





2. Pręt skręcany o przekroju kołowym

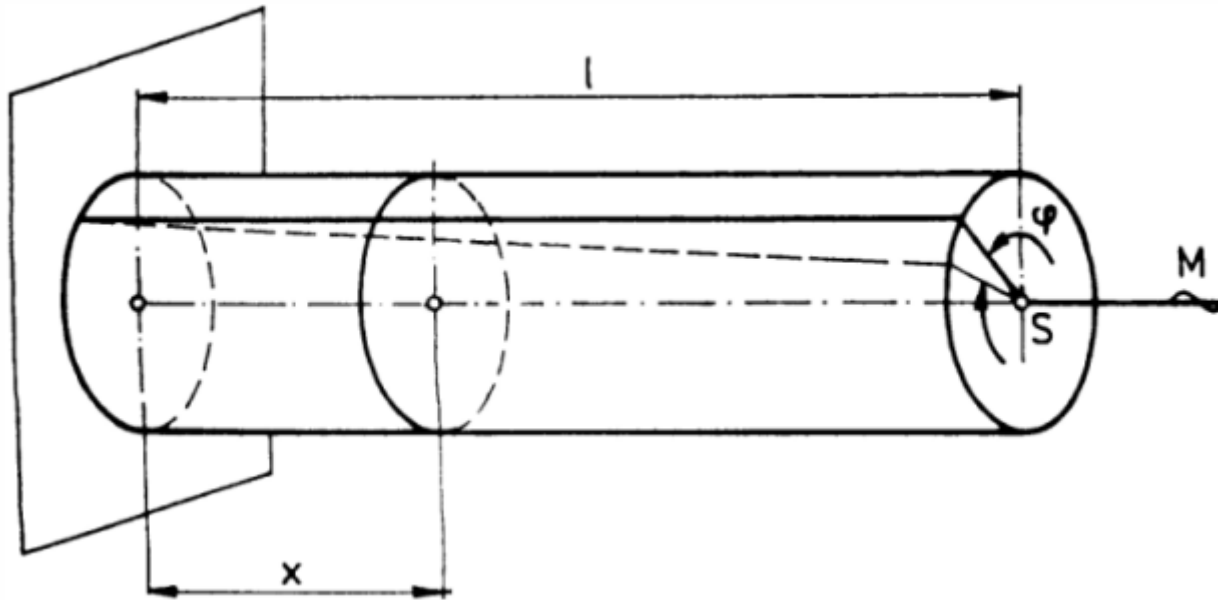


Przebieg wykładu :

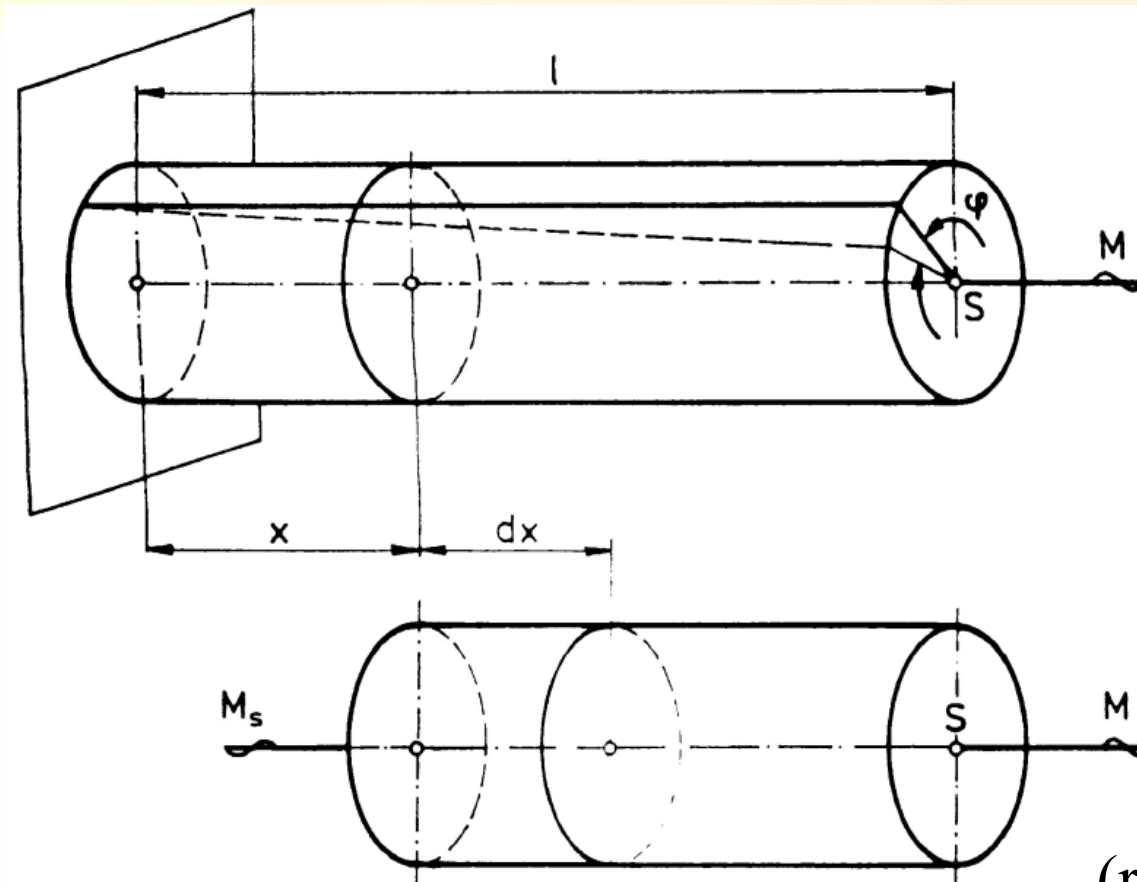
- 1. Sformułowanie zagadnienia**
- 2. Warunki równowagi** – kąt skręcenia
- 3. Warunek geometryczny** – kąt odkształcenia postaciowego
- 4. Związek fizyczny** – Prawo Hooke'a dla skręcania
- 5. Podsumowanie**
- 6. Przykładowe zadania**



Sformułowanie zagadnienia



Pręt o średnicy $D = 2R$ i długości l , utwierdzony lewym końcem, jest obciążony na końcu prawym momentem M sił zewnętrznymi, równoległym do osi pręta.

