Pręt Ścinany

prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

Przebieg wykładu :

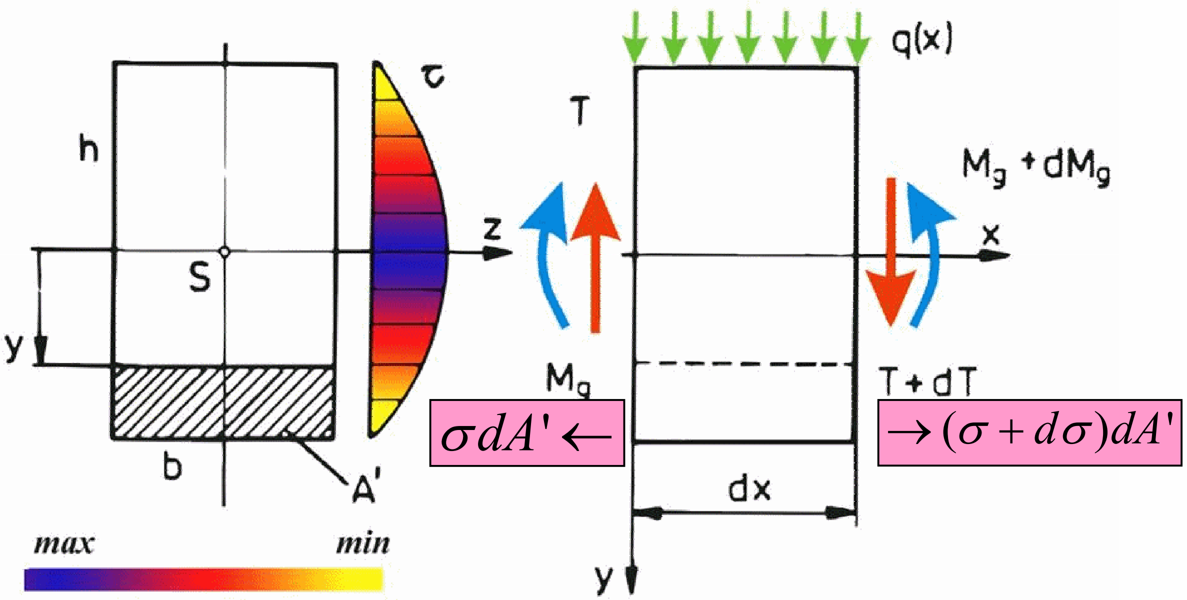
1. Sformułowanie zagadnienia
2. Warunki równowagi
3. Wzór Żurawskiego
4. Środek ścinania i jego współrzędne
5. Podsumowanie
6. Przykładowe zadanie

Sformułowanie zagadnienia

Przedmiotem analizy będzie odcinek dx belki o małej rozpiętości, poddanej zginaniu nierównomiernemu , (i dlatego Mg może być pominięte przy ocenie wytrzymałości), mającej prostokątny przekrój o podstawie b i wysokości h. Wydzielimy dolną część odcinka belki płaszczyzną równoległą do warstwy obojętnej, odległą od niej o y, przy czym powierzchnia odciętego przekroju normalnego jest równa A'. Przyjmiemy, że siła poprzeczna T wywołuje w punktach leżących w odległości y od linii obojętnej, na całej szerokości przekroju normalnego, naprężenia styczne τ. Zgodnie z twierdzeniem o równości naprężeń stycznych w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych, muszą wystąpić takie same naprężenia styczne τ w płaszczyźnie odcinającej dolną część elementu.

