http://www.mes.polsl.pl

MES

Dla Pręta Rozciąganego

- Istota problemu
- Dyskretyzacja obszaru
- Wyznaczanie równań elementu
- Agregacja
- Narzucenie warunków brzegowych
- Rozwiązanie równań
- Postprocessing

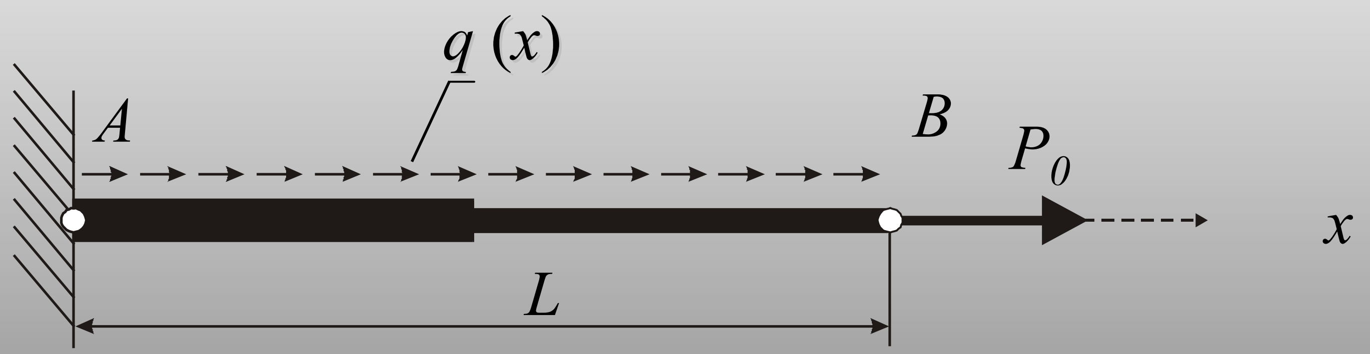
Istota problemu

Przykład pręta rozciąganego

Równanie opisujące problem

Określone warunki brzegowe

Przykład pręta rozciąganego



Wstecz

Dalej

Powrót do: Istota problemu

Równanie opisujące problem

- **Rozciąganie pręta opisuje równanie różniczkowe:**

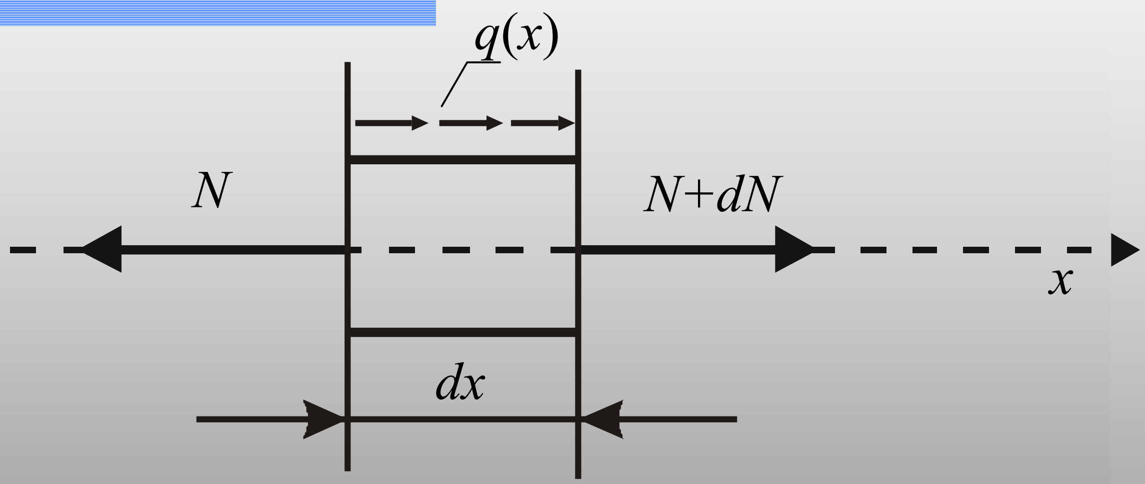
$$\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+q=0\,, \qquad \text{dla } 0<x<\mathrm{L}$$