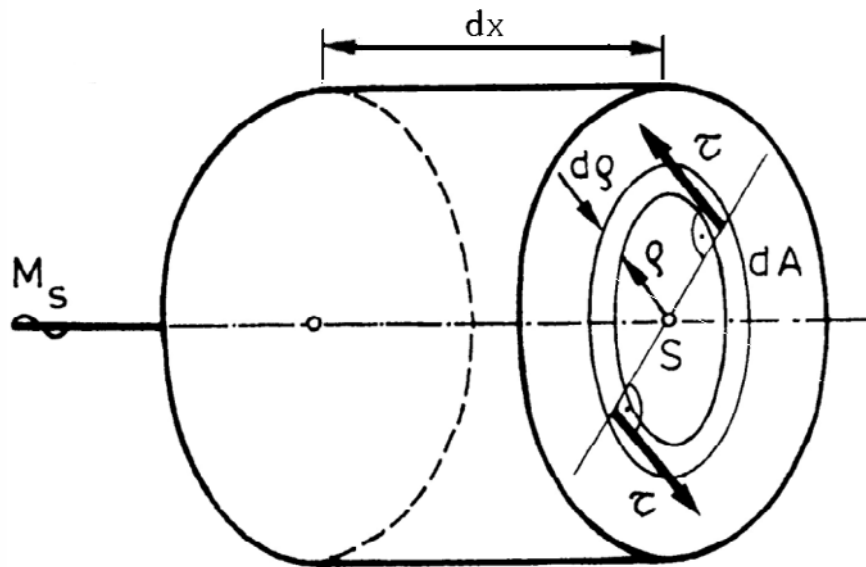


(rys. 2.3)

Wywołuje on w dowolnym przekroju, odległym o x od lewego końca, moment skręcający $M = M_s$.



Zakłada się, że w przekroju normalnym pręta skręcanego występują wyłącznie naprężenia styczne τ , prostopadłe do promienia ρ .

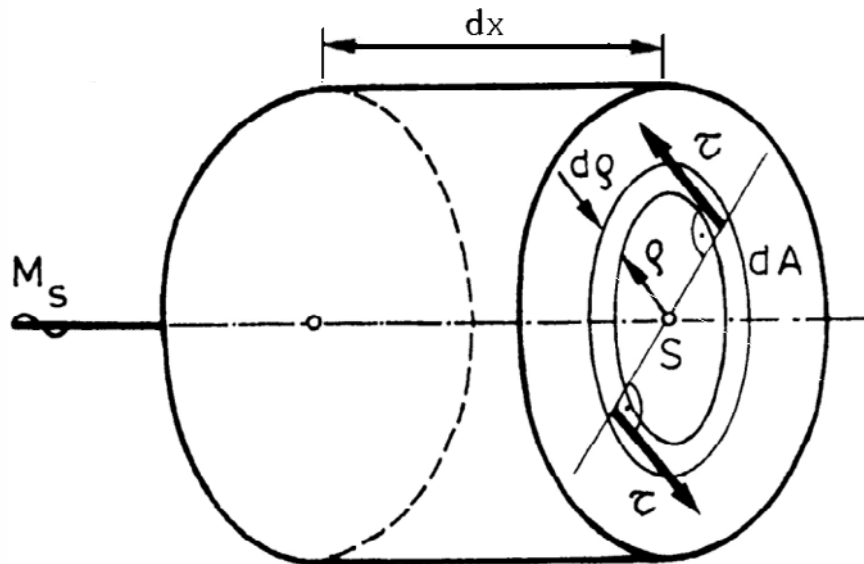


(rys. 2.4a)

Natomiast na walcowej powierzchni wewnętrznej, o dowolnym promieniu, nie ma naprężeń.

Pręt skręcany można zatem traktować jako zbiór koncentrycznych elementów walcowych o przekroju pierścieniowym, które nie oddziałują na siebie mechanicznie.

Warunki równowagi



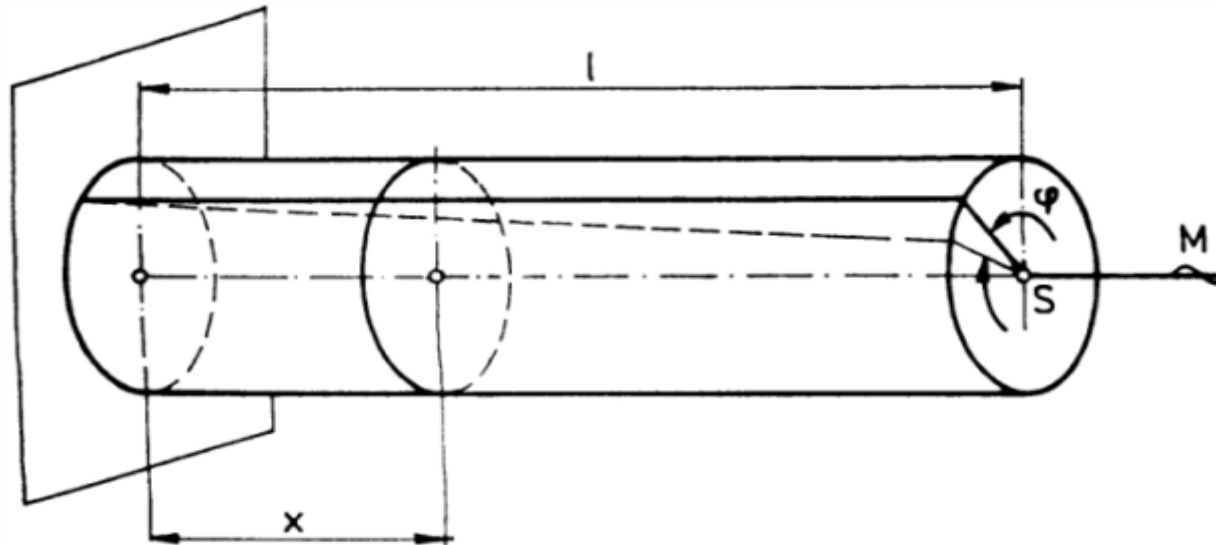
Odcinek dx pręta skręcanego (rys. 2.3 i 2.4a) jest obciążony w przekroju lewym momentem skręcającym M_S , a w przekroju prawym elementarnymi siłami wewnętrznymi τdA (dA jest pierścieniem o promieniu ρ i grubości $d\rho$).