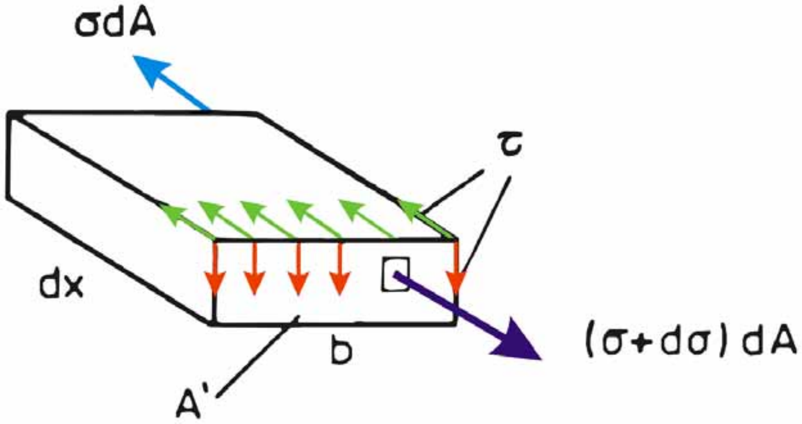
Warunki równowagi

Odpowiednio do zmiany momentu gnącego z M_g na $M_g + d\,M_g$, naprężenia normalne w lewym i prawym przekroju normalnym odcinka belki będą równe σ oraz $\sigma + d\,\sigma$.



$$\int_{A'} (\sigma + d\sigma) dA - \int_{A'} \sigma dA - \tau b dx = 0$$

skąd po prostych przekształceniach otrzymamy



$$\tau = \frac{\int_{A'} d\sigma dA}{dxb}$$

Ponieważ $\sigma = \dfrac{M_g y}{I_z}$ to $d\sigma = \dfrac{dM_g y}{I_z}$

Wstawiamy wyrażenie $\boxed{d\sigma = \frac{dM_g\, y}{I_z}}$ do $\boxed{\tau = \frac{\int_{A'} d\sigma\, dA}{dxb}}$

uwzględniając, że dM_g oraz I_z nie podlegają całkowaniu i uzyskujemy następującą postać

$$\boxed{\tau = \frac{\underbrace{dM_g}_{T}\ \overbrace{\int_{A'} y\, dA}^{S_z}}{dx\, b I_z}}$$

Zważywszy że

$$\boxed{\frac{dM_g}{dx} = T}$$, a $$\boxed{\int_{A'} y\,dA = S_z}$$

gdzie: S_z - moment statyczny odciętej części przekroju belki względem osi obojętnej z,

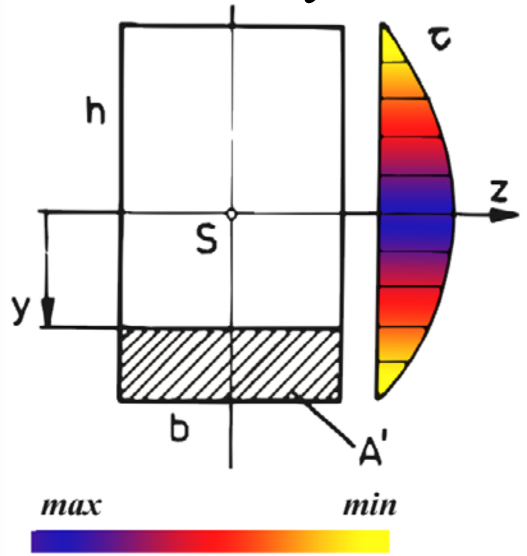
Wzór Żurawskiego

Otrzymujemymy ostatecznie wzór Żurawskiego

$$\boxed{\tau = \frac{TS_z}{bI_z}}$$

Wzór ten opisuje rozkład naprężeń stycznych wywołanych siłą poprzeczną T w przekroju belki. Stosuje się go również, jeśli szerokość b zmienia się wzdłuż wysokości przekroju.

