na składowe sił wewnętrznych.



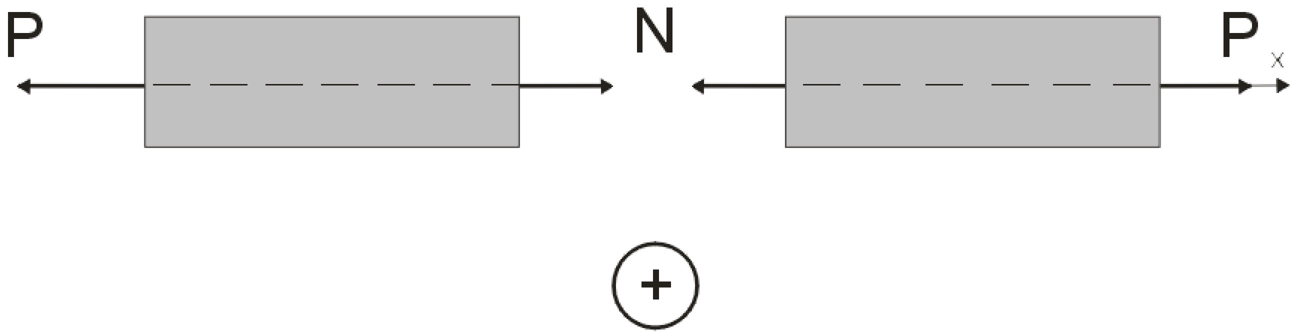
N – siła normalna

Ty,Tz – siły poprzeczne lub tnące

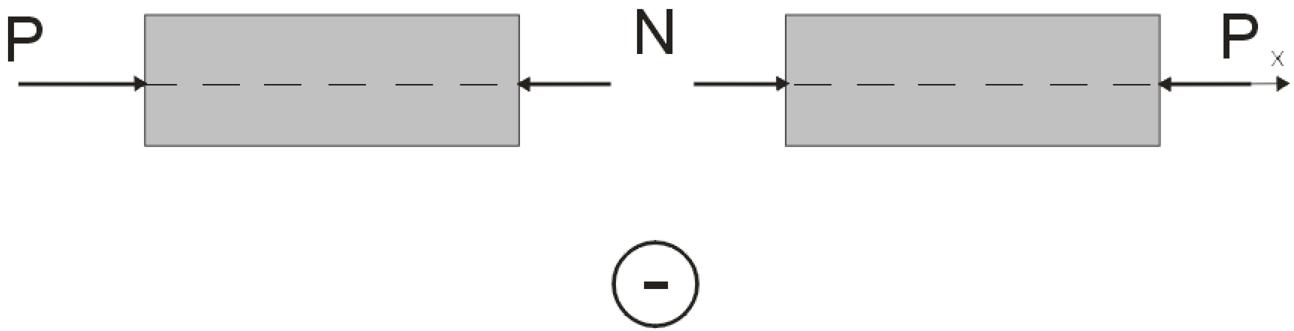
M_s – moment skręcający

M_{gy},M_{gz} – momenty gnące

Siła normalna *N* jest równa algebraicznej sumie składowych osiowych sił zewnętrznych działających po jednej stronie rozważanego przekroju pręta. Składowa osiowa zwrócona od przekroju podziału wywołuje dodatnią (rozciągającą), a zwrócona do przekroju – ujemną (ściskającą) siłę normalną.