$a = EA$

Wyprowadzenie równania

Wyprowadzenie równania

Warunek równowagi:



$$\underbrace{dN + q(x)dx = 0 \qquad dN = \frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right]dx}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] + q(x) = 0}$$

Określone warunki brzegowe

- **Warunki brzegowe tworzą:**

  - warunek przemieszczeniowy

$$u(0) = u_0,$$

  - warunek obciążeniowy

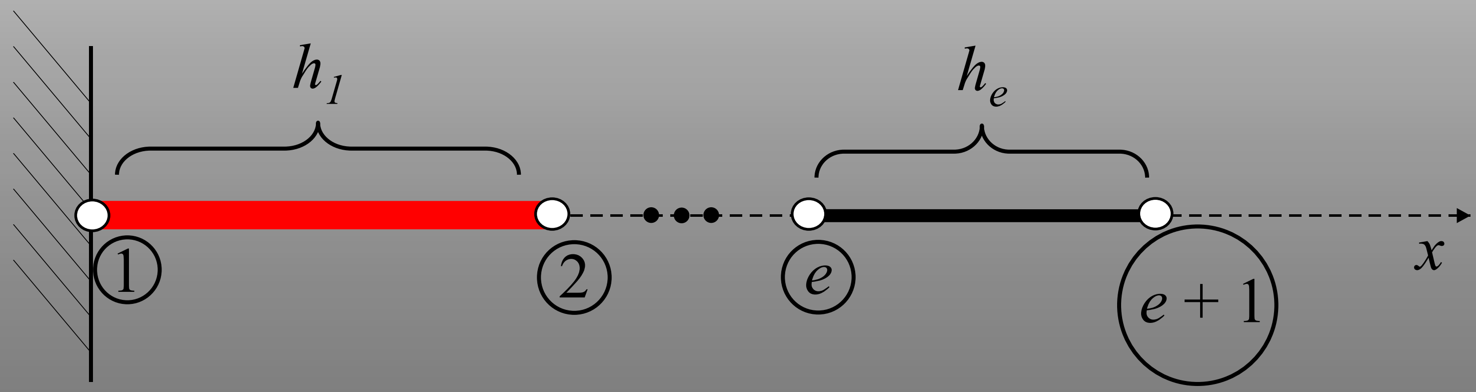
$$\left. \left(a \frac{du}{dx} \right) \right|_{x=L} = P_0 \,,$$

Wstecz Dalej Powrót do: Istota problemu

Dyskretyzacja obszaru

Ze względu na:

- **Materiał,**
- **Przekrój,**
- **Obciążenie,**



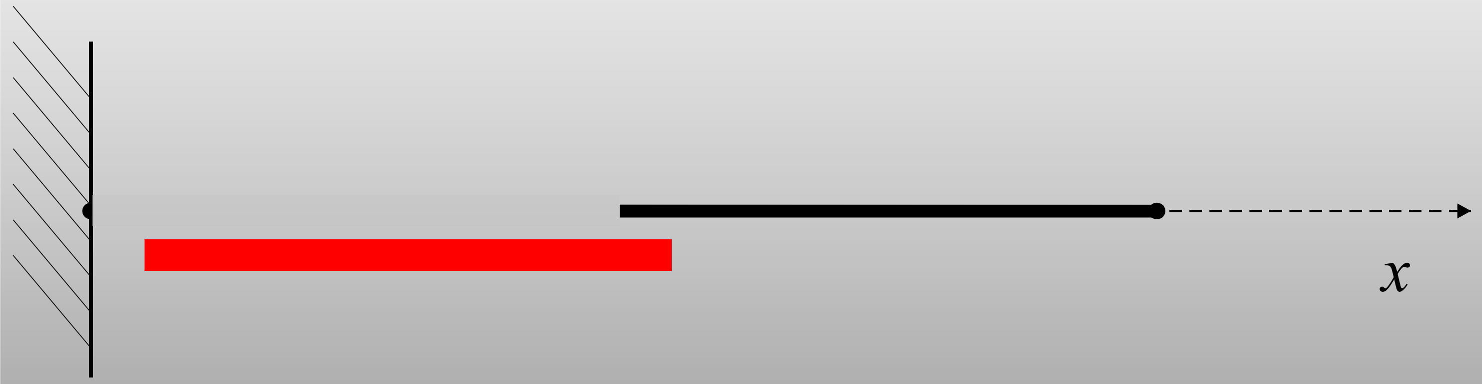
Wstecz Dalej

Wyznaczanie równań elementu

- **Wyizolowanie typowego elementu**
- **Wyznaczenie formy słabej**
- **Wyznaczenie funkcji interpolacyjnych**
- **Utworzenie modelu matematycznego elementu skończonego**