W przekroju prostokątnym rozkład naprężeń τ ma charakter paraboliczny tak jak to widać na rysunku



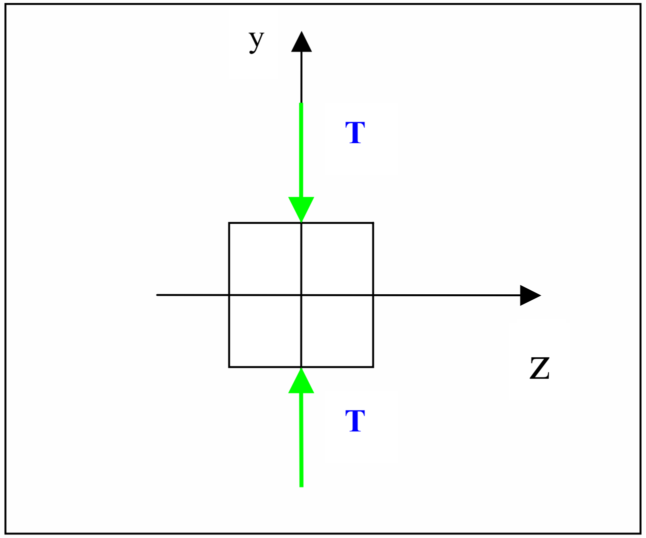
$$\tau = \frac{T}{b} \cdot \frac{1}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) \cdot b = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{bh} \cdot \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)$$

Maksymalne naprężenia styczne τ_{max} występują w warstwie obojętnej dla y=0

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{bh}}$$

Często, aby uniknąć trudności z określeniem naprężeń stycznych w pręcie ścinanym o dowolnym przekroju, przyjmuje się, że są one rozłożone równomiernie na tym przekroju. Na podstawie takiego radykalnego uproszczenia wykonuje się tak zwane techniczne obliczenia wytrzymałościowe na ścinanie nitów, sworzni, a także spoin pachwinowych, które nie są prętami.

Rozważania powyższe są poprawne, gdy przekrój poprzeczny pręta ma oś symetrii, która pokrywa się z linią działania siły poprzecznej T. W przeciwnym razie w przekroju poprzecznym oprócz siły T



