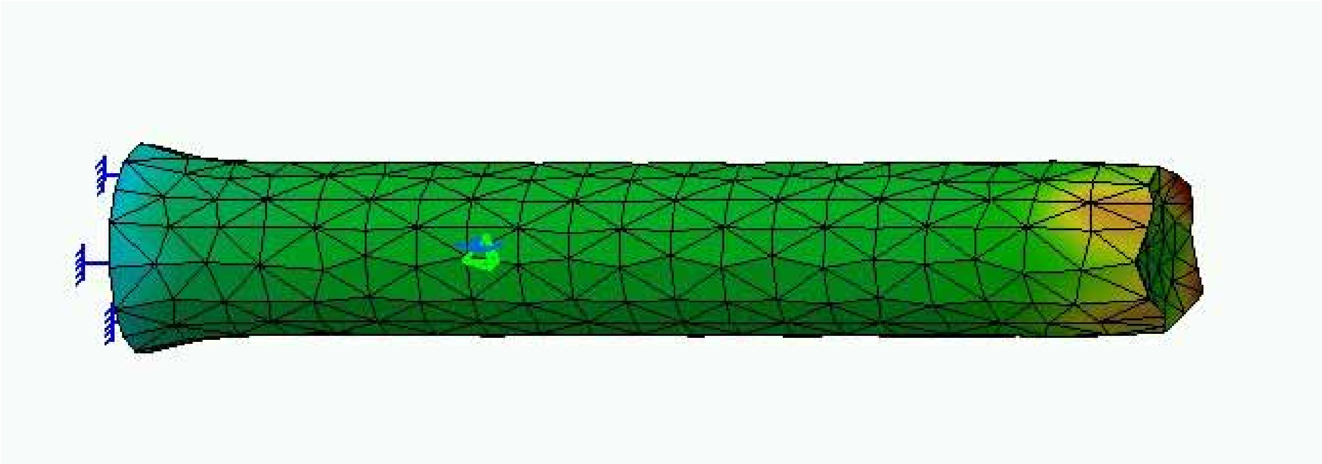
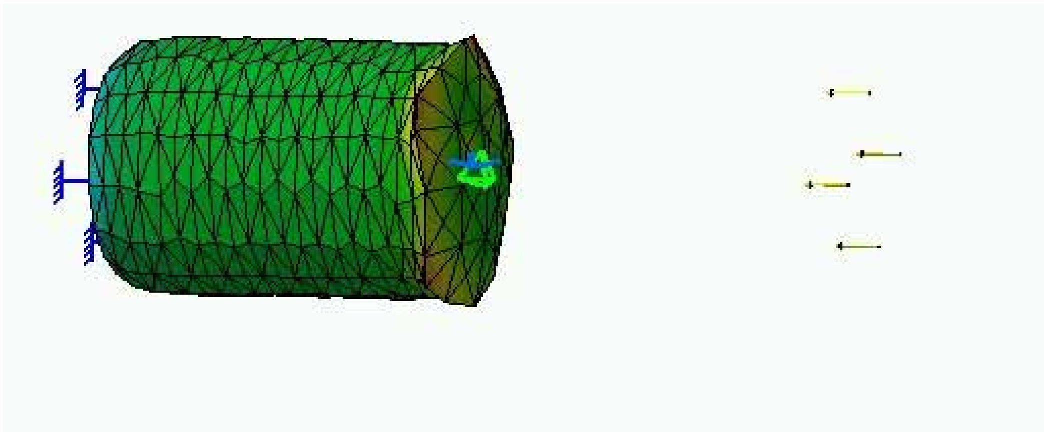
KATEDRA WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW
I METOD KOMPUTEROWYCH MECHANIKI

Podstawowe przypadki (stany) obciążenia elementów :

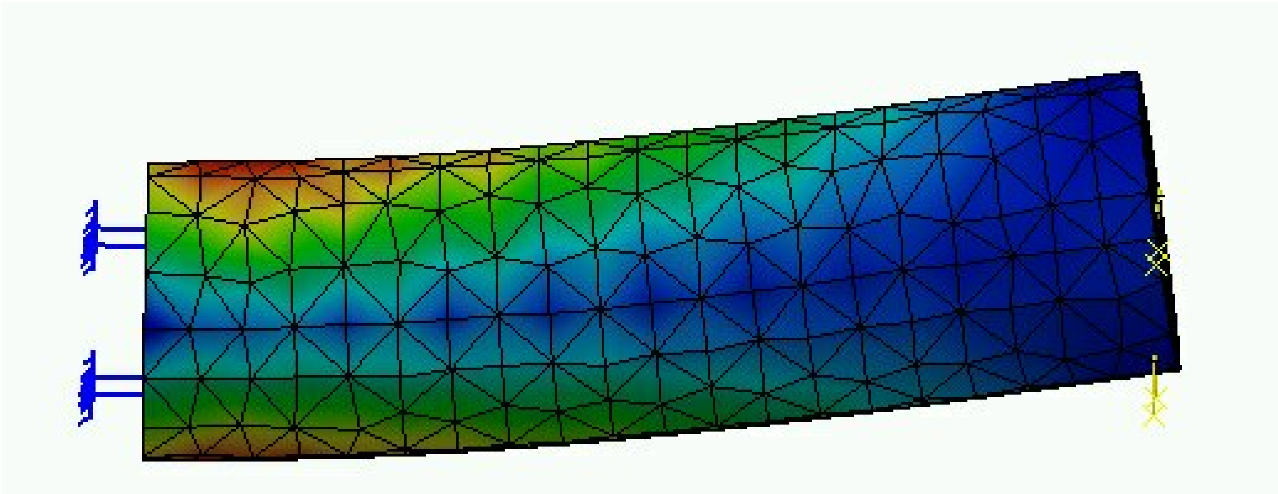
1. Rozciąganie lub ściskanie
2. Zginanie
3. Skręcanie
4. Ścinanie