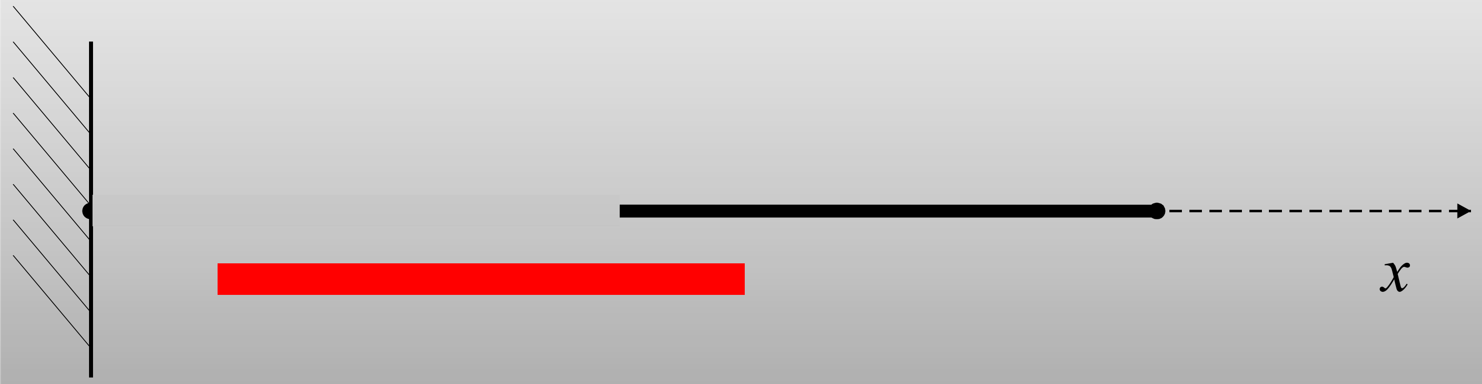
Wyizolowanie typowego elementu

Wyizolowanie typowego elementu



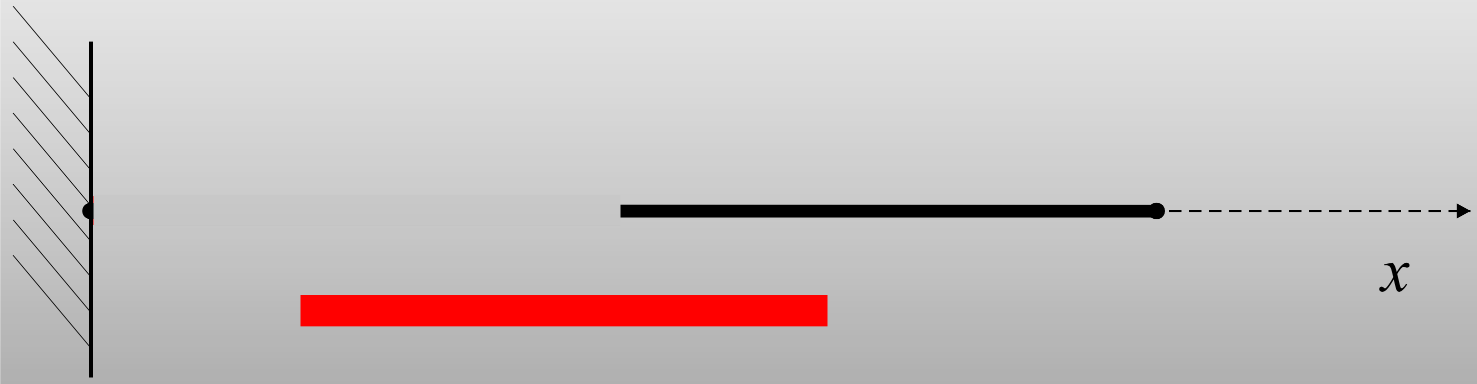
Wstecz Dalej

Wyizolowanie typowego elementu



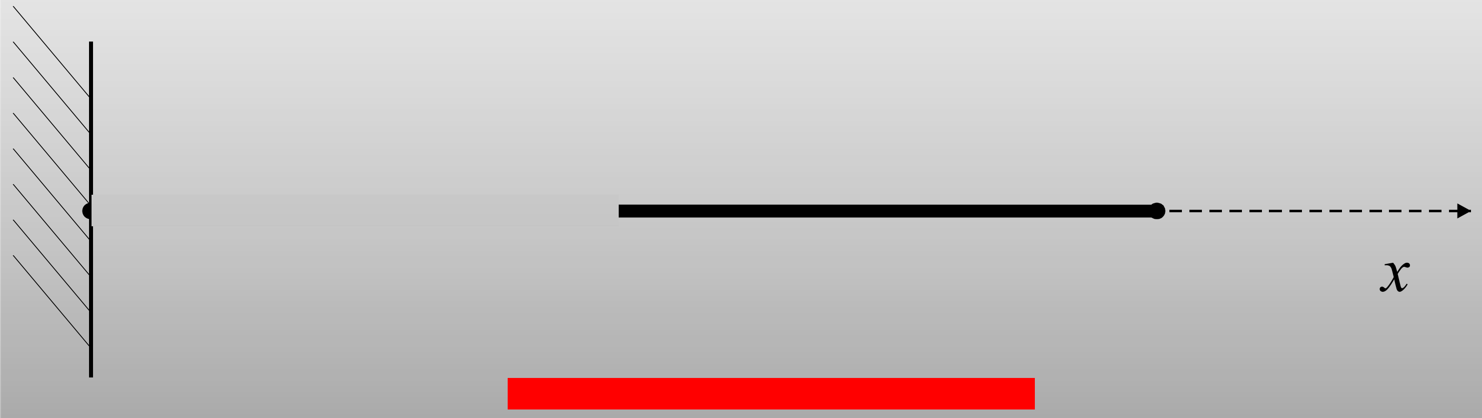
Wstecz Dalej

Wyizolowanie typowego elementu



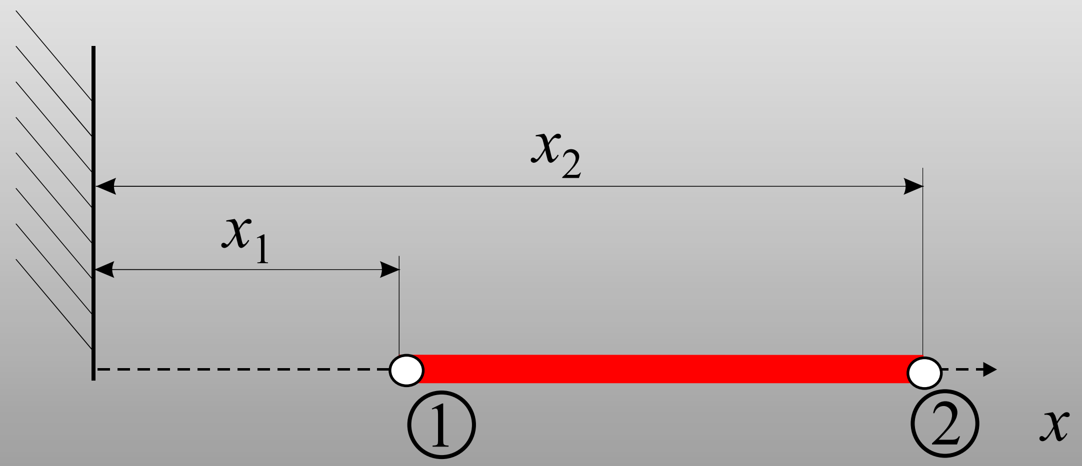
Wyizolowanie typowego elementu

Wyizolowanie typowego elementu



Wstecz Dalej

Wyizolowanie typowego elementu



Równanie opisujące problem

- **Równanie różniczkowe dla elementu skończonego :**

$$\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+q=R(x)\neq 0,\ dla\ x\in\Omega^{e}$$

$a = EA$

R=reszta (residuum)