Warunek równowagi rozważanej części pręta można zapisać następująco :

$$\int_A \tau \rho dA - M_S = 0 \quad (2.16)$$



Odkształcenie pręta skręcanego o przekroju kołowym polega na obrocie jego poszczególnych przekrojów względem siebie wokół osi pręta. Kąt wzajemnego obrotu przekrojów końcowych nazywa się kątem skręcania φ pręta.

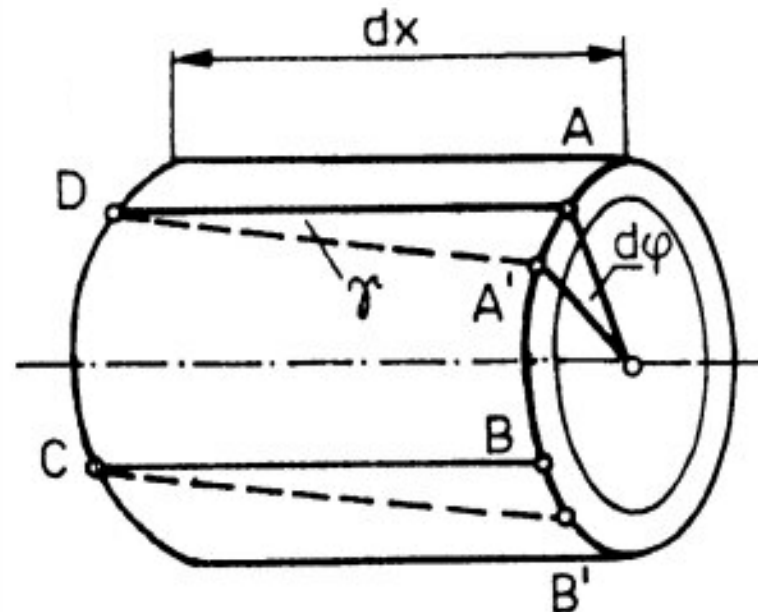


Na skutek odkształcenia pręta skręcanego tworzące na jego powierzchni zewnętrznej, a także dowolnej walcowej powierzchni wewnętrznej, stają się liniami śrubowymi.



Warunek geometryczny

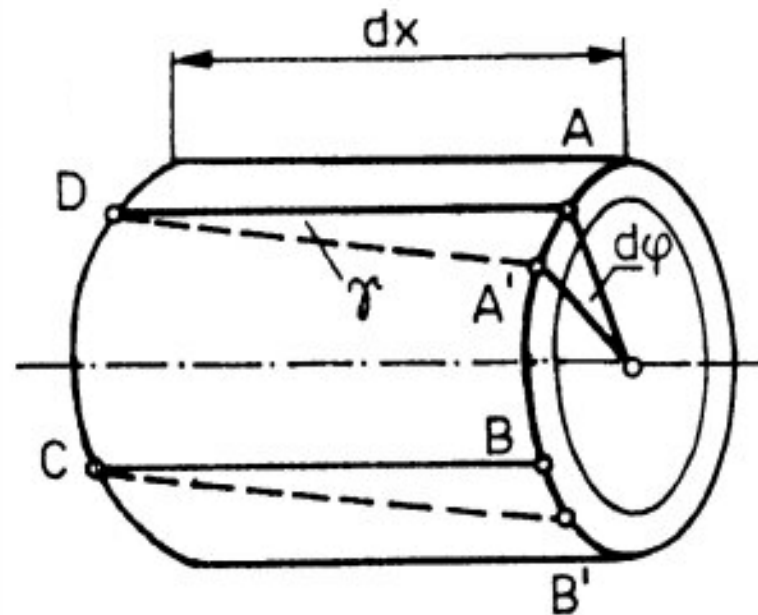
Zajmijmy się teraz odkształceniem pierścienia o szerokości dx , promieniu ρ i grubości $d\rho$



(rys. 2.4b)



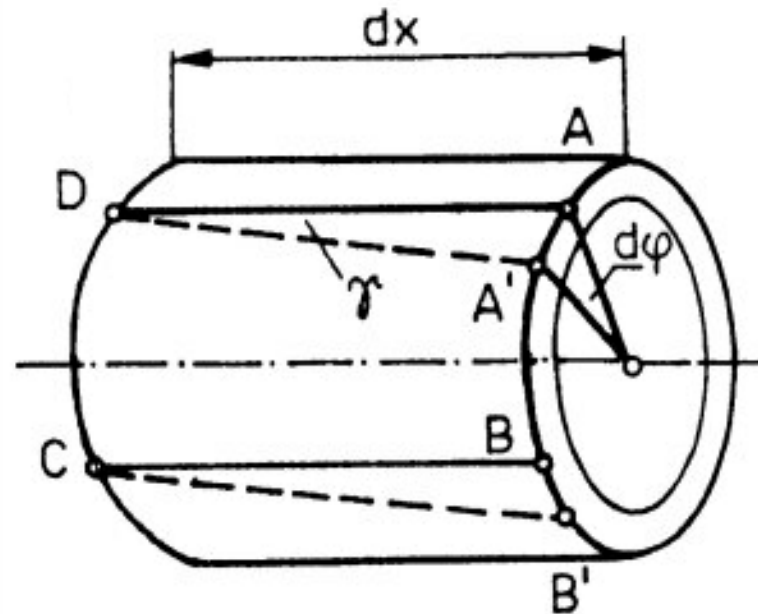
Wyodrębnijmy na jego powierzchni „prostokąt” $ABCD$, który po odkształceniu stanie się „równoległobokiem” $A'B'CD$ (ponieważ tworzące DA i CB przekształca się w linie śrubowe DA' CB').