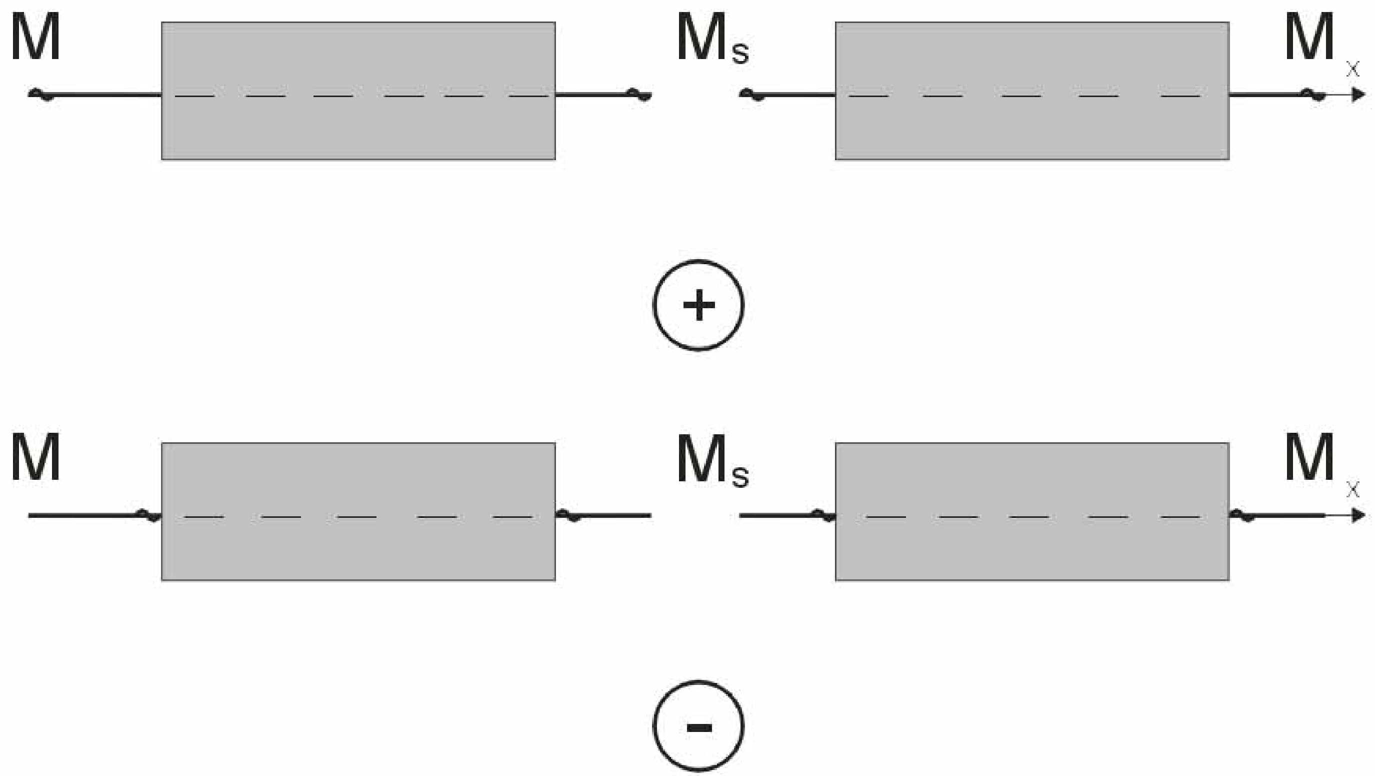


rozciąganie

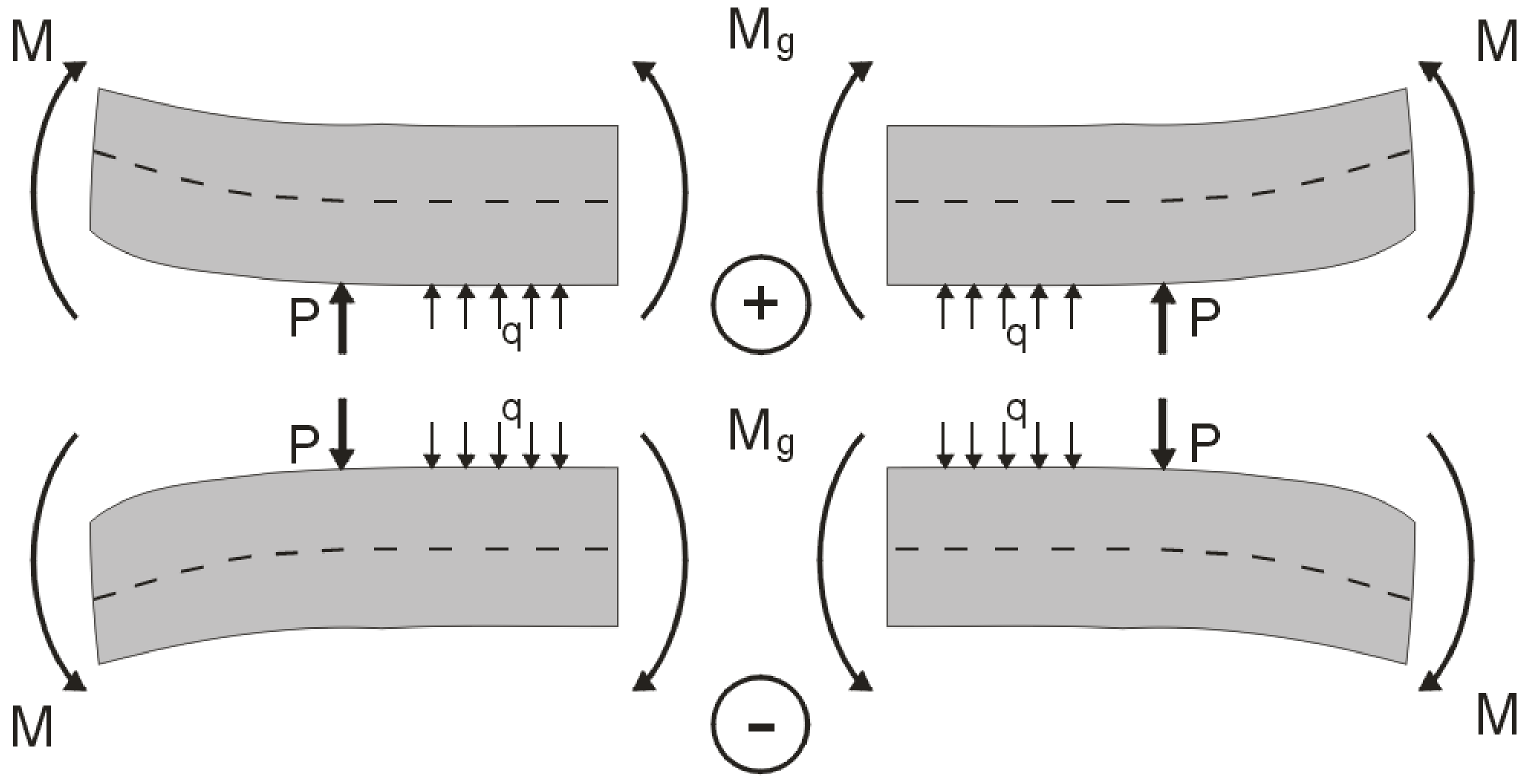


ściskanie

Moment skręcający M_s jest równy algebraicznej sumie momentów sił zewnętrznych działających po jednej stronie rozważanego przekroju pręta względem jego osi. Można dla porządku przyjąć, że wektor momentu siły zewnętrznej zwrócony od przekroju podziału wywołuje dodatni, a zwrócony do przekroju – ujemny moment skręcający.



Pręt obciążony siłami lub momentami zewnętrznymi, których wektory przecinają jego oś pod kątem prostym, nazywa się belką. Niechaj obciążenie i oś belki leżą w płaszczyźnie pionowej xy (oś x stanowi oś belki, a oś y jest skierowana w dół). W przekroju belki może działać moment gnący M_g oraz siła tnąca (poprzeczna) T. Wektor momentu gnącego jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą obciążenia i siła poprzeczna T.

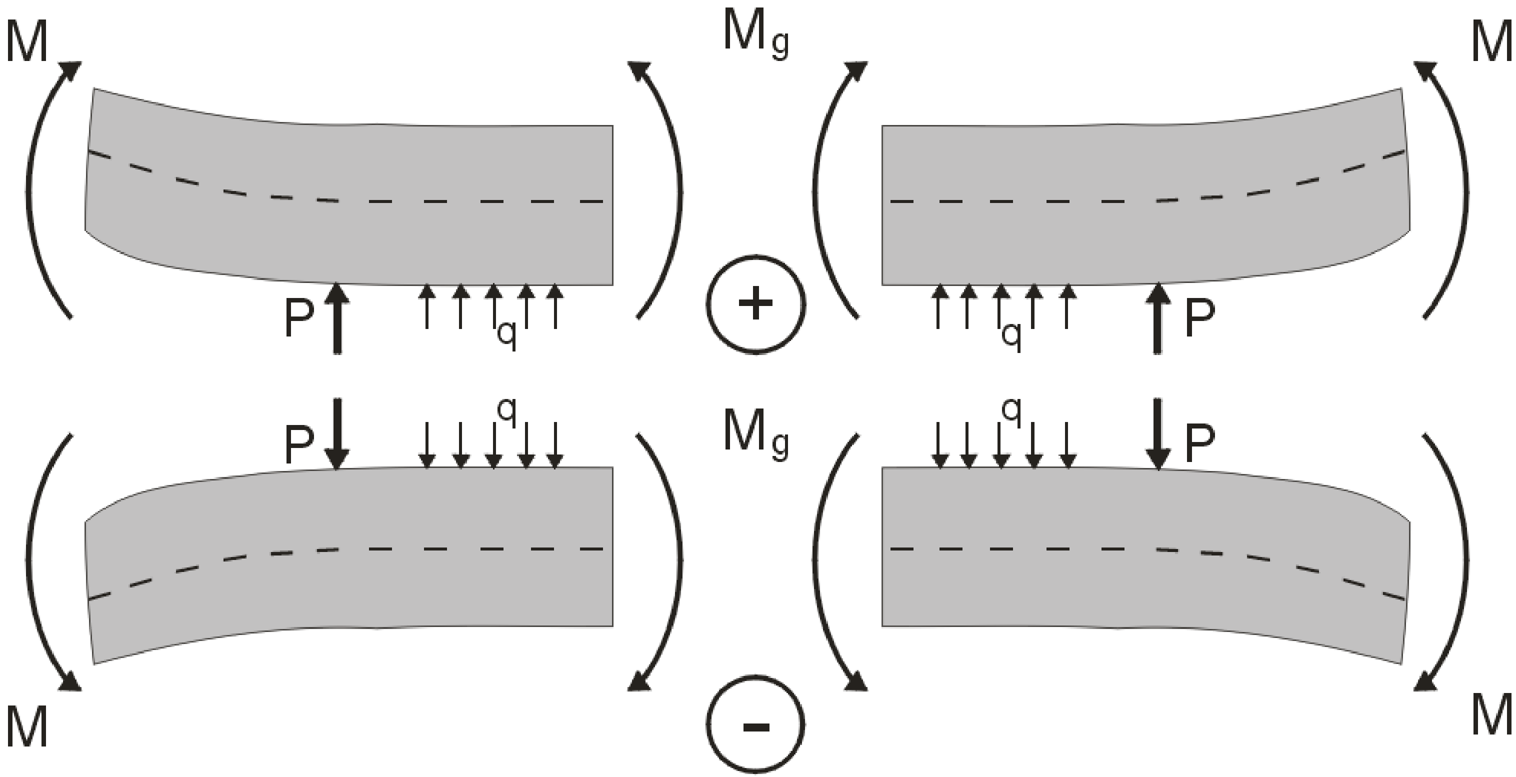


Moment gnący M_g równa się algebraicznej sumie momentów obciążeń zewnętrznych działających po jednej stronie przekroju belki względem środka ciężkości tego przekroju.