Rozciąganie lub ściskanie

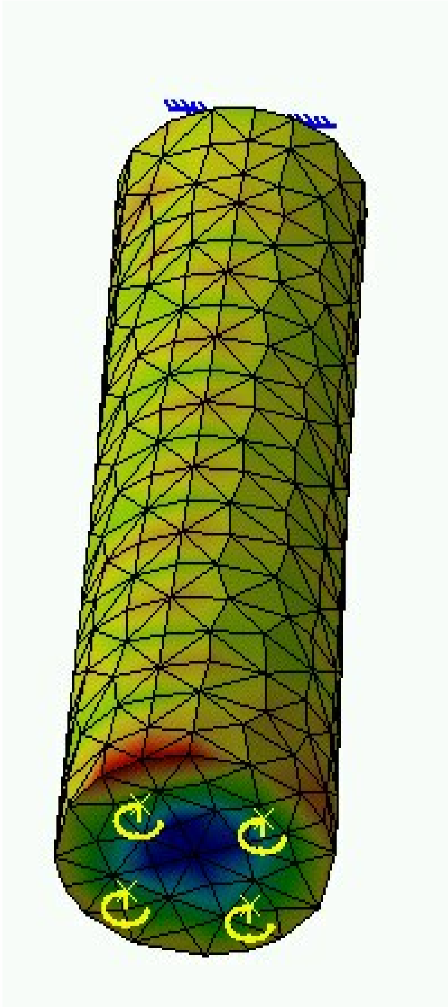


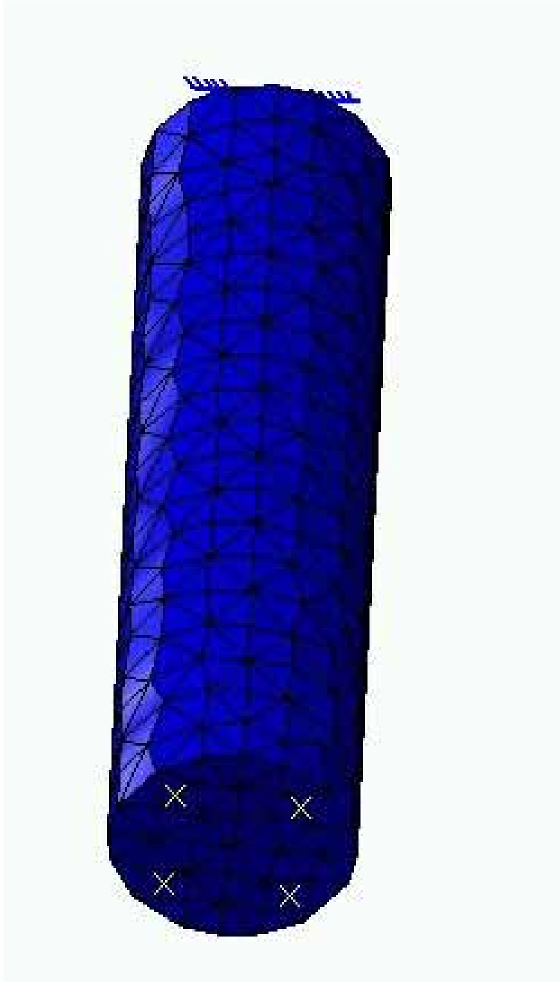


Zginanie

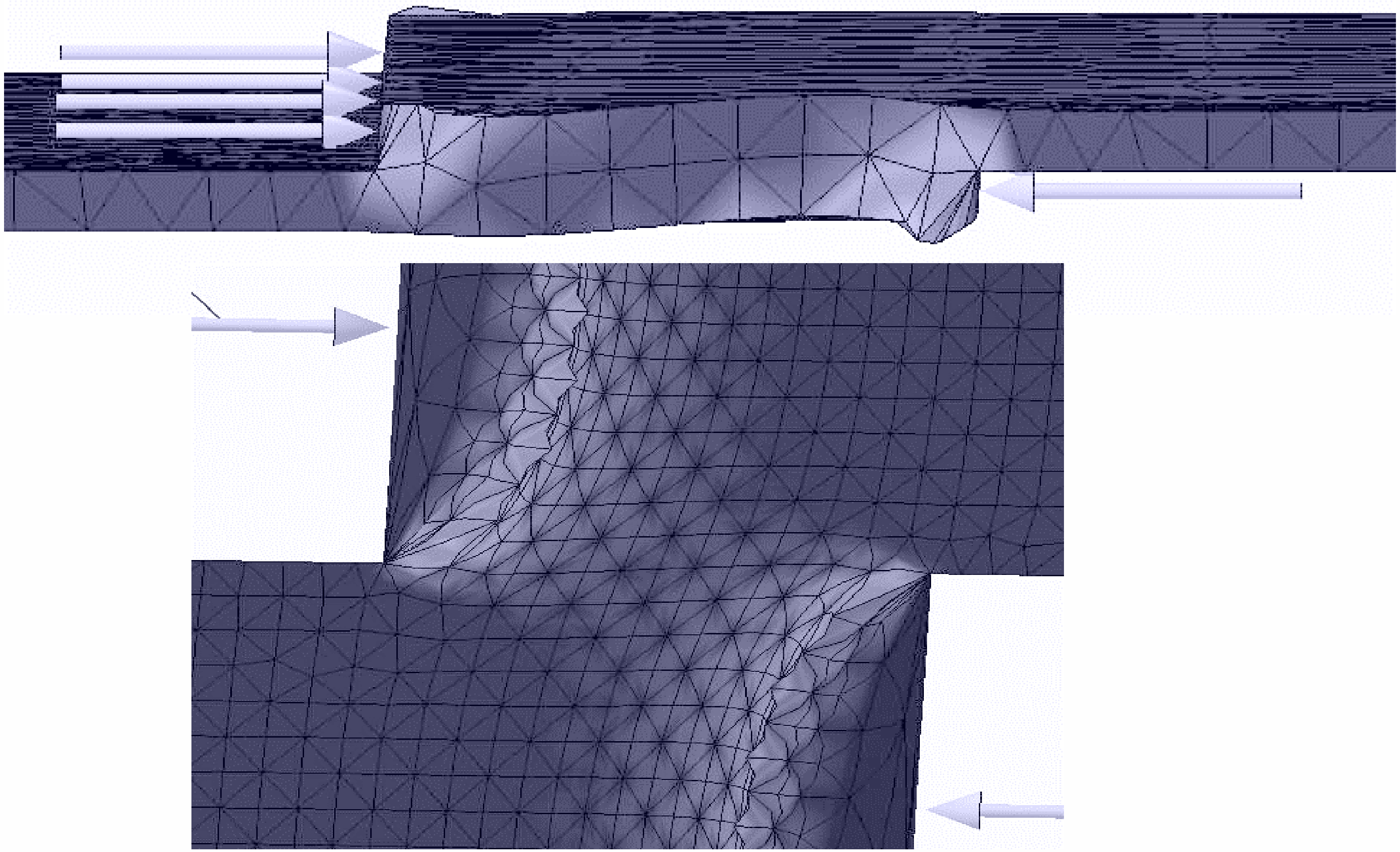


Skręcanie





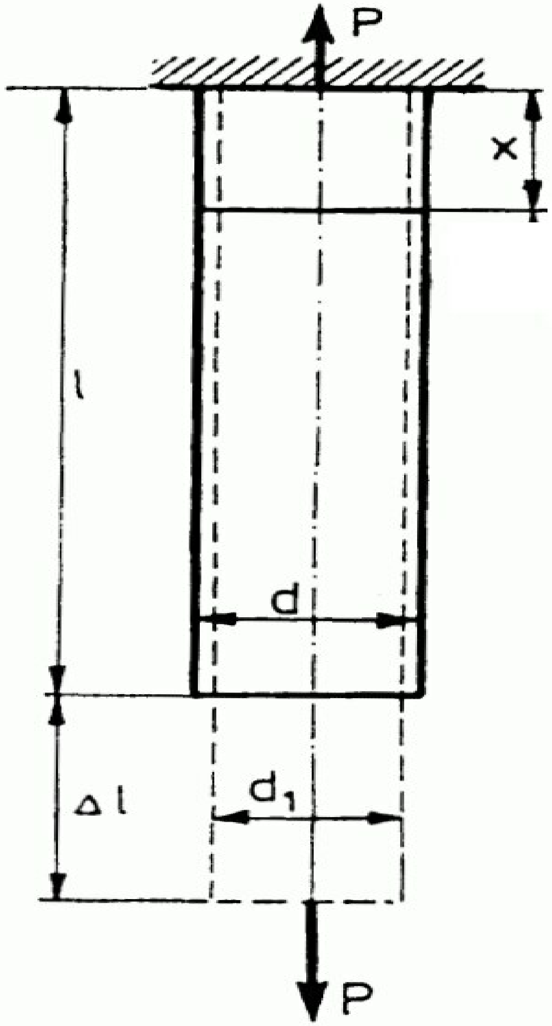
Ścinanie



1. Pręt rozciągany lub ściskany

Przebieg wykładu

1. **Ogólne sformułowanie zagadnienia**
2. **Warunki równowagi elementu pręta**
3. **Warunki geometryczne** – przemieszczenie osiowe
   - odkształcenie względne
4. **Związki fizyczne** – prawo Hooke'a
   - współczynnik Poissona
5. **Podsumowanie**
6. **Przykładowe zadania**