Miarą takiego odkształcenia przy wzajemnym obrocie przekrojów normalnych pręta o kąt $d\varphi$ jest kąt odkształcenia postaciowego γ .



Łatwo można zauważyć, że łuk AA' jest równy $dx\rho$ bądź $\rho d\varphi$ ($d\rho$ pomijamy jako nieskończenie małe w stosunku do ρ).



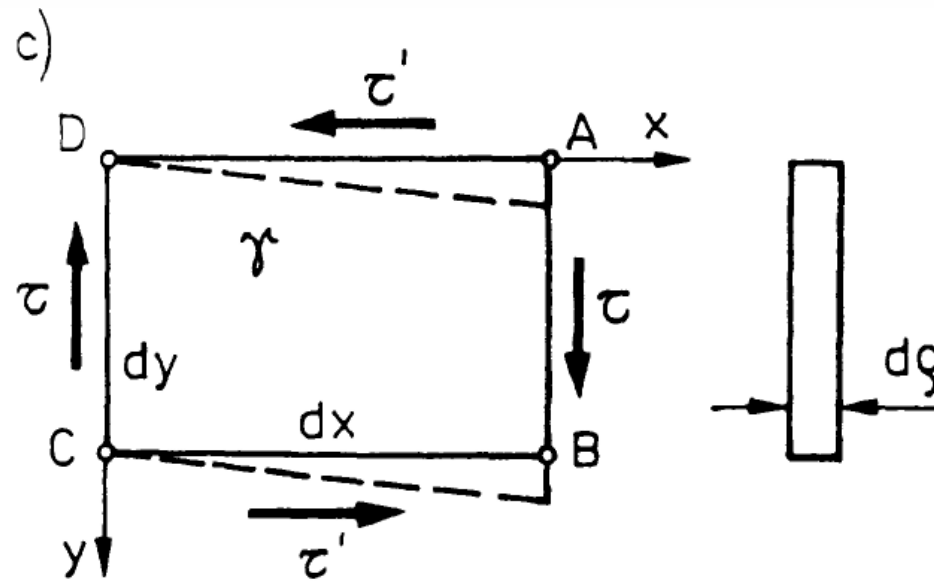
Wynika stąd następujący warunek geometryczny :

$$dx\gamma = \rho d\varphi$$

(2.17)



Potraktujmy element $ABCD$ jako prostopadłościan o nieskończenie małych wymiarach dx , dy , $d\rho$

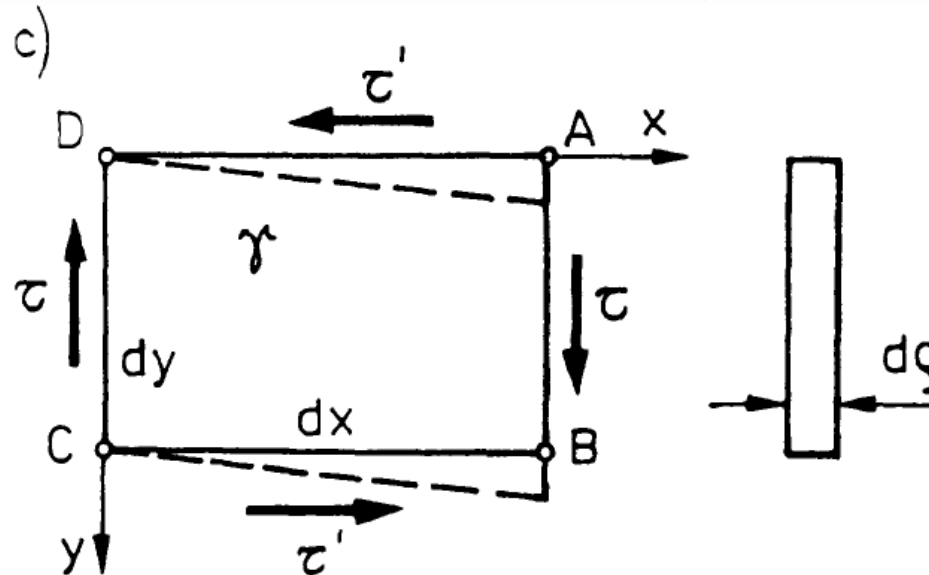


(rys. 2.4c).

Na ścianach AB i DC prostopadłościanu działają naprężenia τ , które tworzą parę sił o momencie $(dy d\rho \tau)dx$.



Aby element $ABCD$ pozostawał w równowadze, muszą na jego ścianach AD i BC występować naprężenia normalne τ' , które tworzą parę sił o momencie $(dx d\rho \tau)dy$. Obydwie pary przeciwstawiają się sobie nawzajem.



Warunek równowagi elementu $ABCD$ będzie miał postać

$$(dy d\rho \tau)dx - (dy d\rho \tau')dy = 0 \quad (2.18)$$

Z podanej równości wynika, że $\tau = \tau'$.



Równość naprężeń stycznych w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych

Udowodniliśmy szczególny przypadek ogólniejszego twierdzenia, które można sformułować następująco:

Naprężenia styczne w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych, prostopadłe do krawędzi przecięcia się tych płaszczyzn, są sobie równe i skierowane do lub od krawędzi.

Element $ABCD$ podlega działaniu wyłącznie naprężeń stycznych a więc jest ścinany.