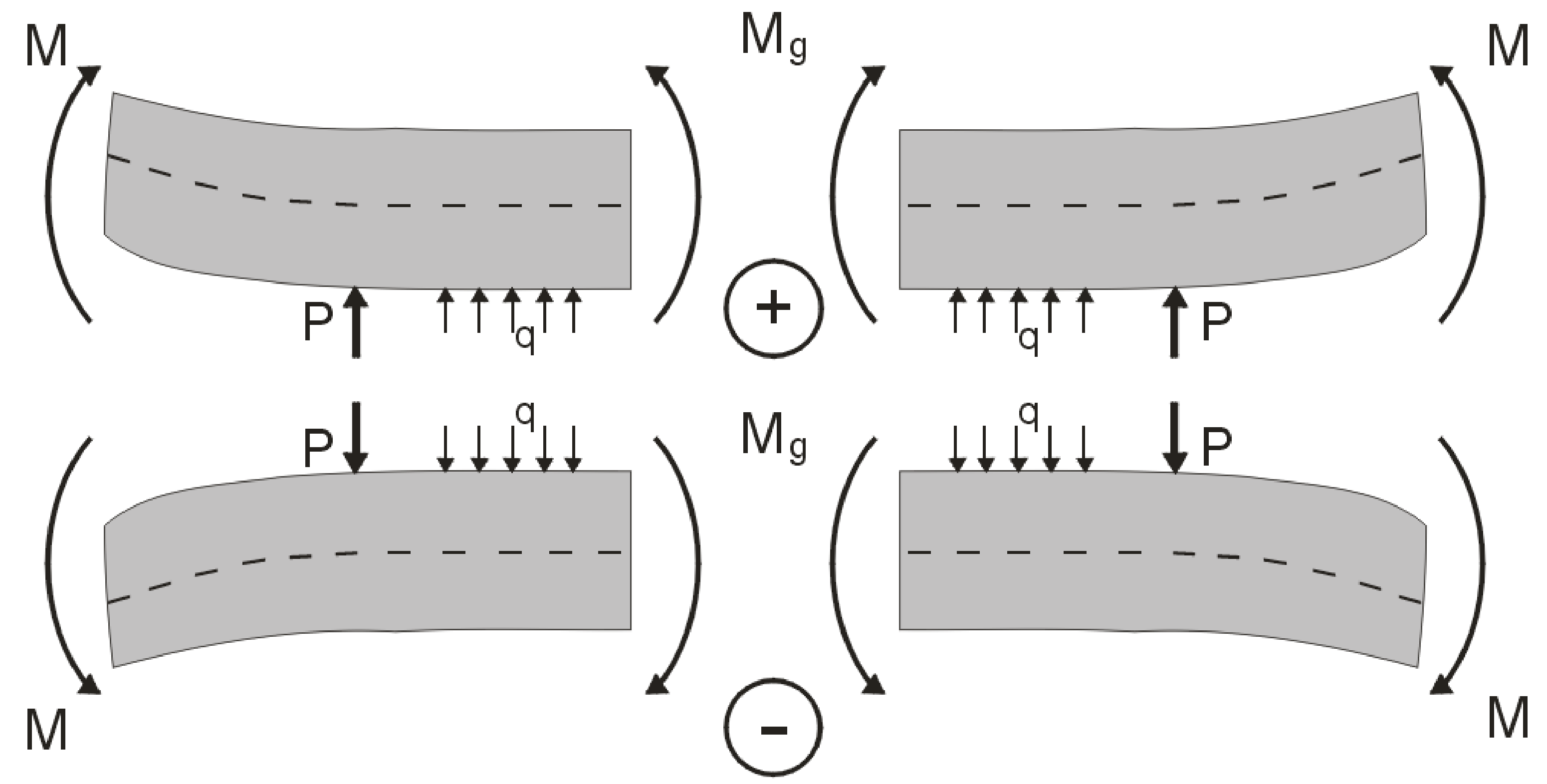
P – siła skupiona

q – obciążenie rozłożone

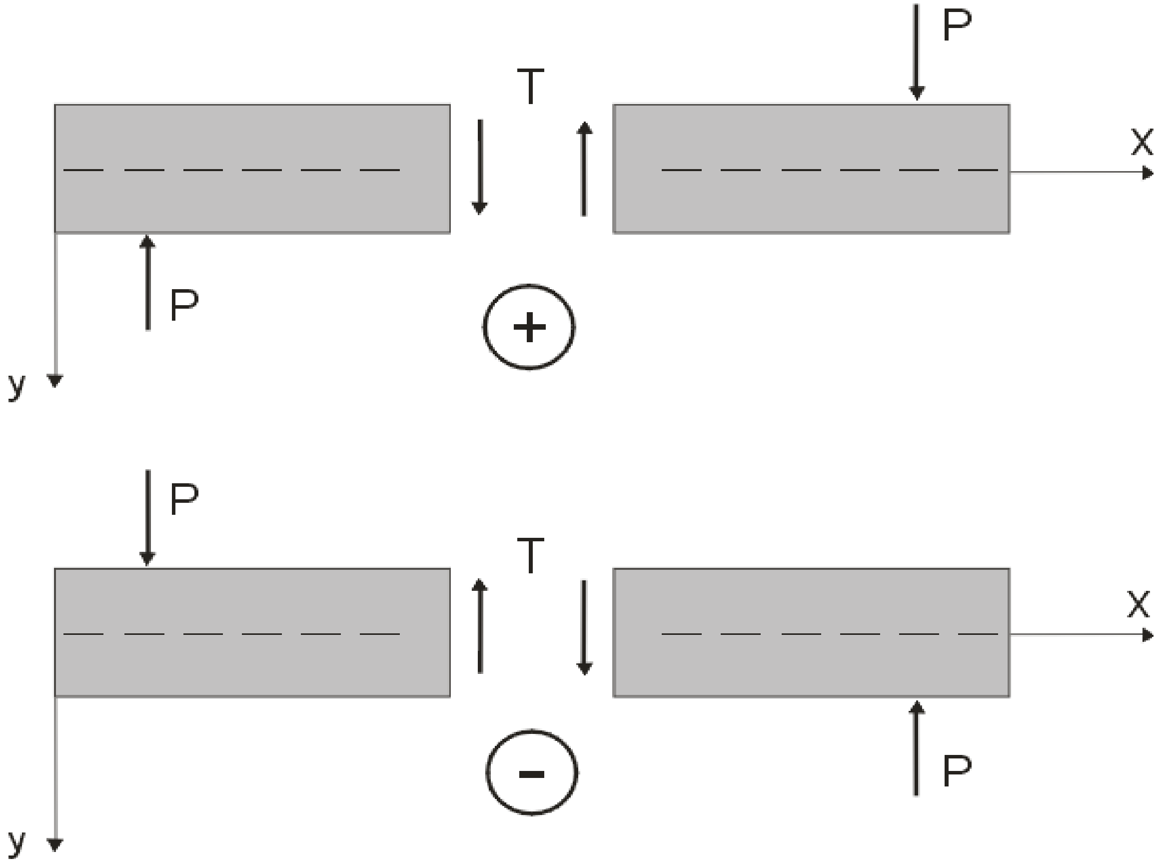
M – moment skupiony czyli para sił



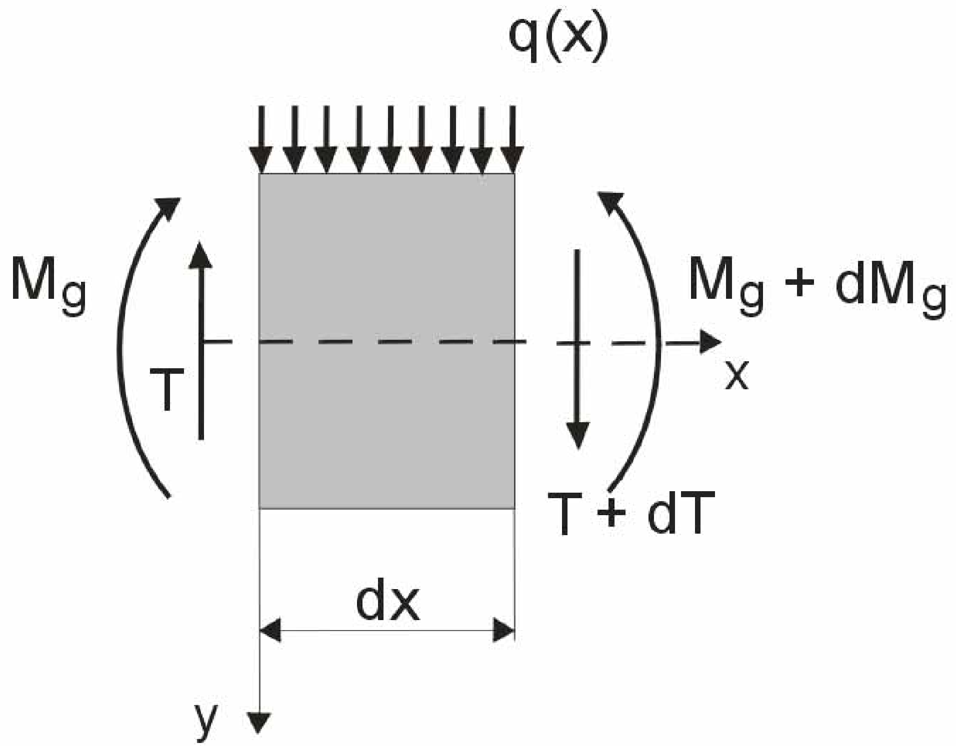
Jeśli zewnętrzna siła skupiona *P*, rozłożone obciążenie *q* lub moment skupiony *M* wygina utwierdzoną w rozważanym przekroju belkę wypukłością w dół, powoduje w tym przekroju dodatni moment gnący, a jeśli wygina ją do góry – ujemny moment gnący. W takim razie siła *P* lub obciążenie rozłożone q zwrócone do góry wywołują dodatni moment gnący, a zwrócone w dół – ujemny.

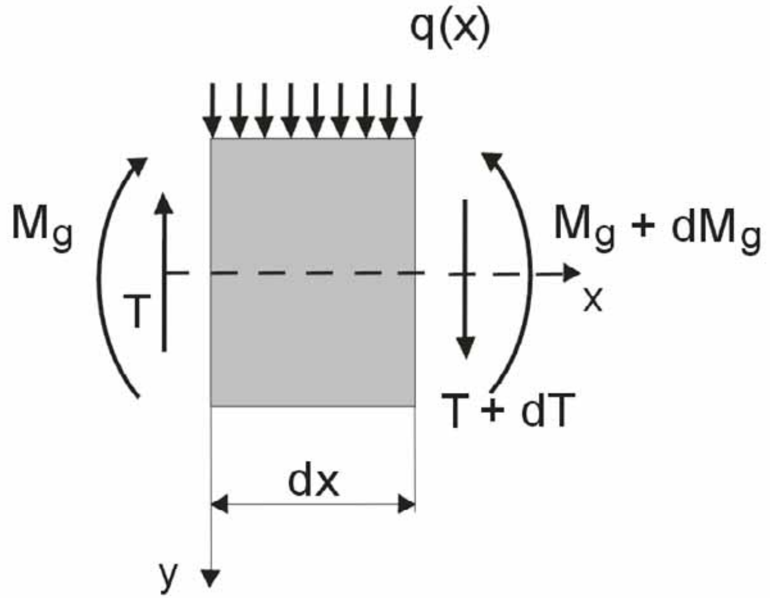


Siła poprzeczna *T* jest równa algebraicznej sumie składowych sił zewnętrznych prostopadłych do osi belki, działających po jednej stronie rozważanego przekroju. Składowa siły zewnętrznej leżąca po lewej stronie przekroju zwrócona do góry wywołuje dodatnią siłę poprzeczną a zwrócona w dół – ujemną. Składowa siły zewnętrznej leżąca po prawej stronie przekroju zwrócona w dół wywołuje dodatnią siłę poprzeczną, a zwrócona w górę - ujemną.



Moment gnący $M_g(x)$, siła poprzeczna $T(x)$ i obciążenie rozłożone wzdłuż osi belki $q(x)$ są ze sobą związane zależnościami różniczkowymi. Aby te zależności wyprowadzić, rozważymy element belki o długości dx.