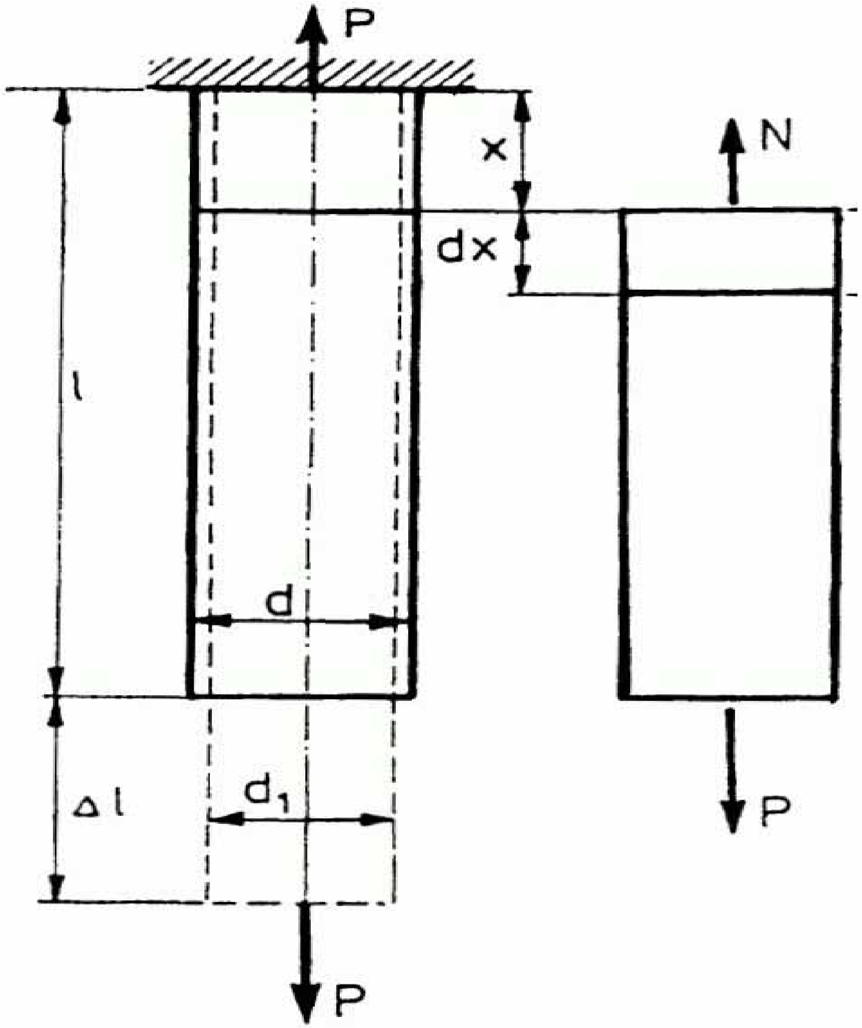
Pręt o przekroju *A* i długości *l* jest zamocowany górnym końcem i obciążony na końcu dolnym siłą osiową *P*.