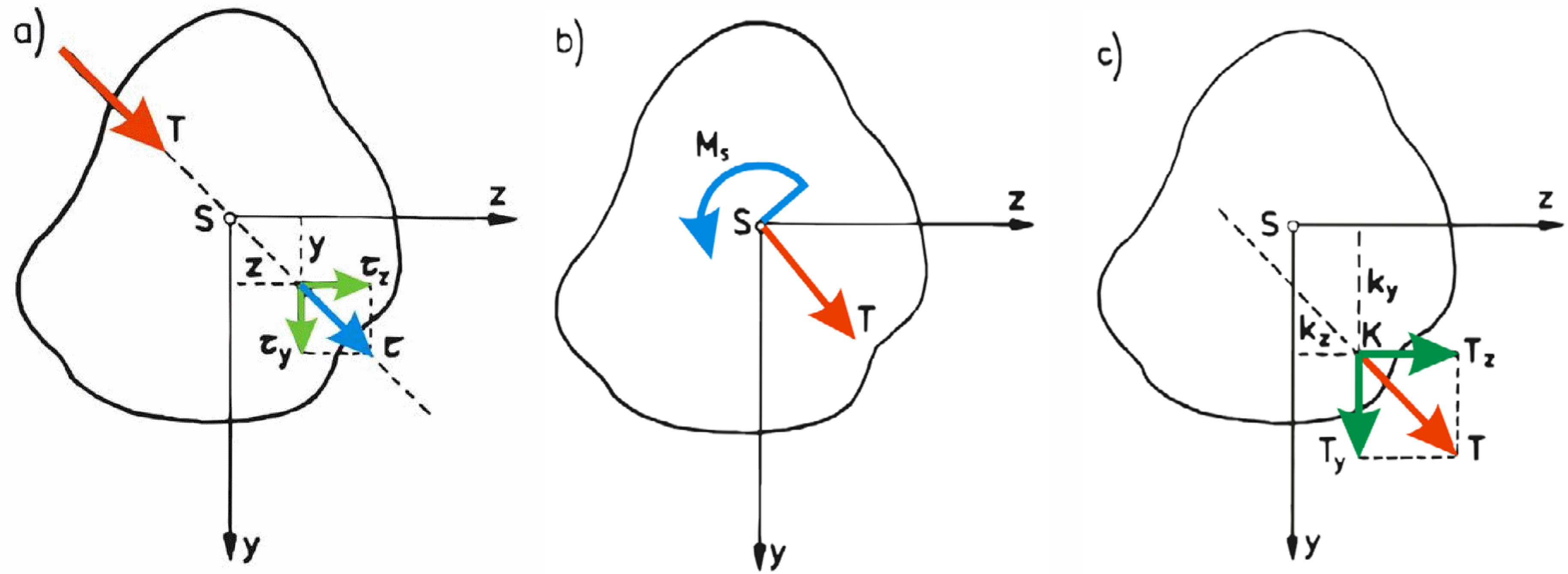
$$T = \int_A \tau \, dA$$

wystąpi także moment skręcający Ms

$$M_s = \int_A \left(\tau_z y - \tau_y z\right) dA \neq 0$$

gdzie: τ_z i τ_y są składowymi naprężenia stycznego τ wywołanymi siłą poprzeczną T.

Zatem oprócz ścinania wywołanego siłą T wystąpi także skręcanie momentem skręcającym M_s.



Układ sił wewnętrznych (T, M_s) (rys. b) jest równoważny sile wewnętrznej P_w = T, której linia działania jest przesunięta o k_y i k_z względem głównych i centralnych osi z i y (rys. c).

Środek ścinania i jego współrzędne

Współrzędne k_y i k_z określają położenie punktu K, który nazywa się środkiem ścinania. Moment skręcający M_s jest równoważony teraz przez sumę momentów wywołanych przez składowe T_y i T_z siły poprzecznej T względem środka ciężkości przekroju S

$$\boxed{M_s = T_z k_y - T_y k_z}$$

Współrzędne środka ścinania K można teraz obliczyć (przyjmując $T_y = 0$, gdy $T_z \neq 0$, oraz $T_z = 0$, gdy $T_y \neq 0$

$$k_y = \frac{\int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA}{T_Z}$$

$$k_z = \frac{\int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA}{T_y}$$

Jeśli obciążenie zewnętrzne będzie działać w płaszczyźnie równoległej do osi x, przechodzącej przez środek ścinania K, to spowoduje ścinanie pręta bez dodatkowego skręcania. Jeśli przekrój poprzeczny pręta ma oś symetrii, to środek ścinania leży na niej, natomiast gdy przekrój ma dwie osie symetrii, to środek ścinania K pokrywa się ze środkiem ciężkości S. Jeśli przyjąć, że naprężenia styczne τ są stałe w całym przekroju i wynoszą $\tau = \tau_{śr}$, to doprowadza nas to do wzoru który stosuje się w technicznych obliczeniach wytrzymałościowych na ścinanie

$$\boxed{\tau_{śr} = \frac{T}{\int_A dA} = \frac{T}{A}}$$

Skoro naprężenia styczne τ zmieniają się wzdłuż wysokości, zmieniają się również odkształcenia γ, a więc przekrój nie może pozostać płaski.

Podsumowanie

Rozkład naprężeń stycznych wywołanych siłą poprzeczną T

$$\boxed{T = \frac{dM_g}{dx}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{TS_z}{bI_z}}$$

Wzór Żurawskiego

Średnie naprężenia styczne (wzór uniwersalny najczęściej stosowany w obliczeniach).

$$\boxed{\tau_{śr} = \frac{T}{\int_A dA} = \frac{T}{A}}$$

Podsumowanie cd.