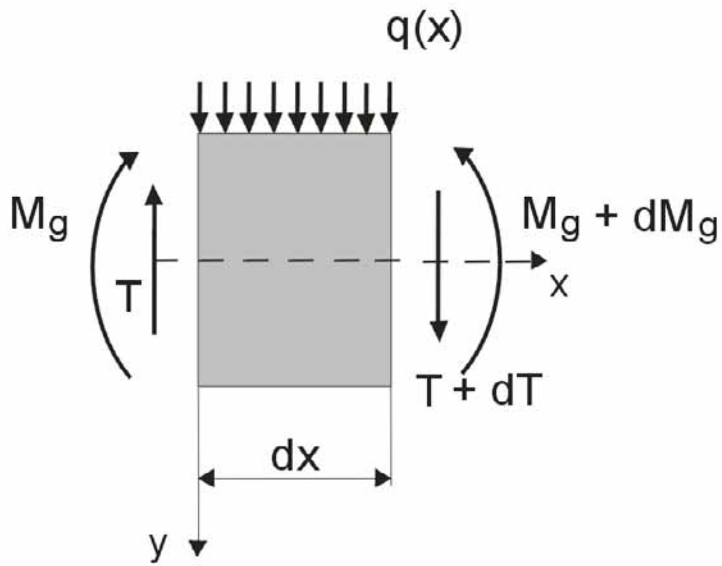




Warunki równowagi elementu belki mają postać

$$-T + q dx + (T + dT) = 0$$

$$M_g + T dx - (M_g + dM_g) - q dx \frac{dx}{2} = 0$$

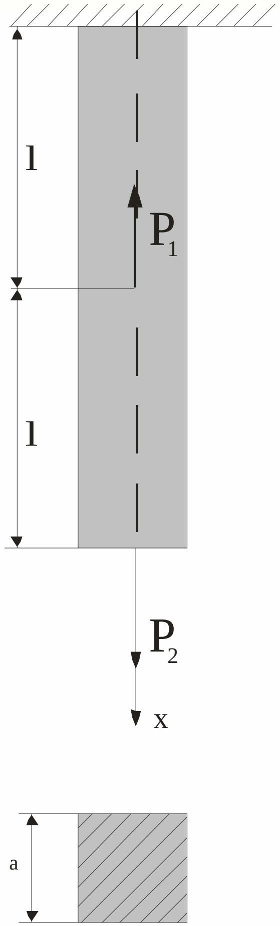


skąd po uproszczeniu i pominięciu wielkości małych wyższego rzędu otrzymujemy

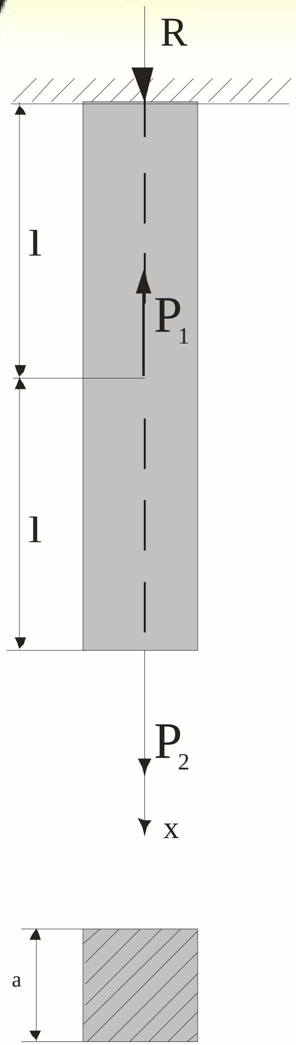
$$T = \frac{dM_g}{dx}$$

$$q = -\frac{dT}{dx} = -\frac{d^2 M_g}{dx^2}$$

Wzory te stanowią zapis *twierdzenia* ***Schwedlera***

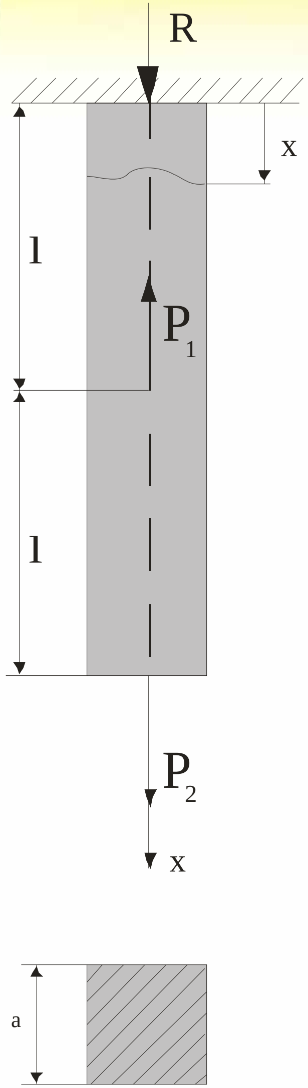


Narysować wykres sił normalnych w pręcie o przekroju kwadratowym zamocowanym górnym końcem, który jest otoczony siłami osiowymi P_1 = 5 kN, P_2 = 3 kN. Długość l = 0.5 m



W miejscu zamocowania pręta wystąpi reakcja R, którą wyliczamy z warunków równowagi

$$P_2 - P_1 + R = 0\,, \qquad R = P_1 - P_2 = \ 2\ kN$$



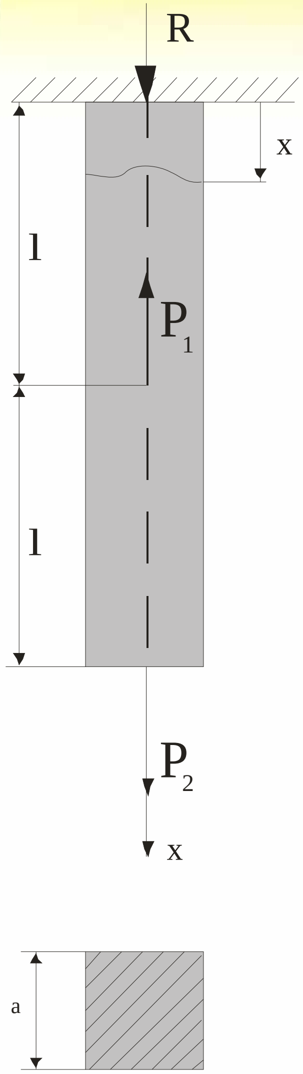
Współrzędną x będziemy odmierzać od górnego końca pręta. Po podzieleniu pręta na dwa przedziały otrzymamy następujące równania sił normalnych

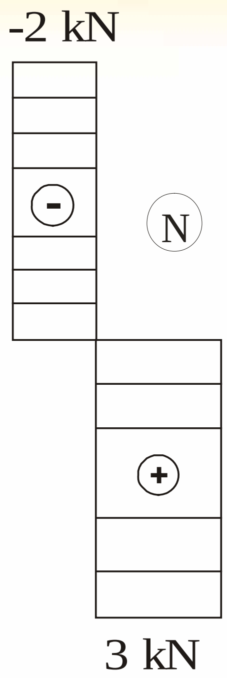
Przedział 1 $(0 \le x \le l)$

$N_1 = P_2 – P_1 = -R = -2$ kN

Przedział 2 $(0 \le x \le 2l)$

$N_2 = P_2 = P_1 - R = 3$ kN

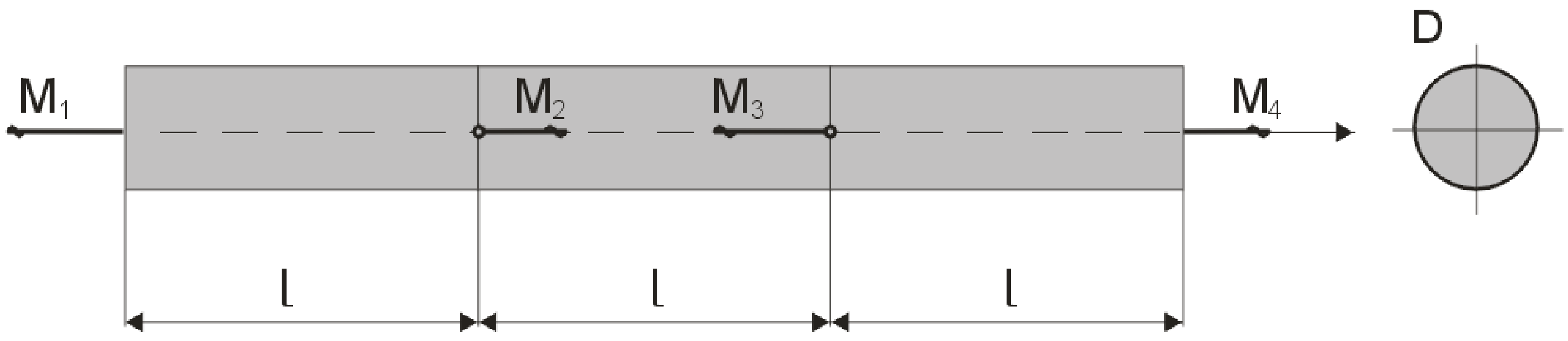


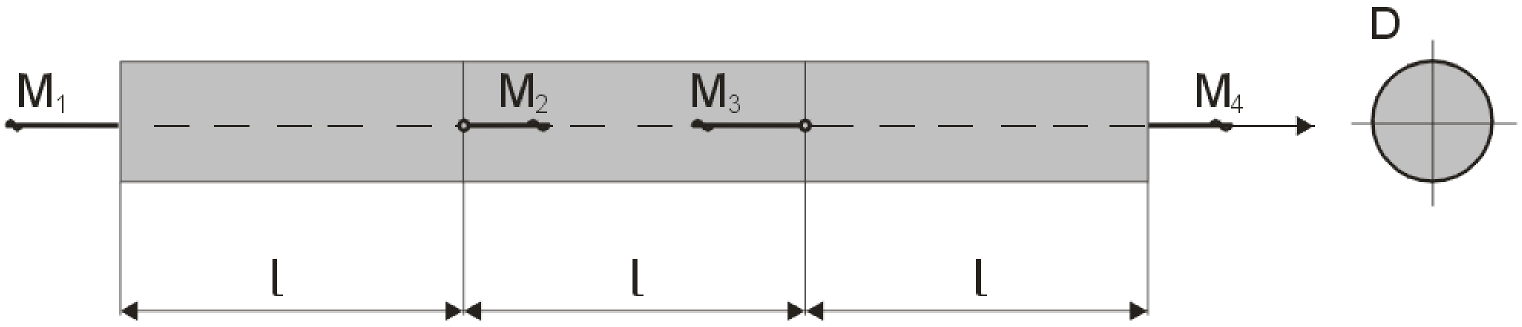


wykres sił
normalnych

Siły normalne, jak widać, są stałe w poszczególnych przedziałach

Narysować wykres momentów skręcających M_s w pręcie o przekroju kołowym, który jest obciążony w czterech przekrojach parami sił o momentach równych
M_1 = 6 kN·m, M_2 = 10 kN·m, M_3 = 8 kN·m. Długość l = 0.25 m