A – pole przekroju

d - średnica pręta

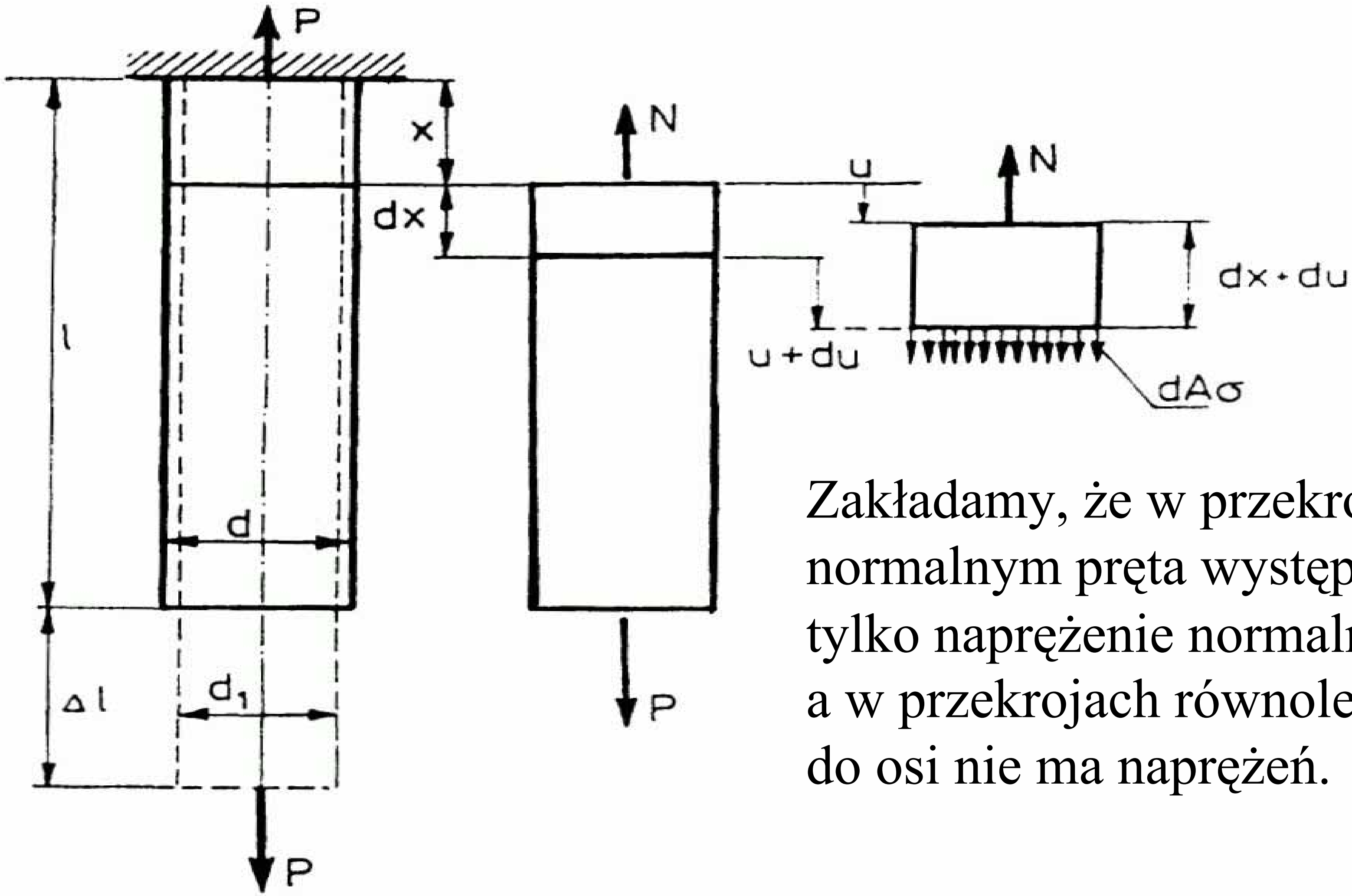
l – długość

P – siła obciążająca

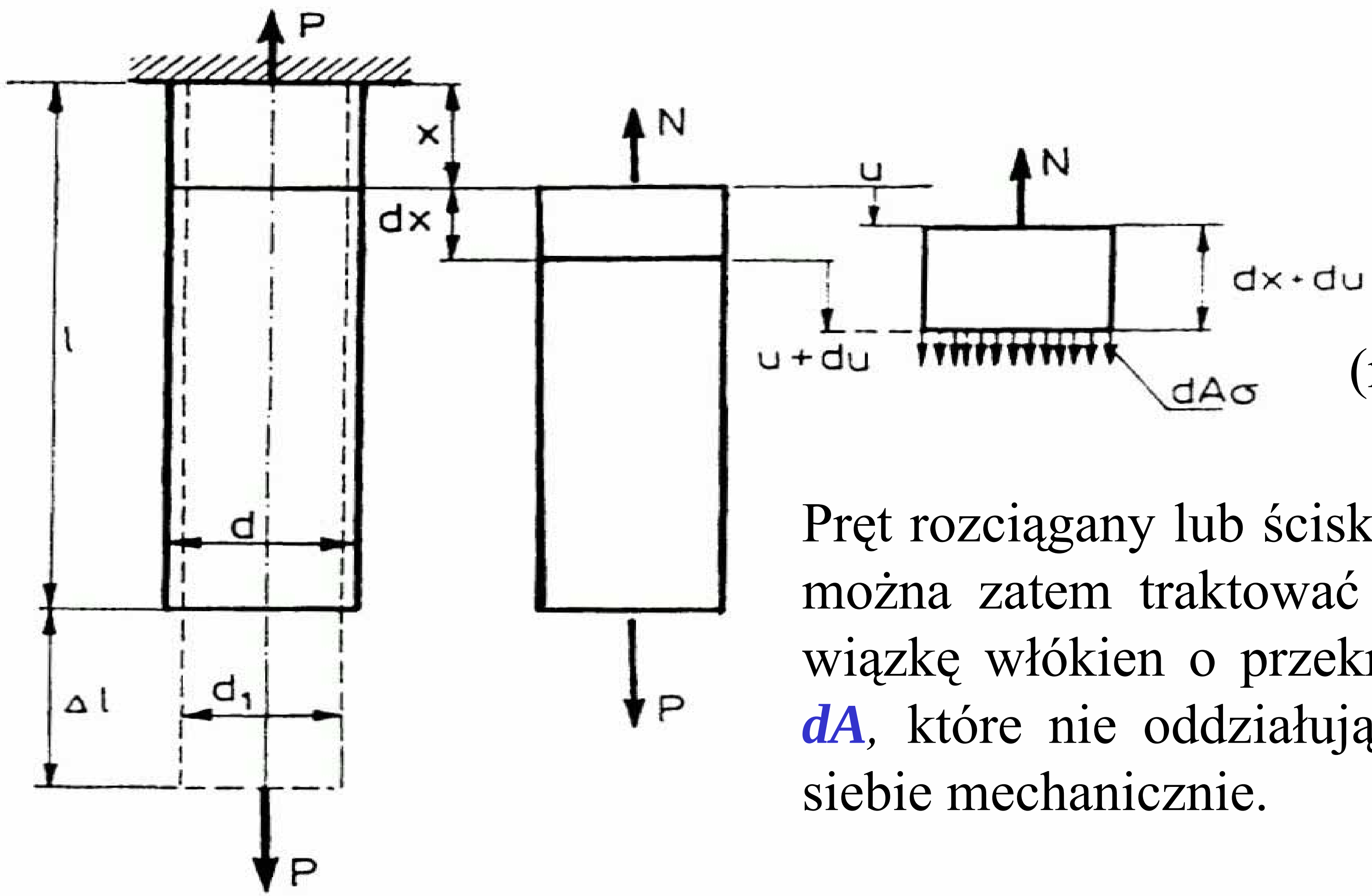


Siła P wywołuje w dowolnym, odległym o x od górnego końca, przekroju siłę normalną N. W pręcie rozciąganym $N = P$, a ściskanym $N = -P$.

Ciężar własny pręta dla uproszczenia pomijamy.



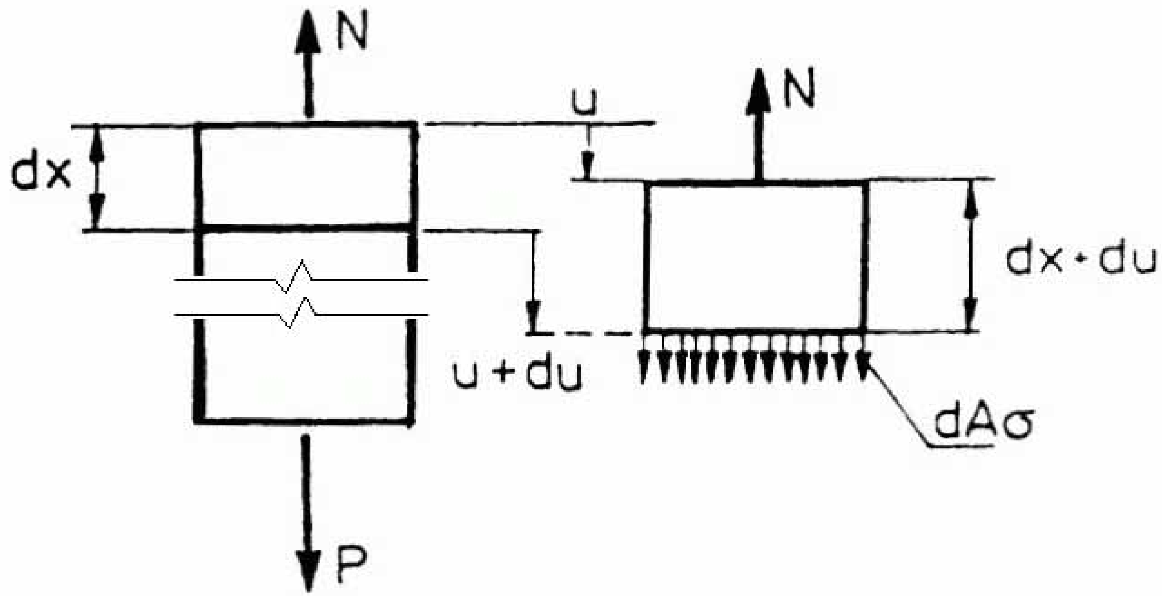
Zakładamy, że w przekroju normalnym pręta występuje tylko naprężenie normalne σ, a w przekrojach równoległych do osi nie ma naprężeń.

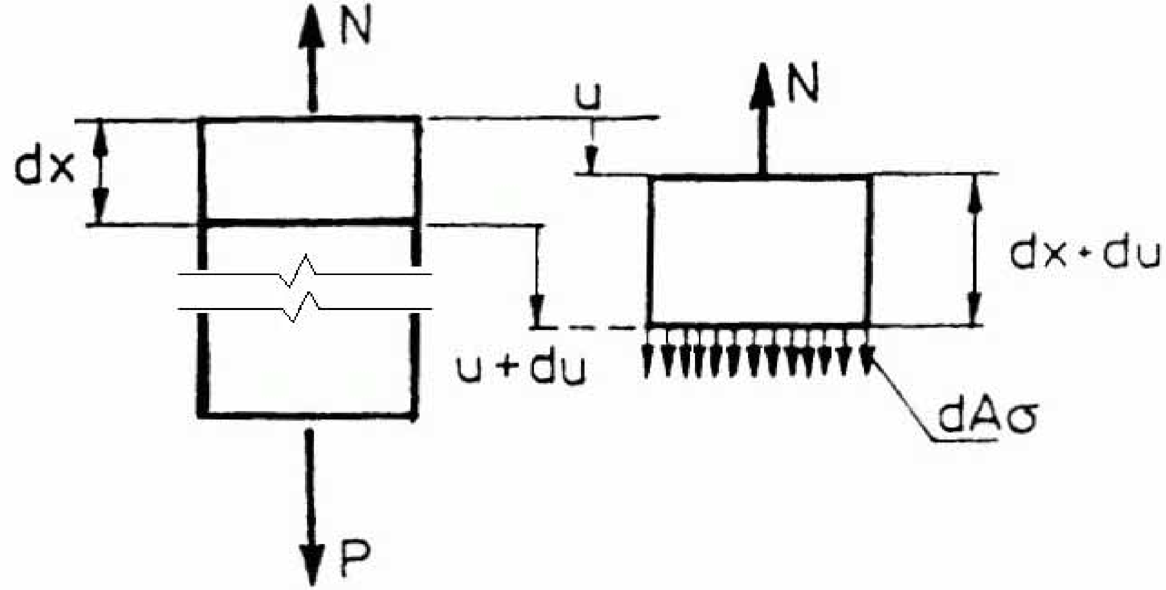


(rys.2.1)

Pręt rozciągany lub ściskany można zatem traktować jak wiązkę włókien o przekroju ***dA***, które nie oddziałują na siebie mechanicznie.