Równanie opisujące problem

- **Całka ważona :**

$$\int_{x_1}^{x_2} w R(x)\,dx = 0$$

lub

$$\int_{x_1}^{x_2} w\left[\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+q\right]dx = 0$$

w=funkcja wagi

Wstecz Dalej

Powrót do: Istota problemu

Wyznaczenie formy słabej

- **Mnożymy równanie przez funkcję wagi:**

$$\boldsymbol{w}\left[\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)\right]+\boldsymbol{w}\,q=0$$

w – funkcja wagi

Wstecz Dalej Powrót do: Wyznaczanie równań

Wyznaczenie formy słabej

- **Pierwszy człon równania**

$$w\left[\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)\right]=\frac{d}{dx}\left(wa\frac{du}{dx}\right)-a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}$$

dla $x_1 < x < x_2$

Wstecz Dalej Powrót do: Wyznaczanie równań

Wyznaczenie formy słabej

całkujemy

$$\int_{x_1}^{x_2} w\left[\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)\right]dx + \int_{x_1}^{x_2} wq\,dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} w\left[\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)\right]dx \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(wa\frac{du}{dx}\right)dx - \int_{x_1}^{x_2} a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx$$

Wyznaczenie formy słabej

całkujemy

$$\int_{x_1}^{x_2} w\left[\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)\right]dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(wa\frac{du}{dx}\right)dx - \int_{x_1}^{x_2} a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx$$

$$\left[w\left(a\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=x_1}^{x=x_2}$$

Wyznaczenie formy słabej

$$-\int_{x_1}^{x_2}\left(a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}\right)dx+\int_{x_1}^{x_2} wq\,dx+\left[w(x)\left(a\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=x_1}^{x=x_2}=0$$

lub

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2}\left(a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}\right)dx-\int_{x_1}^{x_2} wq\,dx-\left[w(x)\left(a\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=x_1}^{x=x_2}=0}$$

Wyznaczenie formy słabej

- **Naturalne warunki brzegowe:**

$$\left.\left(a\frac{du}{dx}\right)\right|_{x_1} = -Q_1$$

$$\left.\left(a\frac{du}{dx}\right)\right|_{x_2} = Q_2$$

Formy słaba

$$0=\int_{x_1}^{x_2} a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx-\int_{x_1}^{x_2} wqdx-\left[w(x)a\frac{du}{dx}\right]_{x=x_1}^{x=x_2}$$

$$\boxed{0=\int_{x_1}^{x_2} a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx-\int_{x_1}^{x_2} wqdx-w(x_1)Q_1-w(x_2)Q_2}$$

Wyznaczenie funkcji interpolacyjnych

$$\boxed{U^e = a + bx}$$

$$\boxed{\begin{aligned} U_1^e &= a + bx_1 \\ U_2^e &= a + bx_2 \end{aligned}}$$

Wstecz
Dalej
Powrót do: Wyznaczanie równań

Wyznaczenie funkcji interpolacyjnych

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

$$a = \frac{1}{h_e}(u_1^e x_2 - u_2^e x_1) \equiv \frac{1}{h_e}(\alpha_1^e u_1^e + \alpha_2^e u_2^e)$$

$$b = \frac{1}{h_e}(u_2^e - u_1^e) \equiv \frac{1}{h_e}(\beta_1^e u_1^e + \beta_2^e u_2^e)$$

gdzie $\alpha_i^e = (-1)^j x_j^e, \qquad \beta_i^e = (-1)^i$

Wyznaczenie funkcji interpolacyjnych

$$U^e(x) = \sum_{j=1}^{2} u_j^e \psi_j^e(x) = u_1^e \psi_1^e(x) + u_2^e \psi_2^e(x)$$