Środek ścinania

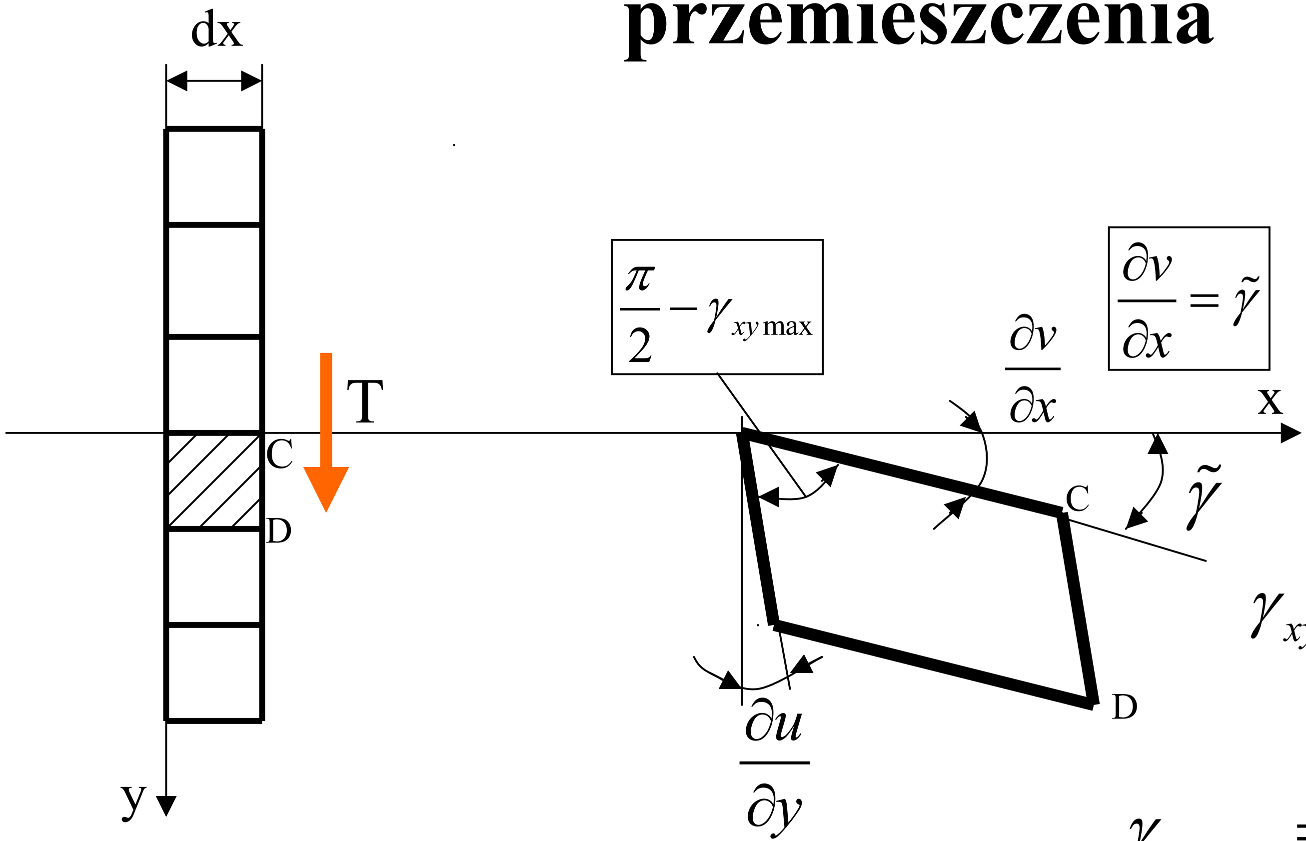
$$\boxed{M_s = T_z k_y - T_y k_z}$$

Współrzędne środka ścinania

$$\boxed{k_y = \frac{\int_A \left(\tau_z y - \tau_y z\right) dA}{T_Z}}$$

$$\boxed{k_z = \frac{\int_A \left(\tau_z y - \tau_y z\right) dA}{T_y}}$$

Wpływ sił poprzecznych na przemieszczenia



$$\gamma_{xy\max} = \frac{\tau_{xy\max}}{G}$$

$$\gamma_{xy\max} = \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy\max} = \tilde{\gamma} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ponieważ $\tau_{xy}=f(y)$, więc odkształcenia wszystkich elementów są różne, największe na osi obojętnej.