Warunki równowagi elementu pręta





Element pręta o długości *dx* jest obciążony w przekroju górnym siłą normalną *N*, a w przekroju dolnym siłami elementarnymi σ *dA*.

Warunek równowagi elementu będzie miał następującą postać :

$$\int_A \sigma \, dA - N = 0 \qquad (2.1)$$

Warunki geometryczne

Przemieszczenie osiowe

Rozważmy odkształcenie odcinka pręta o pierwotnej długości dx. Górny przekrój przemieści się w kierunku osi x o u, a dolny o $u + du$. Po odkształceniu odcinek pręta będzie miał długość $dx + du$.

Odkształcenie względne

Wprowadzimy bezwymiarową wielkość ε zwaną *odkształceniem względnym* lub krótko - *odkształceniem*

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \tag{2.2}$$

W pręcie rozciąganym $\varepsilon > 0$ (wydłużenie względne), a w pręcie ściska-nym $\varepsilon < 0$ (skrócenie względne).

Uwzględniając ε, przemieszczenie dolnego końca pręta $u_{x=l}$, równe wydłużeniu pręta Δl, można obliczyć następująco :

$$u_{x=l} = \Delta l = \int_0^l \varepsilon \, dx \qquad (2.3)$$

W szczególnym, ale bardzo często spotykanym przypadku, gdy ε jest niezależne od x, otrzymamy

$$\Delta l = \varepsilon l, \quad \text{czyli} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad (2.4)$$

Związki fizyczne

Prawo Hooke'a

W przypadku materiału liniowosprężystego zachodzi liniowy związek między naprężeniem σ a odkształceniem ε, zwany *prawem Hooke'a :*

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}} \tag{2.5}$$

Gdzie : E - stała sprężysta materiału, zwana *współczynnikiem sprężystości podłużnej* lub *modułem Younga*, w N/m^2 .

Zmiana wymiaru poprzecznego

Doświadczenie wykazuje, że wydłużeniu **ε** pręta towarzyszy zmniejszenie wymiaru poprzecznego **ε′**

$$\boxed{\varepsilon' = \frac{d_1 - d}{d}} \qquad (2.6)$$

gdzie: ***d**, **d**$_l$* - wymiar poprzeczny pręta przed odkształceniem i po odkształceniu.

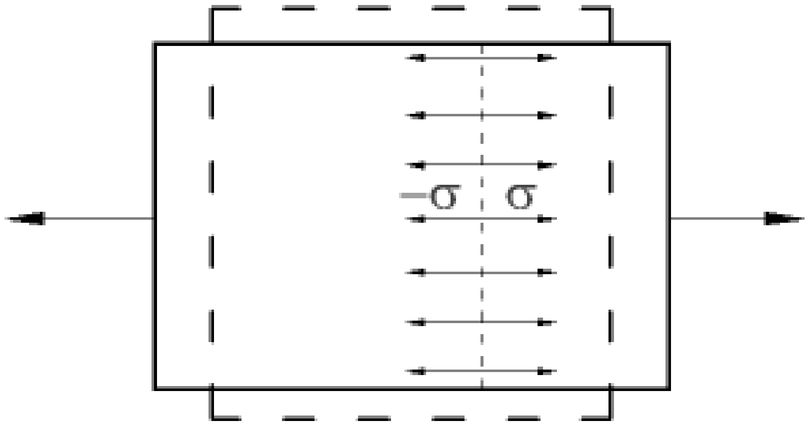
Współczynnik Poissona

Dla materiału liniowosprężystego iloraz ε' i ε jest wartością stałą, zwaną *współczynnikiem Poissona*

$$\boxed{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\nu} \qquad (2.7)$$

Odkształcenie ε' ma zawsze znak przeciwny do σ.

Z założenia płaskości przekroju wynika, że wszystkie włókna ulegają jednakowemu odkształceniu ε.



W świetle związku (2.5) oznacza to, że naprężenia σ są rozłożone równomiernie na całym przekroju pręta.

Naprężenie normalne w pręcie rozciąganym (ściskanym)

Z równania równowagi (2.1) otrzymujemy :

$$\sigma \int_A dA - N = 0$$

Ponieważ :

$$\int_A dA = A$$

Wynika stąd że naprężenie normalne w pręcie rozciąganym (ściskanym) :

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \qquad (2.8)$$

Wydłużenie (skrócenie) pręta

Po wprowadzeniu wyrażenia (2.8) do (2.5), a następnie do (2.3) uzyskujemy następującą zależność

$$\boxed{\Delta l = \int_0^l \frac{N dx}{EA}} \qquad (2.9)$$

Jeśli **N**, **E** oraz *A* nie zależą od **x**, formuła upraszcza się do :

$$\boxed{\Delta l = \frac{Nl}{EA}} \qquad (2.10)$$

Sztywności pręta na rozciąganie (ściskanie)

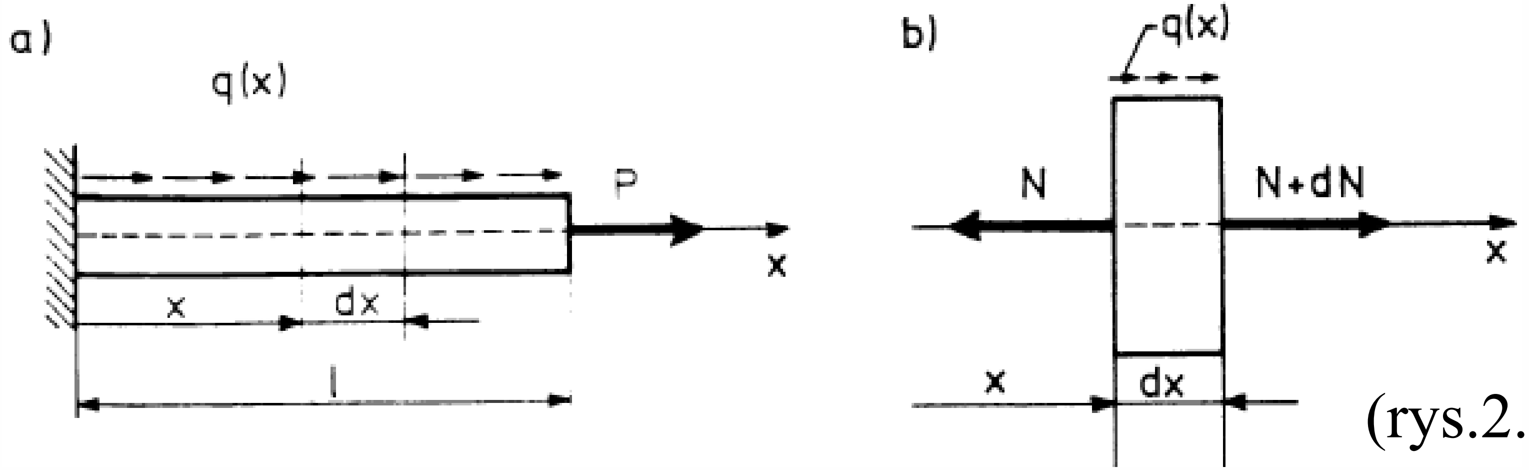
Wielkość ***EA*** nosi nazwę *sztywności pręta na rozciąganie* lub *ściskanie*.