Związek fizyczny

Prawo Hooke'a dla ścinania

Dla materiału liniowosprężystego zachodzi liniowy związek między τ i ρ , zwany prawem Hooke'a dla ścinania

$$\tau = G\gamma \quad (2.19)$$

Gdzie : G - *współczynnik sprężystości poprzecznej* materiału, zwany *modułem Kirchhoffa*. w N/m^2 , γ – kąt odkształcenia postaciowego



Z zależności (2.17) wyliczamy ρ i wstawiamy do (2.19)

$$\tau = G \frac{d\varphi}{dx} \rho \quad (2.20)$$



Po wstawieniu (2.20) do równania równowagi (2.16) i uwzględnieniu, że $G \frac{d\varphi}{dx}$ nie podlega całkowaniu, a biegunowy moment bezwładności przekroju wyraża się wzorem $\int_A \rho^2 dA = I_S$ uzyskamy :

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA - M_s = 0$$

$$G \frac{d\varphi}{dx} I_S - M_s = 0$$

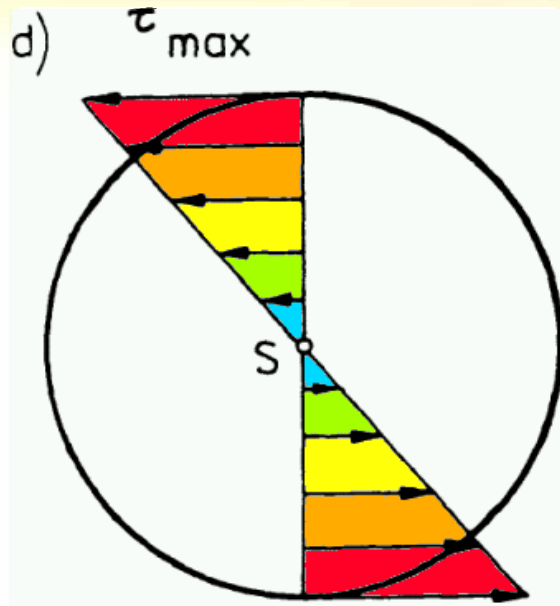
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_s}{GI_S} \quad (2.21)$$



Rozkład naprężeń stycznych w przekroju kołowym.

Po wstawieniu zależności (2.21) do (2.20) otrzymamy wzór opisujący rozkład naprężeń stycznych w przekroju kołowym pręta skręcanego :

$$\tau = \frac{M_s \rho}{I_s} \quad (2.22)$$



Naprężenia styczne τ są liniową funkcją promienia ρ ; mają wartość zerową w środku przekroju pręta oraz wartość maksymalną w jego skrajnej zewnętrznej strefie (rys. 2.4d).

Maksymalna wartość naprężenia stycznego wynosi

$$\tau_{\max} = \frac{M_s R}{I_S} = \frac{M_s}{\frac{I_S}{R}} = \frac{M_s}{W_s} \quad (2.23)$$



Wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie

Wielkość W_s (m^3) nazywamy wskaźnikiem wytrzymałości przekroju pręta na skręcanie.

Obliczymy go, uwzględniając formułę (1.26) określając I_s

$$W_s = \frac{I_s}{R} = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \quad (2.24)$$



Kąt skręcania pręta

Po scałkowaniu wyrażenia (2.21) otrzymamy formułę na kąt skręcania w mierze łukowej

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_s dx}{GI_S} \quad (2.25)$$

W przypadku gdy M_s , I_S oraz G nie zależą od x , formuła ta upraszcza się

$$\varphi = \frac{M_s l}{GI_S} \quad (2.26)$$

Wielkość GI_S nosi nazwę *szttywności pręta na skręcanie*.



Przedstawione wyżej rozważania dotyczą tylko prętów o przekroju kołowym, ponieważ tylko w takim przypadku przekrój pręta po odkształceniu pozostaje płaski. Przekrój nie kołowy po odkształceniu staje się powierzchnią, czyli ulega wypaczeniu (*deplanacji*).

Skrećanie pręta o przekroju dowolnym zostanie omówione w rozdziale dwunastym. W takim przypadku τ_{\max} oraz φ liczy się odpowiednio ze wzoru (2.23) oraz (2.25) czy (2.26). Zamiast I_S stosuje się wskaznik sztywności przekroju na

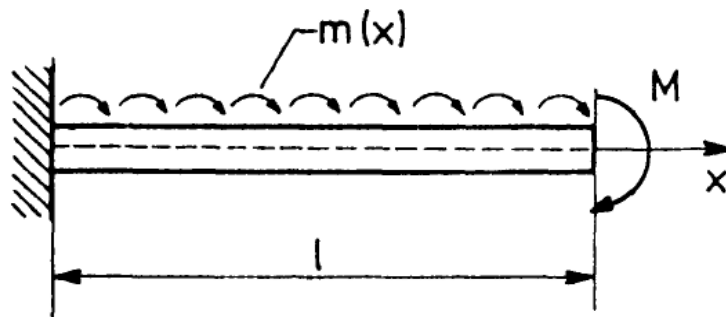
skrećanie J_S , przy czym $W_S \neq \frac{J_S}{R}$.



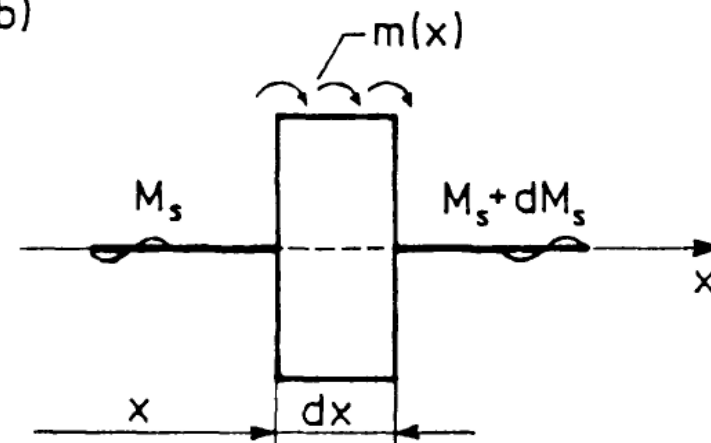
Równanie różniczkowe kąta skręcania

Rozpatrzmy pręt skręcany o długości l , obciążony wzdłuż długości momentem rozłożonym w sposób ciągły o intensywności $m(x)$ i momentem skupionym M działającym na końcu pręta.

a)



b)



(rys. 2.5).



Wytnijmy odcinek pręta o długości dx . Na odcinek ten działa obciążenie ciągłe $m(x)$ oraz na końcach momenty skręcające M_S i $M_S + dM_S$ (rys. 2.5b).