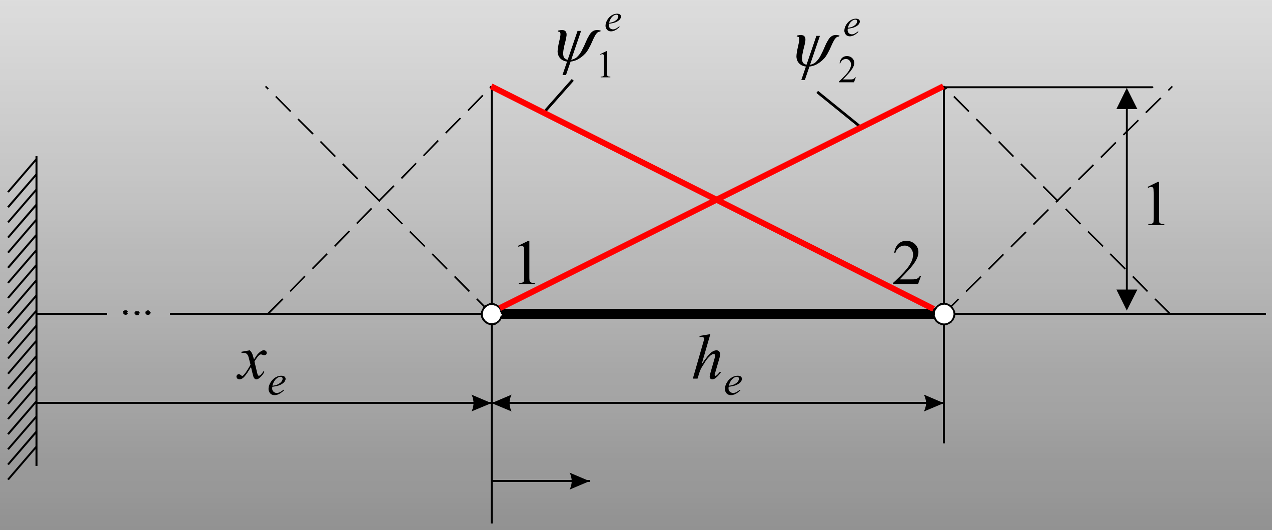
$$\psi_1^e(x) = \frac{1}{h_e}(\alpha_1^e + \beta_1^e x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},$$

$$\psi_2^e(x) = \frac{1}{h_e}(\alpha_2^e + \beta_2^e x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

Wstecz Dalej Powrót do: Wyznaczanie równań

Wyznaczenie funkcji interpolacyjnych

graficznie:



Utworzenie modelu matematycznego elementu skończonego

$$0=\int_{x_1}^{x_2}\left(a\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}\right)dx-\int_{x_1}^{x_2}wq\,dx-\sum_{i=1}^{2}w(x_i^e)Q_i^e$$

$$u^e\approx U^e(x)=\sum_{j=1}^{2}u_j^e\psi_j^e(x)=u_1^e\psi_1^e(x)+u_2^e\psi_2^e(x)$$

$$w=\psi_1$$

$$w=\psi_2$$

Wstecz Dalej Powrót do: Wyznaczanie równań

Utworzenie modelu matematycznego elementu skończonego

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[a \frac{d\psi_1^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^{2} u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) - \psi_1^e q \right] dx - \sum_{j=1}^{2} \psi_1^e (x_j^e)\, Q_j^e$$

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[a \frac{d\psi_2^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^{2} u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) - \psi_2^e q \right] dx - \sum_{j=1}^{2} \psi_2^e (x_j^e)\, Q_j^e$$

$$\boxed{0 = \sum_{j=1}^{2} K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e}$$

$$K_{ij}^e = \int_{x_1}^{x_2} \left(a \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) dx \qquad f_i^e = \int_{x_1}^{x_2} q\, \psi_i^e$$

Wstecz Dalej Powrót do: Wyznaczanie równań

Utworzenie modelu matematycznego elementu skończonego

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \{f^e\} = \frac{q_e h_e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$[K^e]\{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