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dx}{EA}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Powyższe wzory opisują w innej formie niż (2.5) prawo Hooke'a

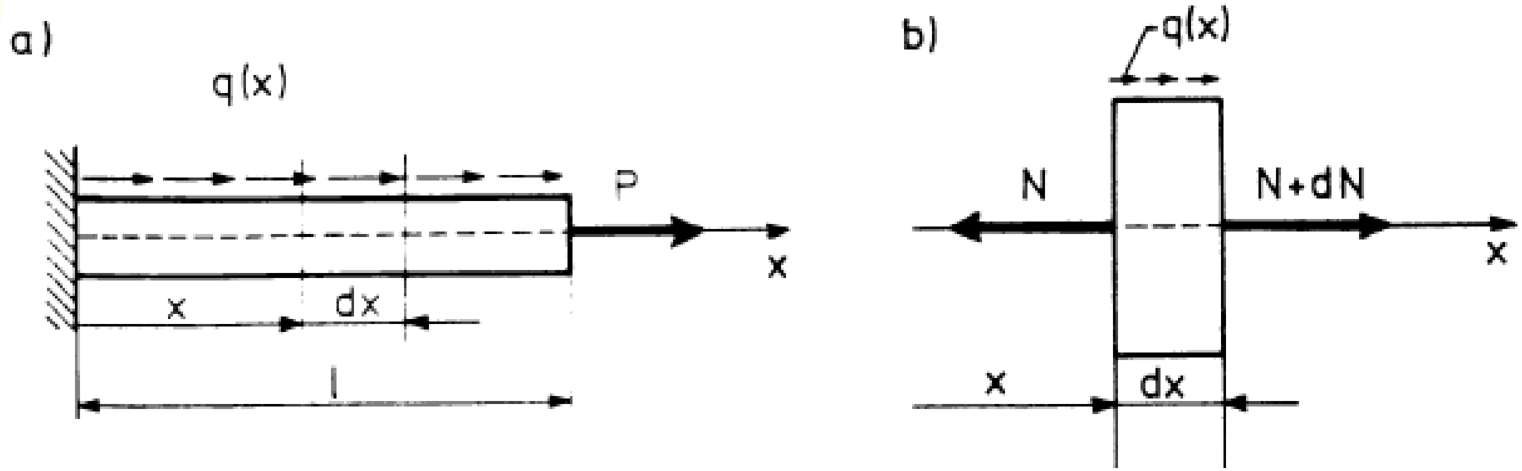
Równanie różniczkowe przemieszczeń osiowych



(rys.2.2)

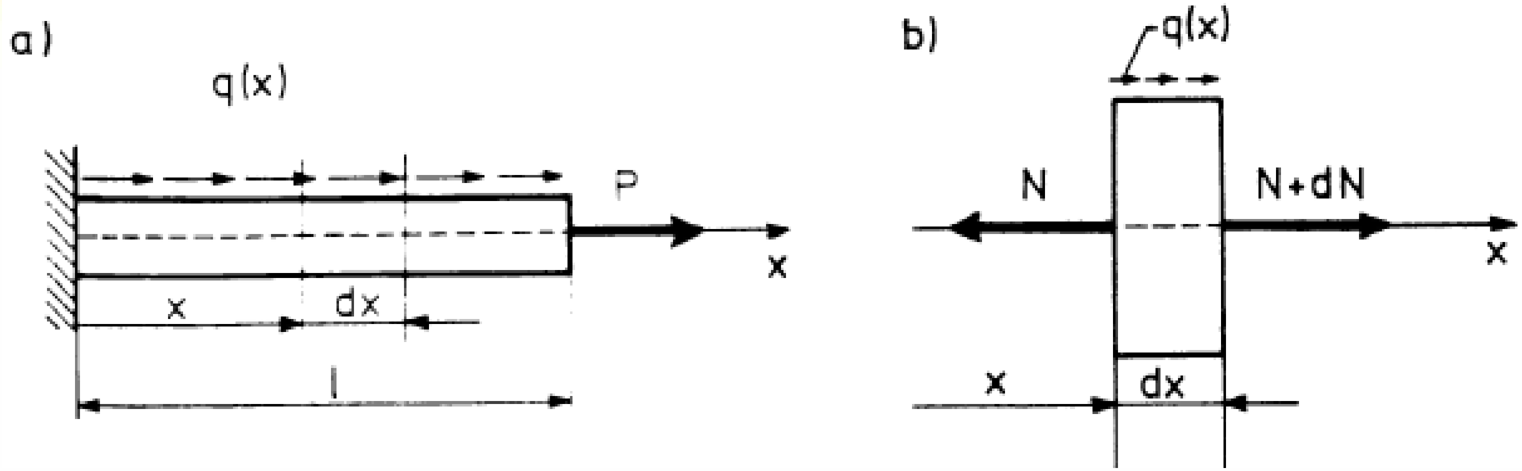
Rozpatrzmy pręt obciążony wzdłuż długości obciążeniem o intensywności ***q(x)*** i na końcu siłą osiową ***P*** .

Wytnijmy myślowo odcinek pręta o długości ***dx***. Na odcinek ten działają obciążenia przedstawione na rysunku.



Warunek równowagi elementu ma następującą postać :

$$-N + N + dN + q\,dx = 0 \tag{2.11}$$



Ze wzorów (2.8), (2.5) i (2.2) wynika, że siłę normalną ***N*** można wyrazić przez przemieszczenia w sposób następujący :

$$N = EA\frac{du}{dx} \tag{2.12}$$

Wówczas różniczka siły normalnej jest równa

Wówczas różniczka siły normalnej jest równa

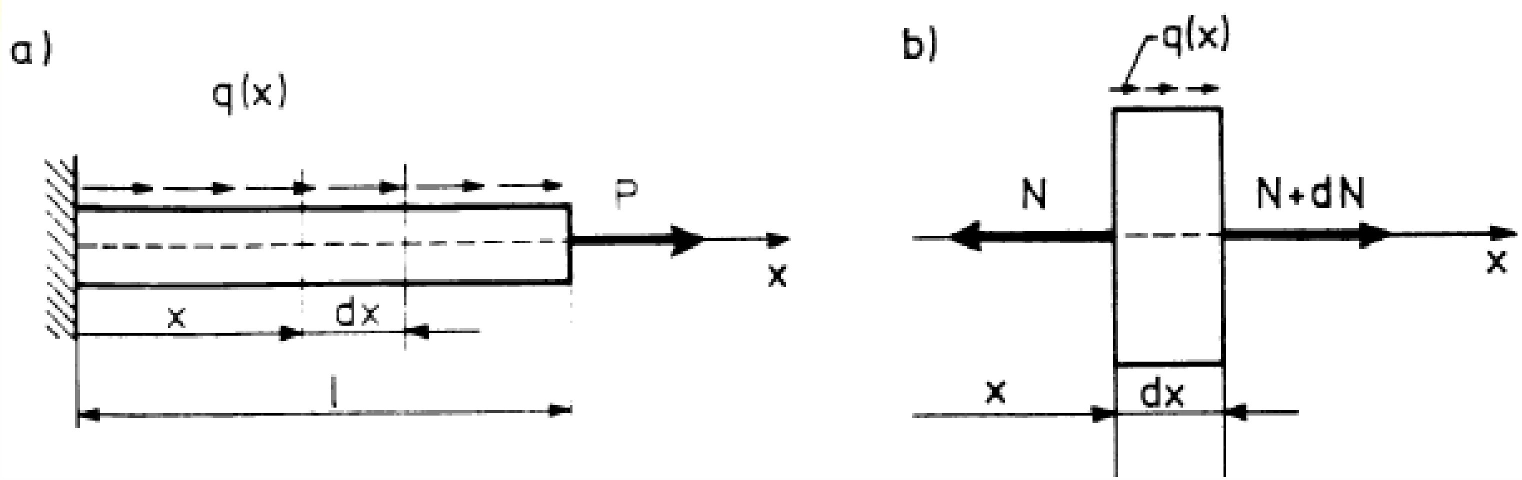
$$dN = \frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx} \right)dx \qquad (2.13)$$

Po wstawieniu związku (2.13) do warunku równowagi (2.11) otrzymujemy ostatecznie *równanie różniczkowe przemieszczeń osiowych* :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx} \right) + q(x) = 0, \quad 0 < x < l} \qquad (2.14)$$

gdzie : ***a = EA.***

Równanie różniczkowe (2.14) opisuje pole przemieszczeń ***u = u(x), 0 < x < l,*** pręta rozciąganego (ściskanego).