Warunek równowagi dla wyciętego fragmentu pręta skręcanego ma postać

$$-M_S + M_S + dM_S - m(x)dx = 0 \quad (2.27)$$

Moment skręcający można wyrazić przez kąt skręcenia φ

$$M_S = GI_S \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.28)$$



Wówczas różniczka momentu skręcającego przyjmuje postać

$$dM_s = \frac{d}{dx} \left(GI_S \frac{d\varphi}{dx} \right) dx \quad (2.29)$$

Po podstawieniu wyrażenia (2.29) do warunku (2.27) otrzymujemy ostatecznie Równanie różniczkowe kąta skręcania :

$$\frac{d}{dx} \left(a \frac{d\varphi}{dx} \right) + m(x) = 0, \quad 0 < x < l \quad (2.30)$$

Gdzie $a = GI_S$



$$\frac{d}{dx} \left(a \frac{d\varphi}{dx} \right) + m(x) = 0, \quad 0 < x < l \quad (2.30)$$

Powyższe równanie różniczkowe opisuje kąt skręcenia

$$\varphi = \varphi(x), \quad 0 < x < l.$$

W celu rozwiązania równania (2.30) należy uzupełnić go o warunki brzegowe w postaci :

$$\varphi(x)|_{x=0} = 0, \quad \left(a \frac{d\varphi}{dx} \right) \Big|_{x=l} = M_0 \quad (2.31)$$



Wzór na moment obrotowy (skręcający) na wale

Momenty skręcające przekazywane na wał (za pomocą pasa czy kół zębatach) można obliczyć z jednego z podstawowych wzorów mechaniki, jeżeli znamy moc P przekazywaną na wał i prędkość obrotową wału n z wzoru.

$$M_s = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\frac{2\pi \cdot n}{60}} = 9554,14 \frac{P}{n}$$

W którym :

P - moc w kW ; n - prędkość obrotowa wału w obr/min ;

M_s - moment skręcający w $N \cdot m$

$$N \cdot m = \frac{W}{s} = \frac{\frac{J}{s}}{s} = \frac{\frac{m^2 \cdot kg}{s^3}}{s} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot m = N \cdot m$$



Podsumowanie

Prawo Hooke'a dla skręcania

$$\tau = G\gamma$$

Rozkład naprężeń na przekroju kołowym

$$\tau = \frac{M_s \rho}{I_S}$$

Maksymalna wartość naprężeń na przekroju kołowym

$$\tau_{\max} = \frac{M_s R}{I_S} = \frac{M_s}{\frac{I_S}{R}} = \frac{M_s}{W_s}$$



Wskaźnik wytrzymałości przekroju kołowego na skręcenie

$$W_s = \frac{I_s}{R} = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

Kąt skręcenia pręta

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_s dx}{GI_s} = \frac{M_s l}{GI_s}$$

Moment skręcający

$$M_s = GI_s \frac{d\varphi}{dx}$$

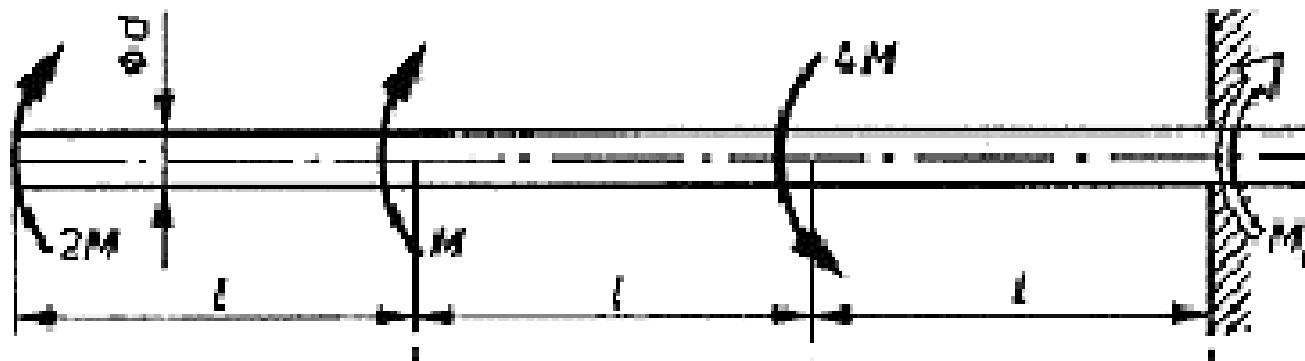
Równanie różniczkowe kąta skręcenia

$$\frac{d}{dx} \left(a \frac{d\varphi}{dx} \right) + m(x) = 0, \quad 0 < x < l$$



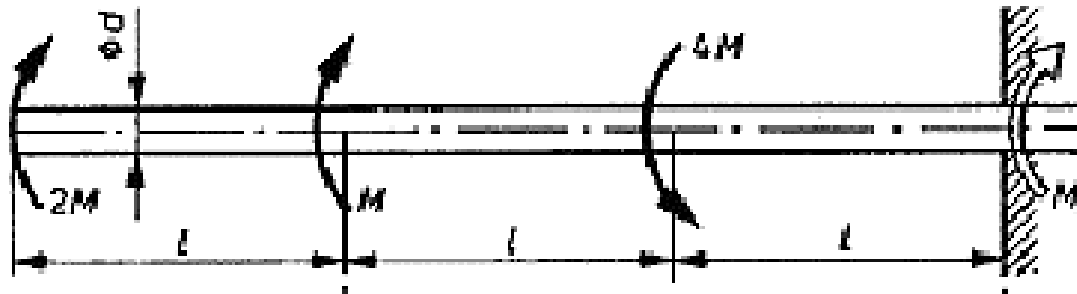
Przykład zadania 1

Dla wału przedstawionego na rysunku wykonać wykres momentów skręcających, oraz obliczyć największe naprężenia i całkowity kąt skręcenia wału.