$$\tilde{\gamma} = \gamma_{xy\max} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\tilde{\gamma} = \eta\gamma_{xy\max}$$ gdzie $$\gamma_{xy\max} = \frac{\tau_{xy\max}}{G}$$

$$\boxed{\tilde{\gamma} = \eta\frac{\tau_{xy\max}}{G}}$$

$$\tau_{xy\max} = \alpha\tau_{sr} = \alpha\frac{T}{A}$$ np. dla prostokąta: $$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\cdot\frac{T}{A}$$

$$\tilde{\gamma} = \eta\alpha\frac{T}{AG}$$

$$\boxed{\tilde{\gamma} = \beta\frac{T}{AG}}$$

gdzie

$$\beta = \eta\alpha$$

(prostokąt) $\beta = 1.2$

(koło) $\beta = 1.185$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \tilde{\gamma} = \beta \frac{T}{AG}} \qquad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \boxed{\frac{\beta}{AG}\frac{dT}{dx}}$$

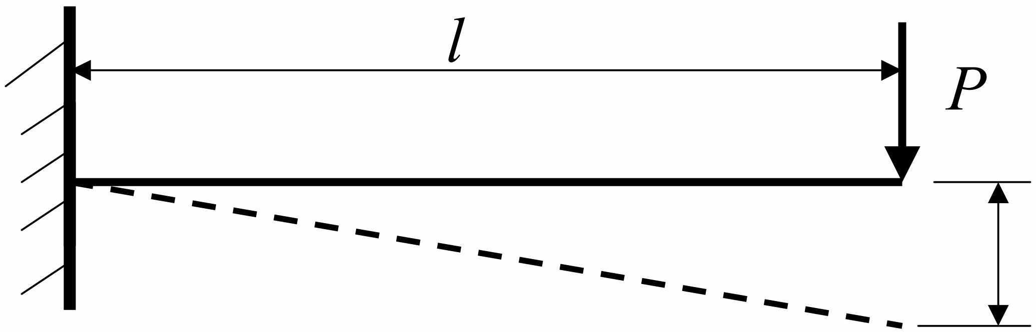
Czyste zginanie:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_g}{EI_z} + \square$$

Równanie różniczkowe osi ugiętej:

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_g}{EI_z} + \frac{\beta}{AG}\frac{dT}{dx}}$$