W celu otrzymania jednoznacznego rozwiązania równania (2.14) należy uzupełnić go o warunki brzegowe, które dla pręta przedstawionego na rysunku mają postać :

$$\boxed{u(x)\big|_{x=0} = 0 \qquad \left(a\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=l} = P} \qquad (2.15)$$

Podsumowanie

Przemieszczenie (wydłużenie) końca pręta

$$\boxed{u_{x=l} = \Delta l = \int_0^l \varepsilon \, dx}$$

$$\boxed{\Delta l = \varepsilon l}$$

Prawo Hooke'a

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}}$$

Współczynnik Poissona

$$\boxed{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\nu}$$

Zmiana wymiaru poprzecznego pręta

$$\varepsilon' = \frac{d_1 - d}{d}$$

Naprężenie normalne w pręcie rozciąganym (ściskanym)

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Przemieszczenie w zależności od sztywności

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dx}{EA}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

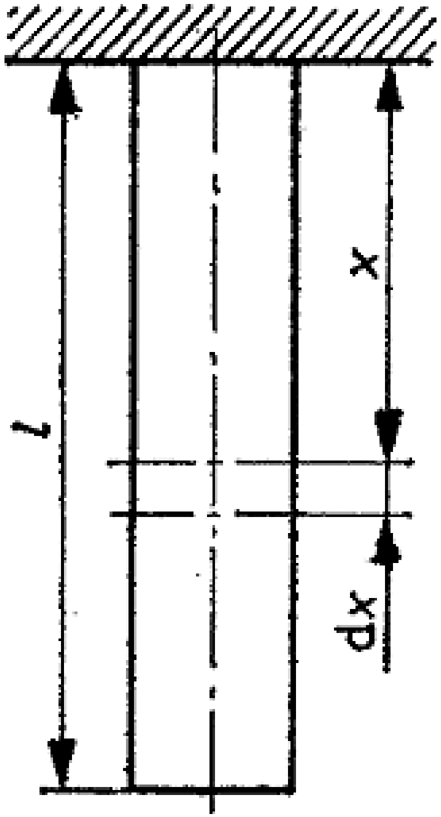
Równanie różniczkowe przemieszczeń osiowych.

$$\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+q(x)=0, \quad 0<x<l$$

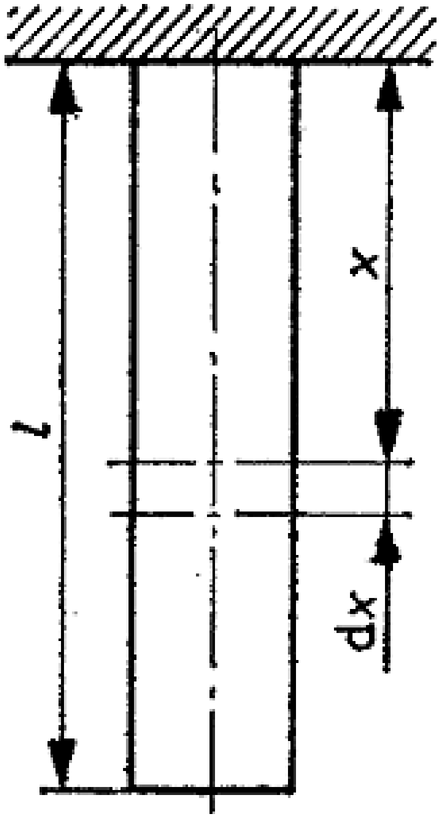
Warunki brzegowe dla równania przemieszczeń osiowych.

$$u(x)\Big|_{x=0}=0 \qquad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{x=l}=P$$

Przykład zadania 1



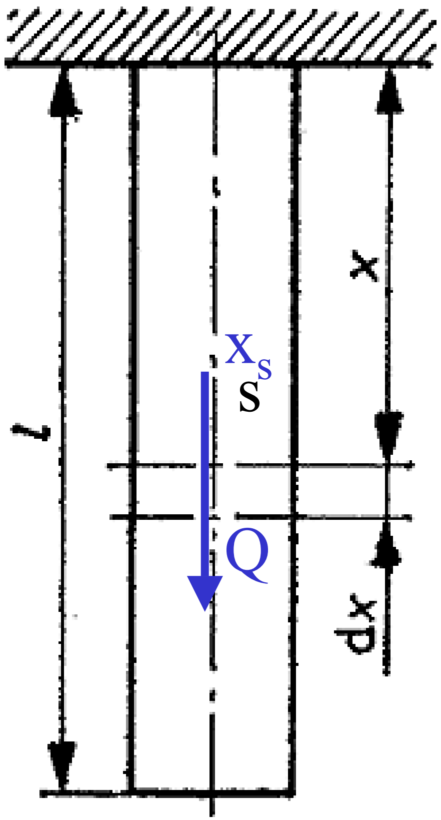
Obliczyć wydłużenie wywołane ciężarem własnym pręta pryzmatycznego o długości *l*, wykonanego z materiału o ciężarze właściwym g i module Younga *E*.



R o z w i ą z a n i e .

Wytnijmy z pręta odcinek o długości dx oddalony o x od górnego końca pręta. Odcinek ten jest rozciągany siłą równą ciężarowi pręta o długości l - x, a więc $Q = S(l - x)\gamma$.

Wydłużenie odcinka dx wynosi (z prawa Hooke'a)



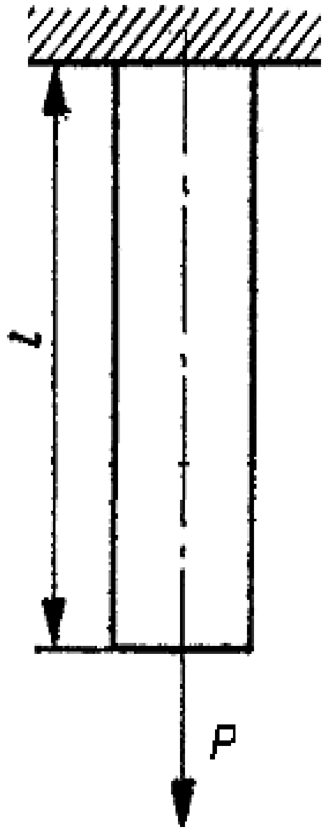
$$\Delta x = \frac{Q\,\mathrm{d}x}{ES} = \frac{S(l-x)\gamma\,\mathrm{d}x}{ES} = \frac{(l-x)\gamma\,\mathrm{d}x}{E}$$

Całkowite wydłużenie pręta jest równe

$$\Delta l = \int_0^l \Delta x = \int_0^l \frac{\gamma}{E}(l-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\gamma}{E}\left|\frac{(l-x)^2}{2}\right|_0^l = \frac{\gamma l^2}{2E}$$

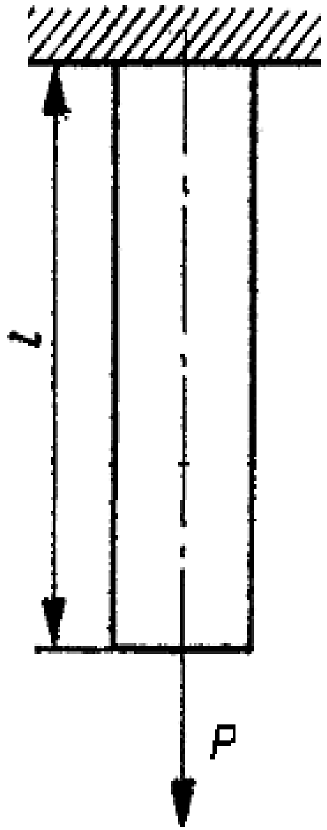
Wydłużenie to jest równe wydłużeniu wywołanemu siłą równą ciężarowi pręta, przyłożoną w środku ciężkości pręta.