Rozwiązanie



Moment reakcji ściany wynika z równania statyki

$$2M + M - 4M + M_u = 0$$

stąd

$$M_u = M$$



Moment pracujący w przedziale 1: $(0 < x_1 < l)$

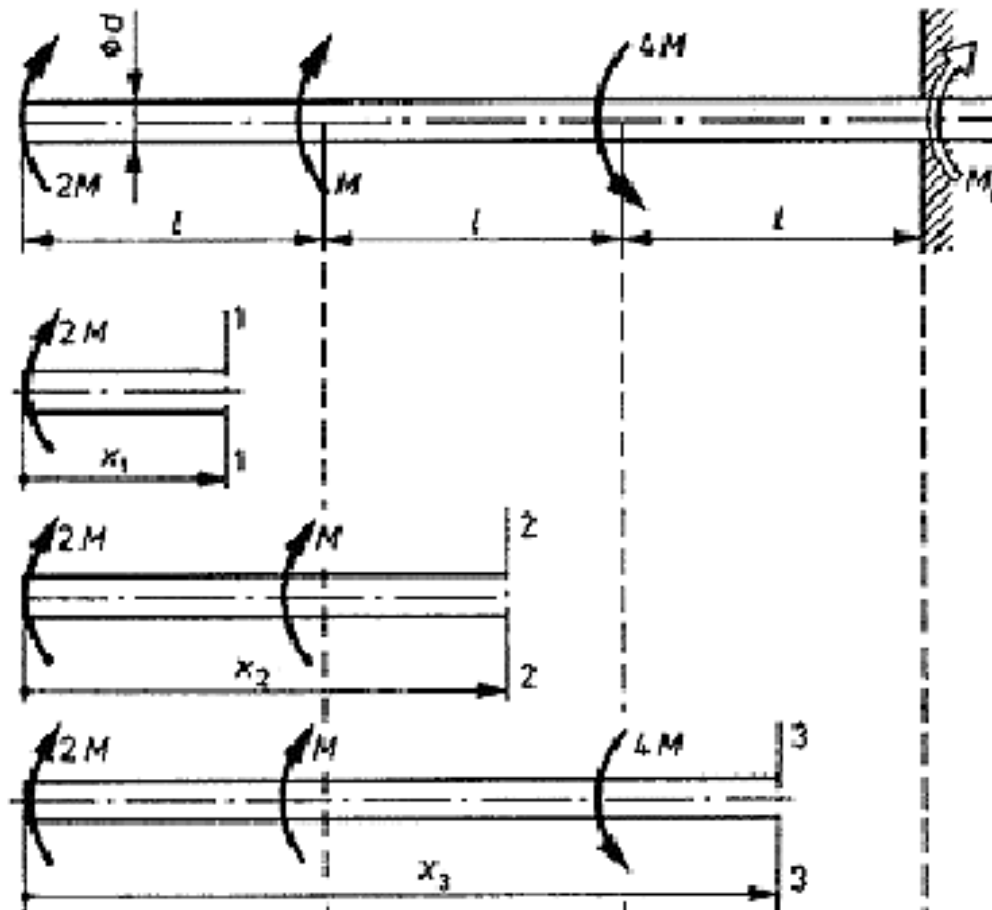
$$M_{s1} = 2M$$

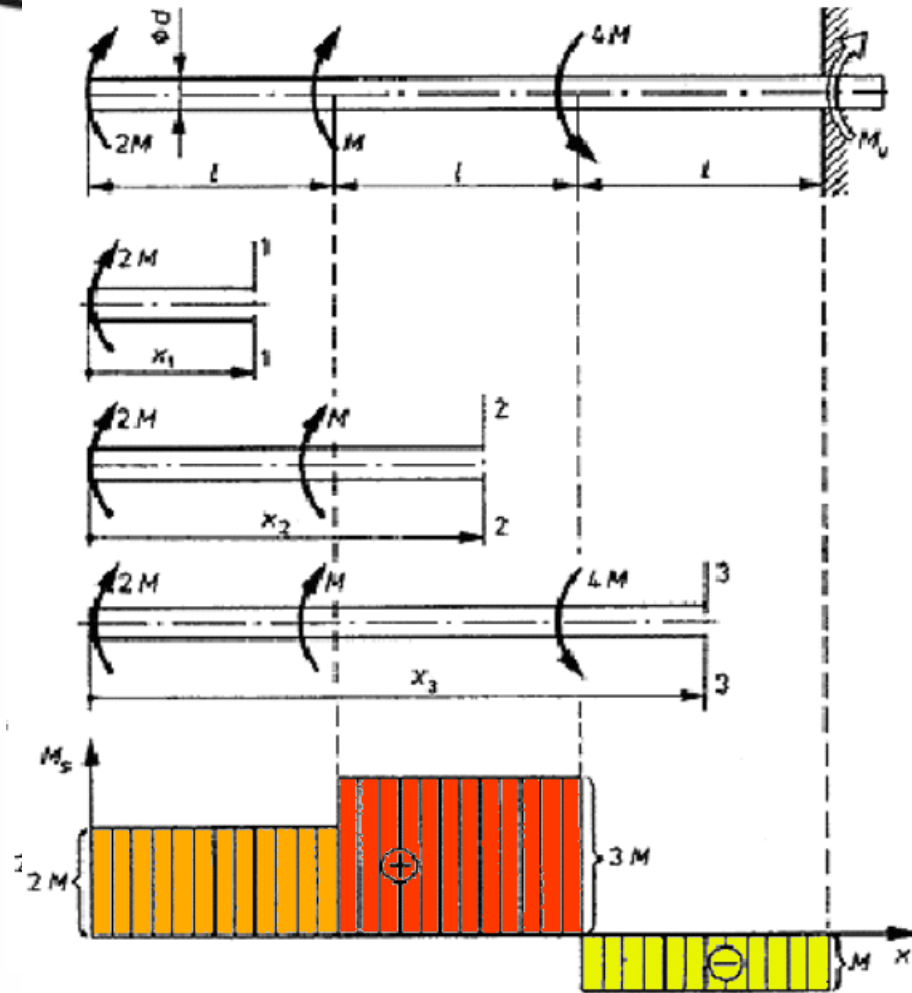
w przedziale 2: $(l < x_2 < 2l)$

$$M_{s2} = 2M + M = 3M$$

w przedziale 3: $(2l < x_3 < 3l)$

$$M_{s3} = 2M + M - 4M = -M$$





Na podstawie wyników
można narysować
wykres momentów
skręcających
działających na wał.