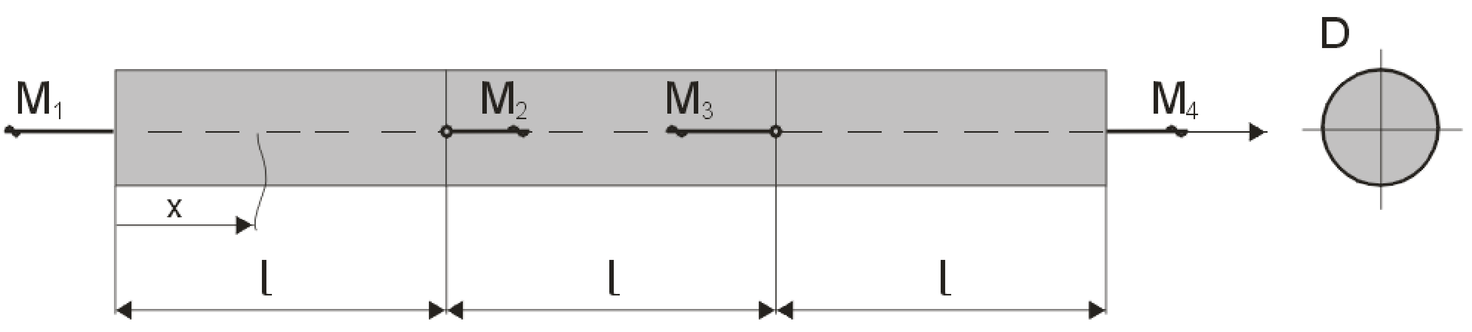




Z warunków równowagi wyliczamy M_4

$$M_1 - M_2 + M_3 - M_4 = 0$$

$$M_4 = M_1 - M_2 + M_3 = 6 - 10 + 8 = 4\ kN \cdot m$$



Współrzędną x będziemy odmierzać od lewego końca pręta. Po podzieleniu pręta na przedziały i zastosowaniu reguł określania M_s w przekroju pręta otrzymamy:

Przedział 1 $(0 \le x \le l)$

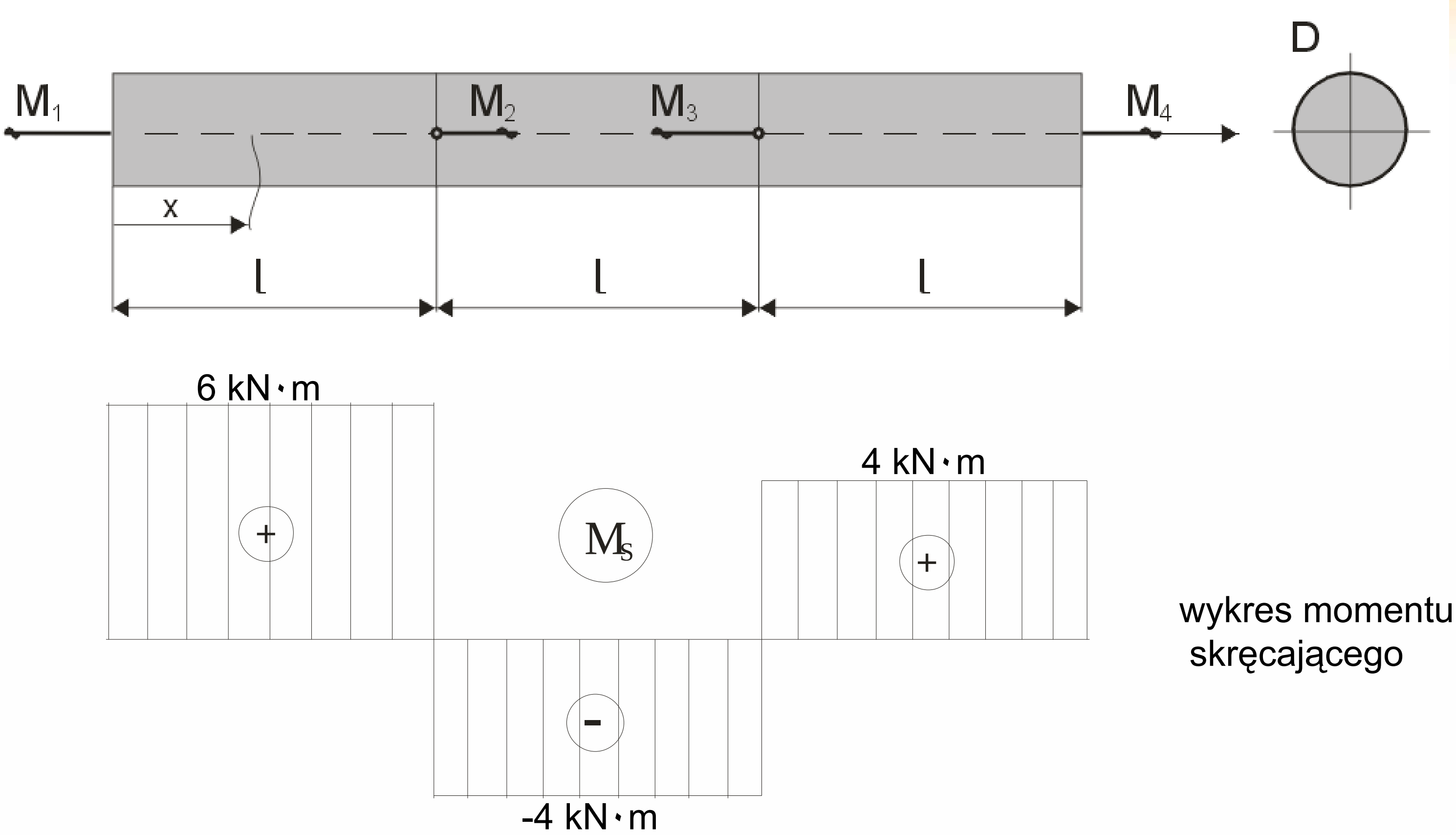
$M_{s1} = M_1 = M_4 - M_3 + M_2 = 6\ kN \cdot m$