$[K^e]$ - *macierz sztywności,*

$\{u^e\}$ - kolumnowy *wektor przemieszczeń*

$\{f^e\}$ - kolumnowy *sił zewnętrznych*

$\{Q^e\}$ - kolumnowy *wektor reakcji w węzłach*

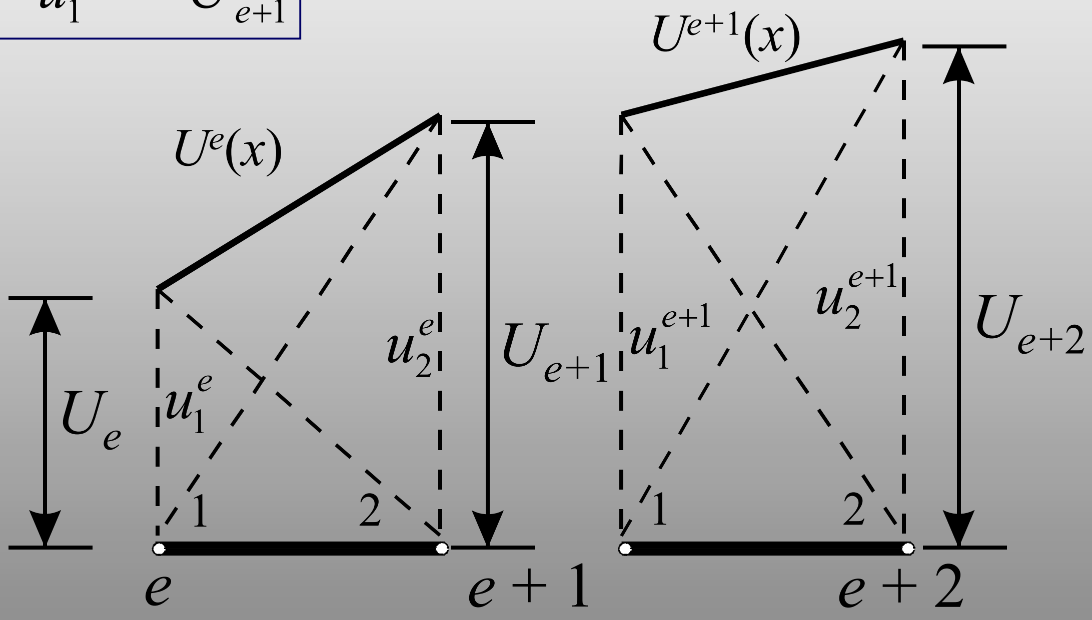
Agregacja

Wyizolowanie typowego elementu pomogło nam sformułować równanie matematyczne, jednak chcąc rozwiązać całkowicie problem musimy dokonać połączenia wszystkich elementów w całość zachowując poniższe warunki:

- **Warunki ciągłości przemieszczeń,**
- **Warunki równowagi sił w węzłach.**

Warunki ciągłości przemieszczeń

$$u_2^e = u_1^{e+1} = U_{e+1}$$



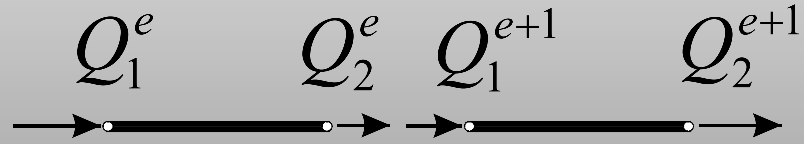
Wstecz Dalej

Powrót do: Agregacja

Warunki równowagi sił

- **Jeżeli w węźle nie ma przyłożonej siły:**

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = 0$$



- **jeżeli przyłożona jest siła równa P_0:**

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = P_0$$

Wstecz
Dalej
Powrót do: Agregacja

Agregacja

Dokonując połączenia elementów uzyskujemy dwukrotnie większą liczbę niewiadomych w porównaniu z ilością równań.

Wprowadzenie omówionych warunków redukuje liczbę równań

z 2e do e + 1

e - liczba elementów

Agregacja

- **Dodajemy drugie równanie e-tego elementu do pierwszego równania (e+1)-go elementu:**

$$\sum_{j=1}^{2}(K_{2j}^{e}u_{j}^{e}+K_{1j}^{e+1}u_{j}^{e+1})=f_{2}^{e}+f_{1}^{e+1}+(Q_{2}^{e}+Q_{1}^{e+1})=$$

$$=f_{2}^{e}+f_{1}^{e+1}+Q_{0}$$

Agregacja

Dla *e*-elementów dwuwęzłowych:

$$K_{11}^{1}U_{1} + K_{12}^{1}U_{2} = f_{1}^{1} + Q_{1}^{1} \qquad \text{(bez zmian)}$$