Największy moment skręcający wynosi

$$M_{s \max} = M_{s2} = 3M$$

Największe naprężenie styczne

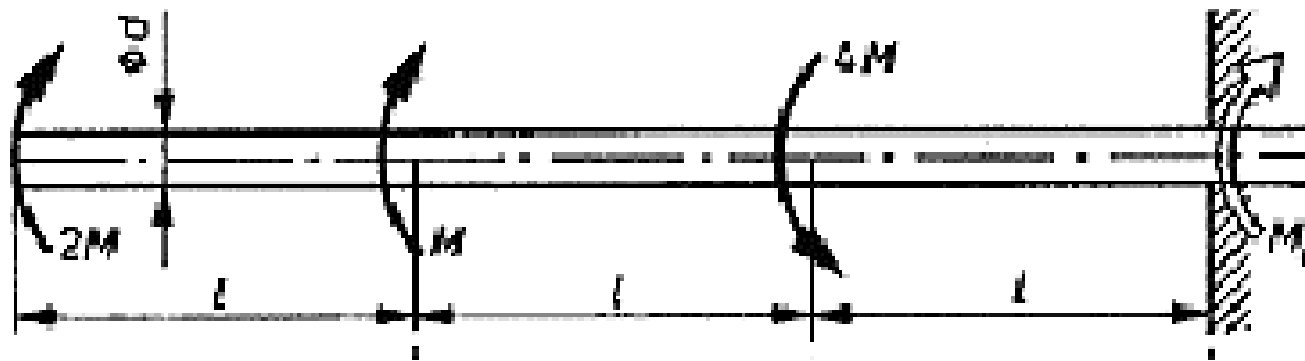
$$\tau_{\max} = \frac{M_{s2}}{W_o} = \frac{3M \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{48M}{\pi d^3} \leq k_s$$



Całkowity kąt skręcenia jest sumą kątów skręcenia kolejnych odcinków wału

$$\varphi_e = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{2Ml}{GI_o} + \frac{3Ml}{GI_o} + \frac{-Ml}{GI_o} = \frac{4Ml \cdot 32}{\pi Gd^4} = \frac{128Ml}{\pi Gd^4}$$

Znak dodatni świadczy o tym, że lewy koniec pręta obróci się w kierunku zgodnym z momentem $2M$.

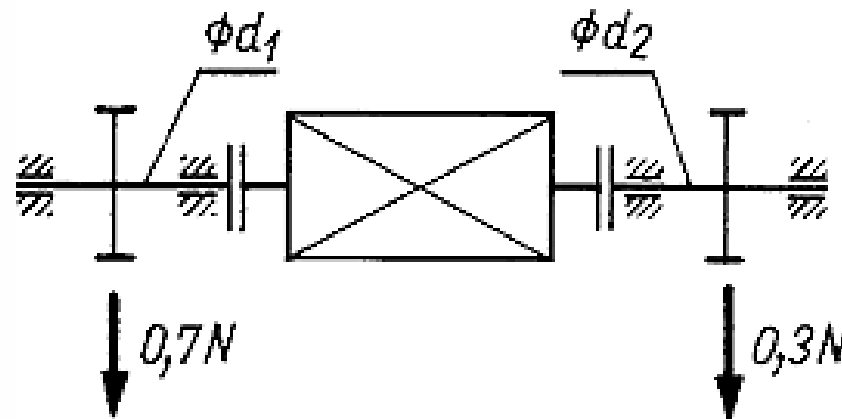




Przykład zadania 2

Silnik elektryczny o mocy $P = 80 \text{ kW}$ i obrotach $n = 750 \text{ obr/min}$ napędza dwie maszyny, z których jedna pobiera 70%, a druga 30% mocy silnika.

Obliczyć minimalne średnice wałów napędzających obie maszyny, jeżeli naprężenia dopuszczalne wynoszą $k_s = 80 \text{ MPa}$.





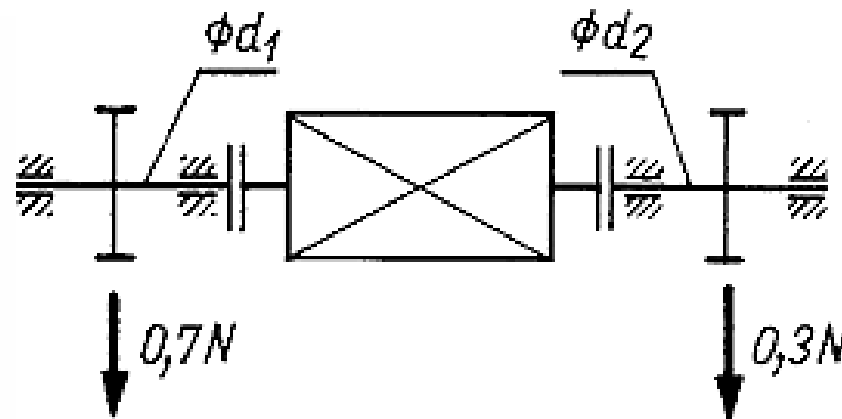
R o z w i ą z a n i e

Moment skrecający działający na wale 1 wynosi

$$M_1 = 9550 \cdot \frac{0,7P}{n} = 9550 \cdot \frac{0,7 \cdot 80}{750} = 713 \text{ N} \cdot \text{m}$$

a na wale 2

$$M_2 = 9550 \cdot \frac{0,3 \cdot 80}{750} = 306 \text{ N} \cdot \text{m}$$





Naprężenia styczne w wale 1 wynoszą

$$\tau_1 = \frac{M_1}{W_o} = \frac{16M_1}{\pi d_1^3} \leq k_s$$

Skąd po przekształceniu otrzymamy średnicę d_1

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_1}{\pi k_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 713 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80}} = 35,8 \text{ mm}$$

Analogicznie postępujemy dla wyznaczenia d_2

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_2}{\pi k_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 306 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80}} = 26,9 \text{ mm}$$



FIN