Przykład zadania 2



Pręt stalowy o średnicy d = 5 mm i długości l = 2 m jest rozciągany siłą P = 1600 N.

Obliczyć naprężenia oraz wydłużenie całkowite i względne pręta. Moduł Younga dla stali wynosi $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa



R o z w i ą z a n i e.

Naprężenia normalne w poprzecznym przekroju pręta wynoszą

$$\sigma = \frac{P}{S} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1600}{\pi \cdot 5^2} = 81{,}5 \text{ MPa}$$

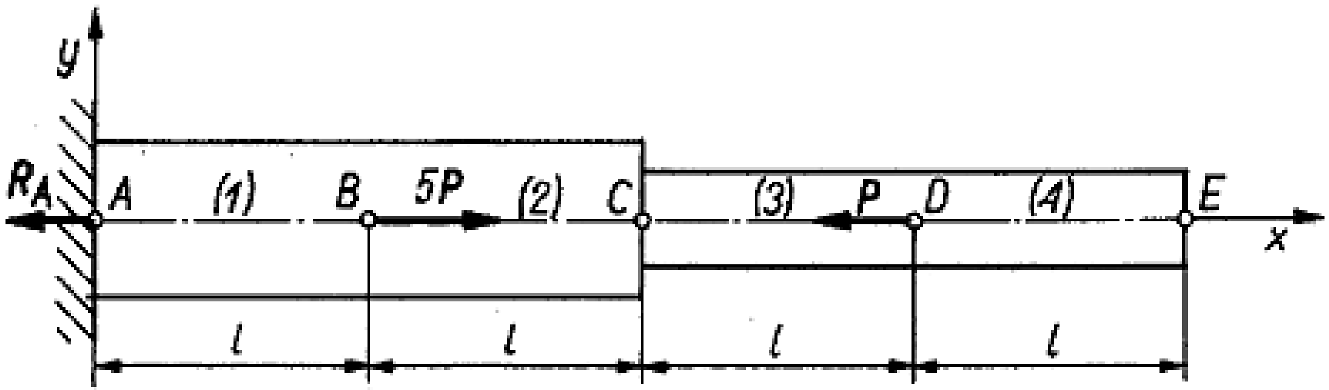
Korzystając z Prawa Hooke'a obliczamy wydłużenie całkowite :

$$\Delta l = \frac{Pl}{ES} = \frac{4Pl}{E\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1600 \cdot 2000}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 5^2} = 0{,}78 \text{ mm}$$

Przykład zadania 3

Pręt ACE o dwóch różnych średnicach, utwierdzony w punkcie A, jest obciążony w przekrojach B i D siłami

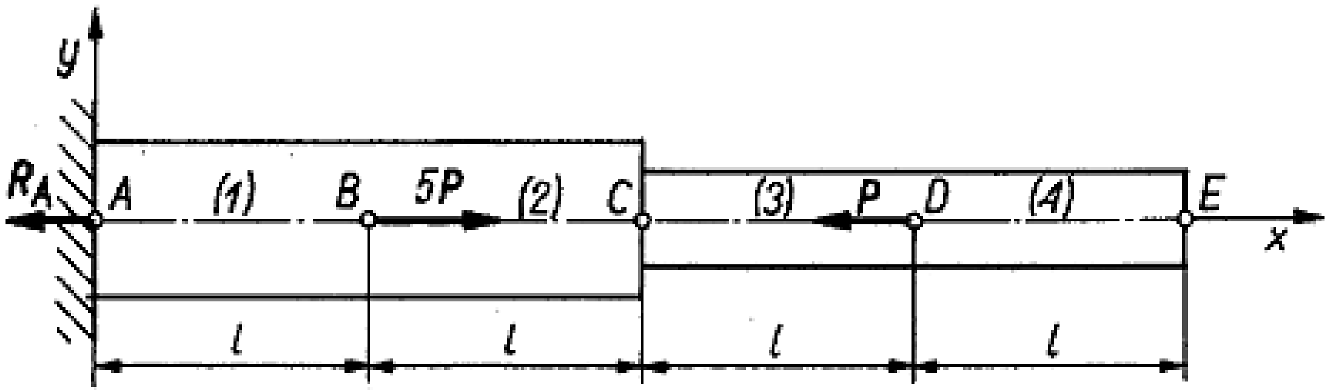
5P = 500 kN i P = 100 kN.



Przekrój poprzeczny części pręta AC = 2l = 1 m jest równy : $2A = 4 \cdot 10^{-3}$ m², a części CE = 2l = 1 m wynosi

$A = 2 \cdot 10^{-3}$ m².

Pręt jest wykonany ze stali, dla której współczynnik sprężystości wzdłużnej wynosi $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa i granica plastyczności $R_e = 220$ MPa. Obliczyć współczynnik bezpieczeństwa n odniesiony do granicy plastyczności.

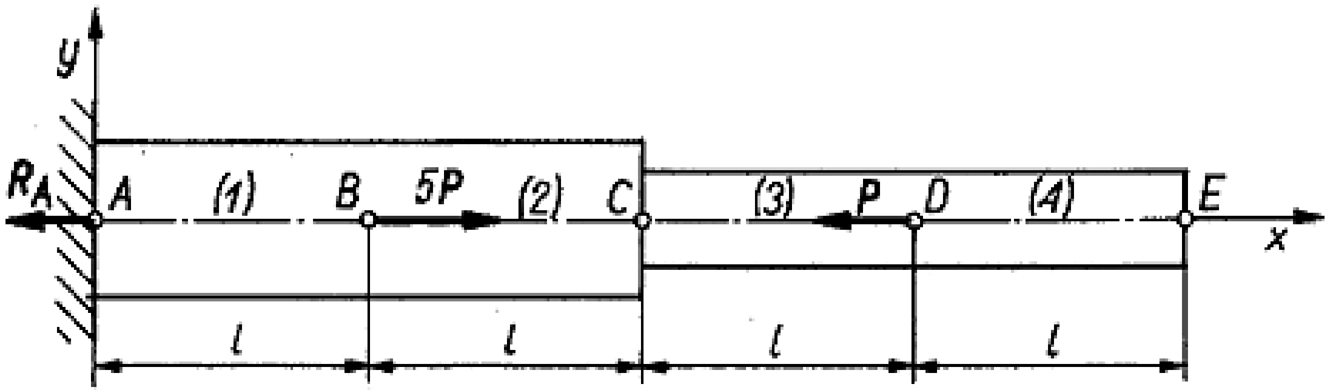


R o z w i ą z a n i e.
Reakcja w miejscu utwierdzenia pręta jest równa

$$R_A = 5P - P = 400 \text{ kN}$$

Badając równowagę myślowo odciętych części pręta, otrzymuje się

$$N_1 = 4P = 400 \text{ kN}, \quad N_2 = N_3 = -P = -100 \text{ kN}, \quad N_4 = 0$$



Biorąc pod uwagę wartości tych sił obliczono naprężenia normalne

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

$$\sigma_1 = 100\ \mathrm{MPa}, \quad \sigma_2 = -25\ \mathrm{MPa}, \quad \sigma_3 = -50\ \mathrm{MPa}, \quad \sigma_4 = 0$$

Współczynnik bezpieczeństwa, z jakim pracuje pręt, oblicz się ze wzoru

$$n = \frac{R_e}{\sigma_{max}} = \frac{R_e}{\sigma_1} = \frac{220}{100} = 2{,}2$$

------------------ENDE------------------