Przykład



$$f = f_1 + f_2$$

$$f_1 = \frac{Pl^3}{3EI}$$

Przekrój belki prostokątny: $b \times h$ $\quad \beta = \frac{6}{5}$

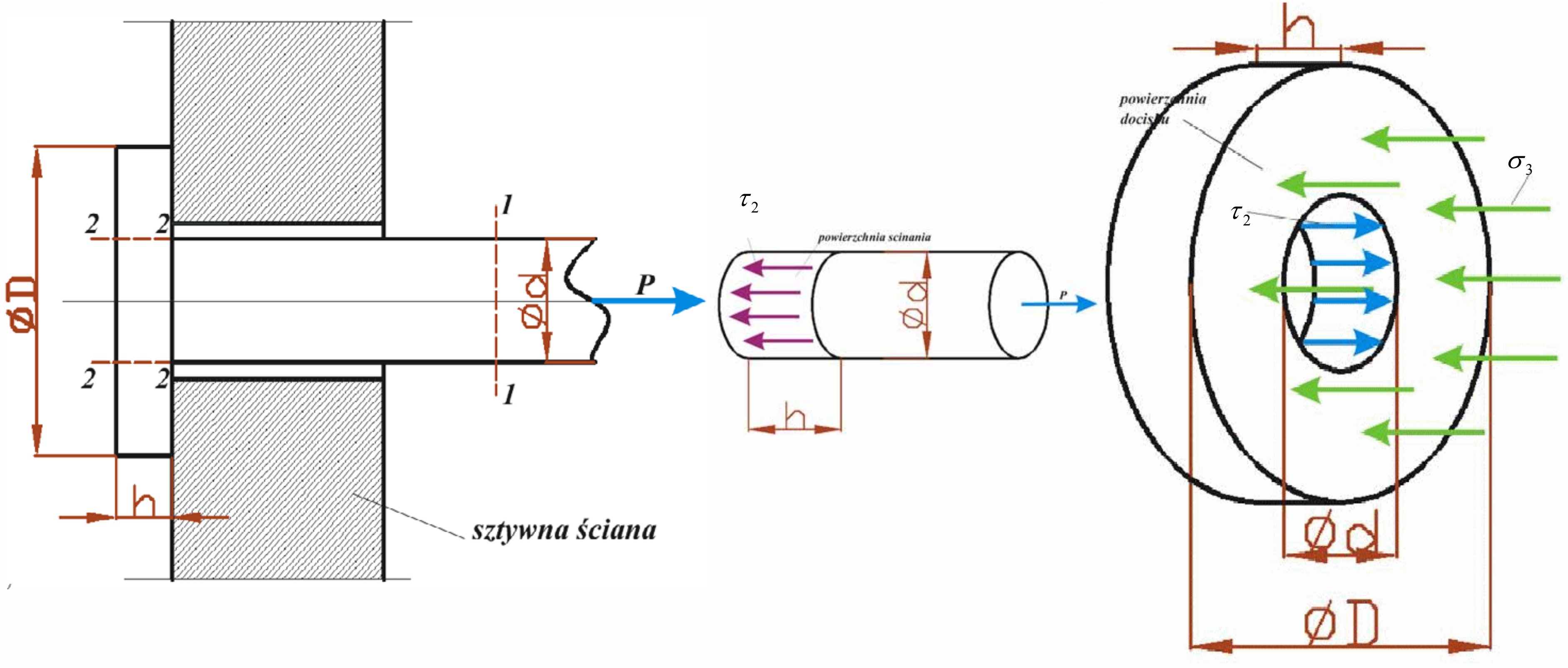
$$f_2 = \beta \frac{Pl}{AG}$$

Dla stali: $\boxed{\frac{f_2}{f_1} = 0.8\left(\frac{h}{l}\right)^2}$

$$Jesli\ np.\ \frac{h}{l} = \frac{1}{10}\ to\ \frac{f_2}{f_1} = 0.008$$

Przykładowe zadanie

Dobrać wymiary elementu przedstawionego na rysunku poniżej, jeżeli siła P = 80 kN, a naprężenia dopuszczalne wynoszą k_t = 120 MPa, k_r = 80 MPa, k_d = 200 MPa.



Rozwiązanie

Przekrój *1 - 1* pręta pracuje na rozciąganie

$$\sigma_1 = \frac{P}{S_1} = \frac{4P}{\pi \cdot d^2} \le k_r$$

więc

$$d \ge \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot k_r}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 80000}{\pi \cdot 120}} = 29{,}1mm$$

Przyjmujemy średnicę d = 30 mm. Jeżeli siła P będzie zbyt duża, to element ulegnie zniszczeniu polegającemu na tym, że pręt przedstawiony na rys. b przesunie się w prawo, a przekrój *2 - 2* zostanie ścięty. Ponieważ pole powierzchni ścinanej jest równe S_2 = pdh, więc naprężenia styczne wynoszą

$$\tau_2 = \frac{P}{S_2} = \frac{P}{\pi \cdot dh} \leq k_t$$

skąd

$$h \geq \frac{P}{\pi \cdot k_t} = \frac{80000}{\pi \cdot 30 \cdot 120} = 10{,}6 mm$$

W miejscach docisku poszczególnych elementów konstrukcji nie mogą powstawać odkształcenia trwałe; naprężenia docisku nie mogą przekraczać wartości naprężeń dopuszczalnych na docisk.

Powierzchnia S_3 (rys. c) jest dociskana do ściany siłą P. Pole powierzchni wynosi

$$S_3 = \frac{1}{4}\pi\left(D^2 - d^2\right)$$

Naprężenia docisku

$$\sigma_3 = \frac{P}{S_3} = \frac{4P}{\pi\left(D^2 - d^2\right)} \leq k_d$$

stąd

$$D \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot k_d} + d^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 80000}{\pi \cdot 200} + 29{,}1^2} = 37{,}5 mm$$

Koniec