Przedział 2 $(l \le x \le 2l)$

$M_{s2} = M_1 – M_2 = M_4 – M_3 = -4\ kN \cdot m$

Przedział 3 $(2l \le x \le 3l)$

$M_{s3} = M_1 – M_2 + M_3 = M_4 = 4\ kN \cdot m$



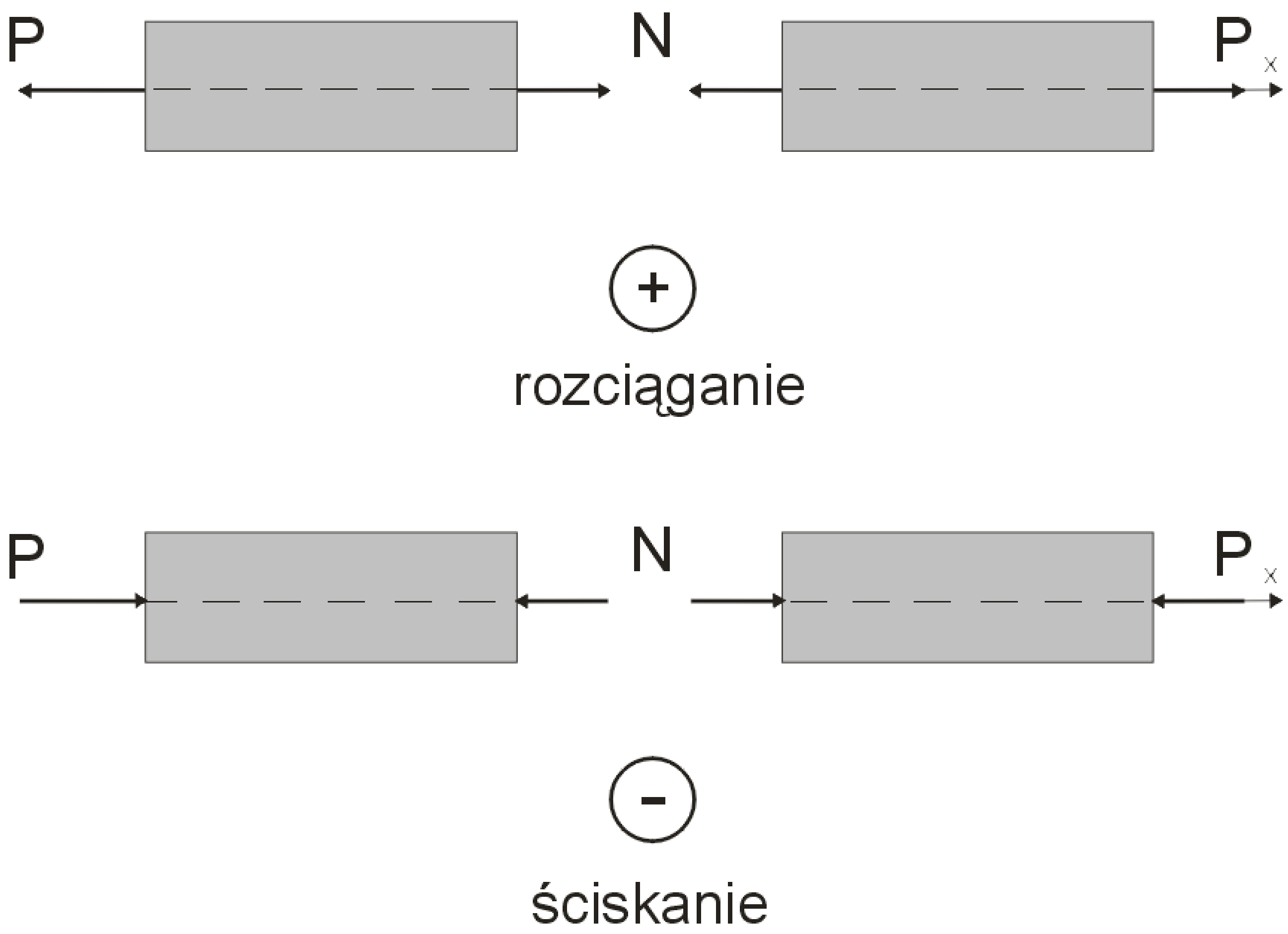
Wartości momentów skręcających są stałe w poszczególnych przedziałach

Rodzaje elementarnych przypadków wytrzymałości pręta

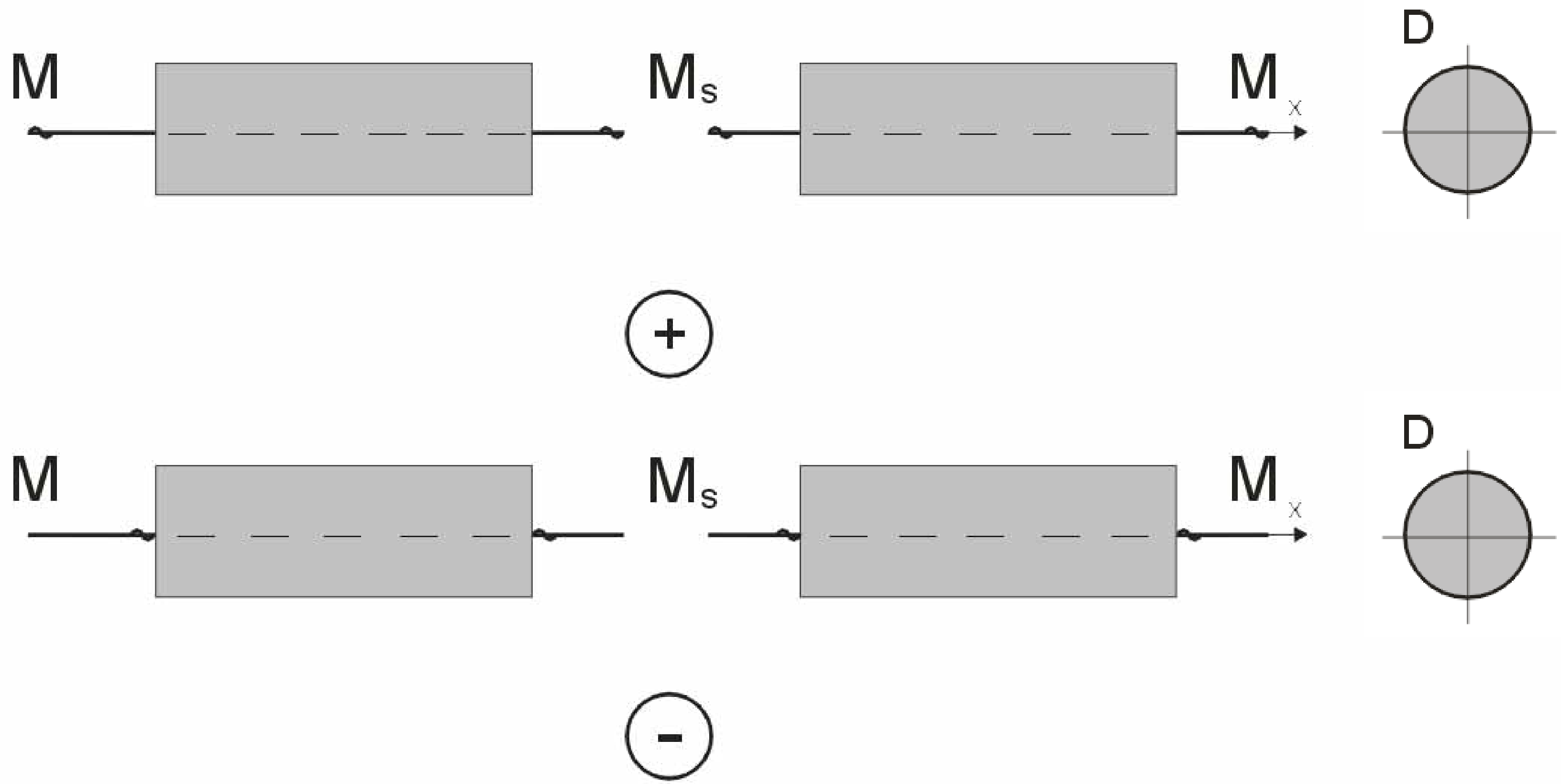
Istnieją cztery elementarne przypadki wytrzymałości pręta, które charakteryzują się występowaniem pojedynczej składowej siły wewnętrznej w jego przekroju. W dwóch przypadkach wymaga się dodatkowo, aby przekrój miał określony kształt.

Modele te są najprostsze, mające jednak duże znaczenie praktyczne. Pozwalają one bowiem sformułować zgodnie z elementarnymi teoriami kryteria oceny wytrzymałości i sztywności dla wielu modelowanych prętem elementów maszyn i budowli.