$$K_{21}^{1}U_{1} + (K_{22}^{1} + K_{11}^{2})U_{2} + K_{12}^{2}U_{3} = f_{2}^{1} + f_{1}^{2} + Q_{2}^{1} + Q_{1}^{2}$$

$$K_{21}^{2}U_{2} + (K_{22}^{2} + K_{11}^{3})U_{3} + K_{12}^{3}U_{4} = f_{2}^{2} + f_{1}^{3} + Q_{2}^{2} + Q_{1}^{3}$$

$$\vdots$$

$$K_{21}^{e-1}U_{e-1} + (K_{22}^{e-1} + K_{11}^{e})U_{e} + K_{12}^{e}U_{e+1} = f_{2}^{e-1} + f_{1}^{e} + Q_{2}^{e-1} + Q_{1}^{e}$$

$$K_{11}^{e}U_{e} + K_{12}^{e}U_{e+1} = f_{1}^{e} + Q_{1}^{e} \qquad \text{(bez zmian)}$$

Narzucenie warunków brzegowych

- **Wprowadzamy warunki brzegowe pierwszego i drugiego rzędu:**

$$\boxed{u(0) = u_0,}$$

$$\boxed{\left.\left(a\frac{du}{dx}\right)\right|_{x=L} = Q_0,}$$

Rozwiązanie równań

Rozdzielamy równania

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & & & \\ K_{21}^1 & K_{22}^1+K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & \\ & K_{21}^2 & K_{22}^1+K_{11}^2 & & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ & 0 & & K_{22}^1+K_{11}^2 & K_{12}^E \\ & & & K_{21}^E & K_{22}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_E \\ U_{E+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1+Q_1^2 \\ Q_2^2+Q_1^3 \\ \vdots \\ Q_2^{E-1}+Q_1^E \\ Q_2^E \end{Bmatrix}$$

Wstecz Dalej

Rozwiązanie równań

na dwa układy pozwalające oddzielnie wyznaczyć przemieszczenia i siły

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \{U^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix}$$

Rozwiązanie równań

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^{1}\} \\ \{U^{2}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^{1}\} \\ \{F^{2}\} \end{Bmatrix}$$

$$\{U^{2}\} = [K^{22}]^{-1}(\{F^{2}\} - [K^{21}]\{U^{1}\})$$

$$\{F^{1}\} = [K^{11}]\{U^{1}\} + [K^{12}]\{U^{2}\}$$

Postprocessing

Przemieszczenie dowolnego punktu elementu:

$$u(x) \approx \begin{cases} U^1 = \sum_{j=1}^{2} u_j^1 \psi_j^1(x) \\ U^2 = \sum_{j=1}^{2} u_j^2 \psi_j^2(x) \\ \vdots \\ U^e = \sum_{j=1}^{2} u_j^e \psi_j^e(x) \end{cases}$$

Postprocessing

Pochodna rozwiązania:

$$\frac{du}{dx} \approx \begin{cases} \dfrac{dU^1}{dx} = \sum_{j=1}^{2} u_j^1 \dfrac{d\psi_j^1}{dx} \\ \dfrac{dU^2}{dx} = \sum_{j=1}^{2} u_j^2 \dfrac{d\psi_j^2}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dU^e}{dx} = \sum_{j=1}^{2} u_j^e \dfrac{d\psi_j^e}{dx} \end{cases}$$

Wstecz Dalej

Powrót do: Postprocessing

Postprocessing

Dla linowych funkcji kształtu pochodne są stałe na całej długości elementu

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \approx \begin{cases} \sum_{j=1}^{2} u_j^1 \frac{d\psi_j^1}{dx} \\ \sum_{j=1}^{2} u_j^2 \frac{d\psi_j^2}{dx} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{2} u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \end{cases}$$

Postprocessing

zatem i naprężenia w całym elemencie są stałe

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{du}{dx} \approx \begin{cases} E^1 \cdot \sum_{j=1}^{2} u_j^1 \frac{d\psi_j^1}{dx} \\ E^2 \cdot \sum_{j=1}^{2} u_j^2 \frac{d\psi_j^2}{dx} \\ \vdots \\ E^e \cdot \sum_{j=1}^{2} u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \end{cases}$$

MES dla pręta skręcanego

W podobny sposób oparte jest rozwiązanie pręta skręcanego. Chcąc porównać je z prętem rozciąganym kliknij:

Prezentacja Microsoft PowerPoint

Wstecz Dalej