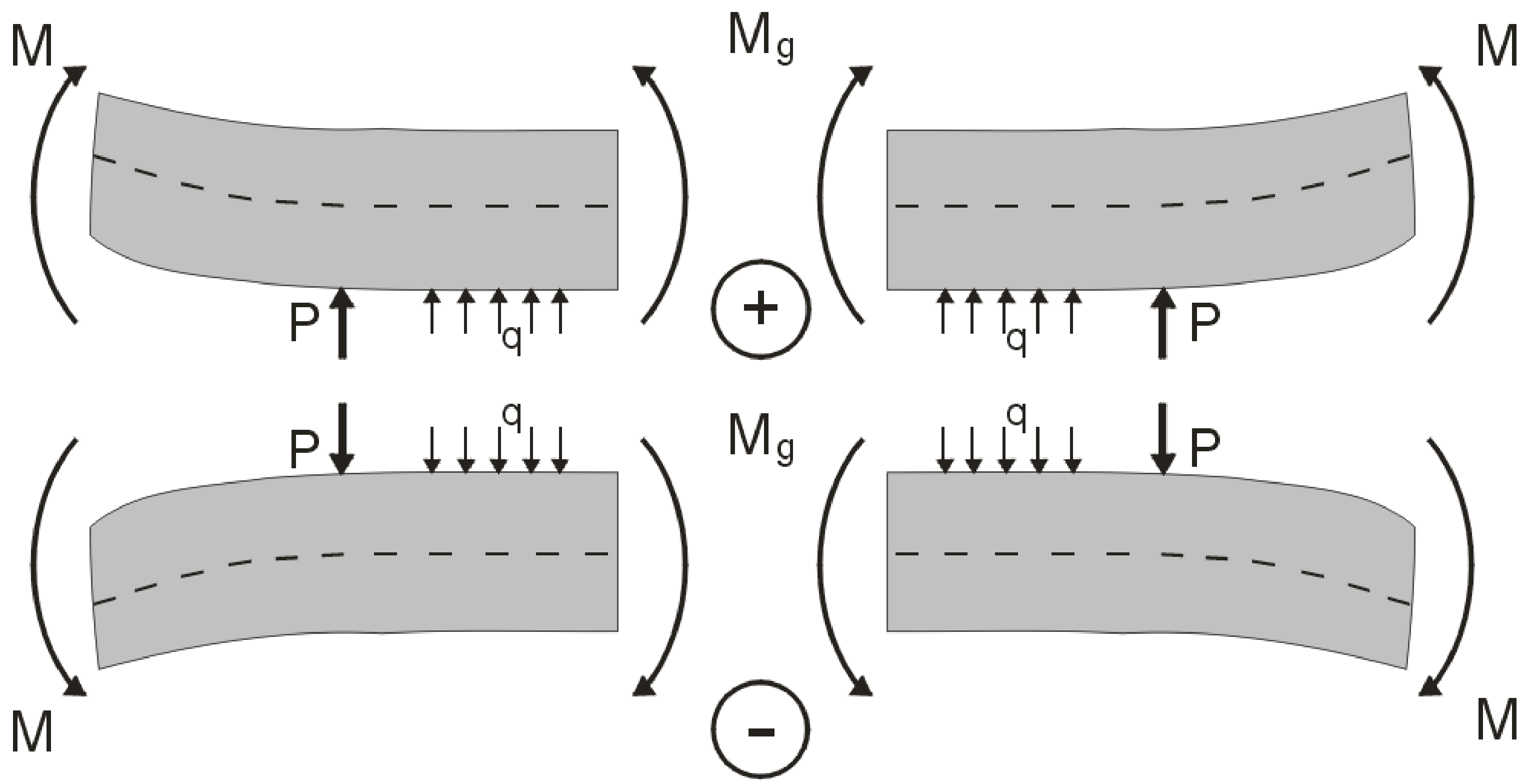
1. ***Rozciąganie*** lub ***ściskanie*** pręta, w przekroju którego występuje siła normalna *N*.



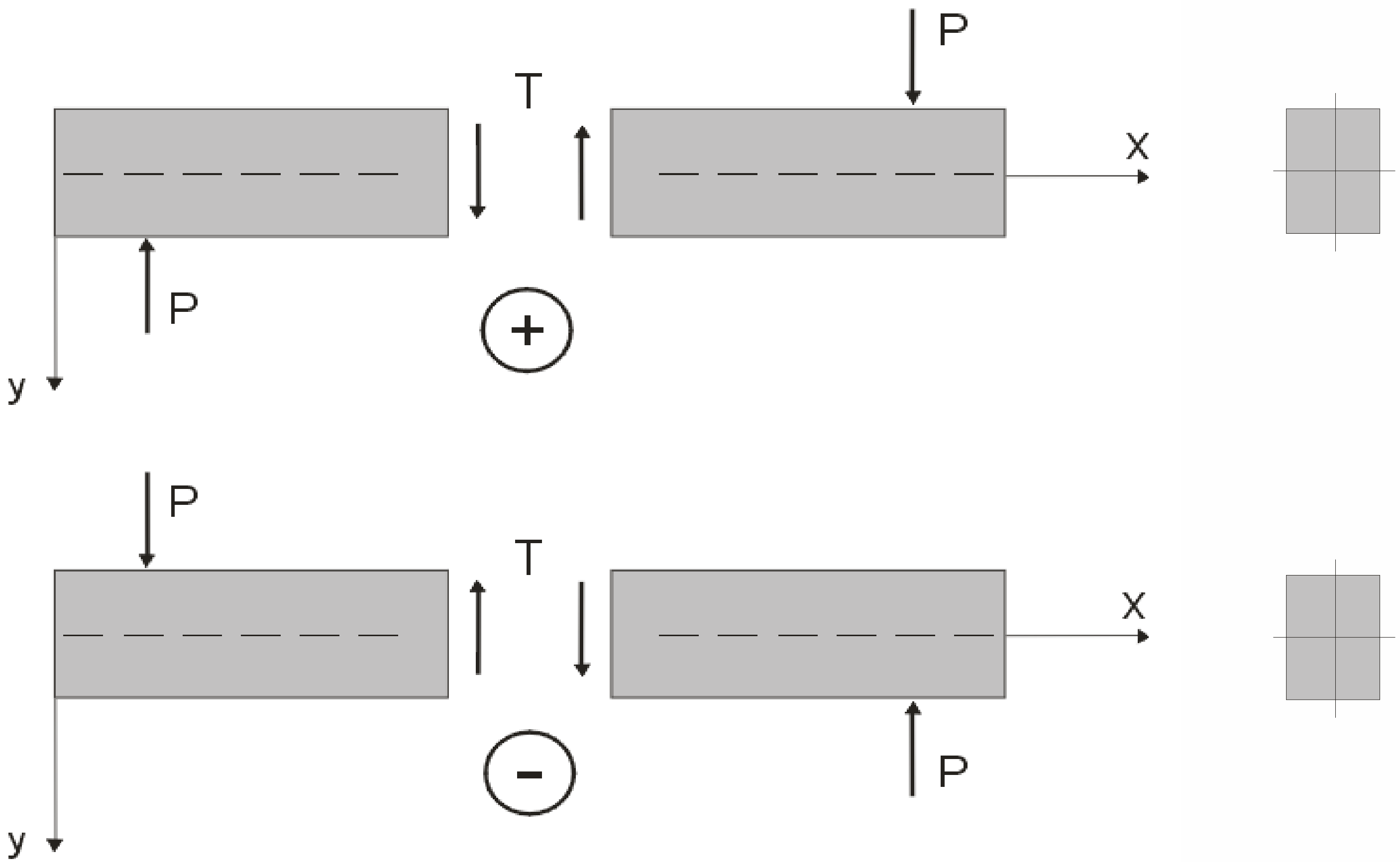
2. ***Skręcanie*** pręta o przekroju kołowym (pierścieniowym), w którym działa moment skręcający M_s.



3. ***Zginanie*** równomierne proste belki. W jej przekroju działa wektor momentu gnącego M_g, którego kierunek pokrywa się z jedną z głównych centralnych osi bezwładności tego przekroju.



4. ***Ścinanie*** pręta o przekroju prostokątnym, w którym działa siła poprzeczna *T* skierowana wzdłuż osi symetrii przekroju oraz pomijalnie mały moment gnący.



Dla wszystkich elementarnych przypadków wytrzymałości przyjmuje się następujące wspólne założenia.

1. Przekrój pręta pozostaje po odkształceniu płaski
   (w przypadku ścinania pręta jest to bardzo radykalne uproszczenie).

2. Pręt jest wykonany z materiału liniowosprężystego.