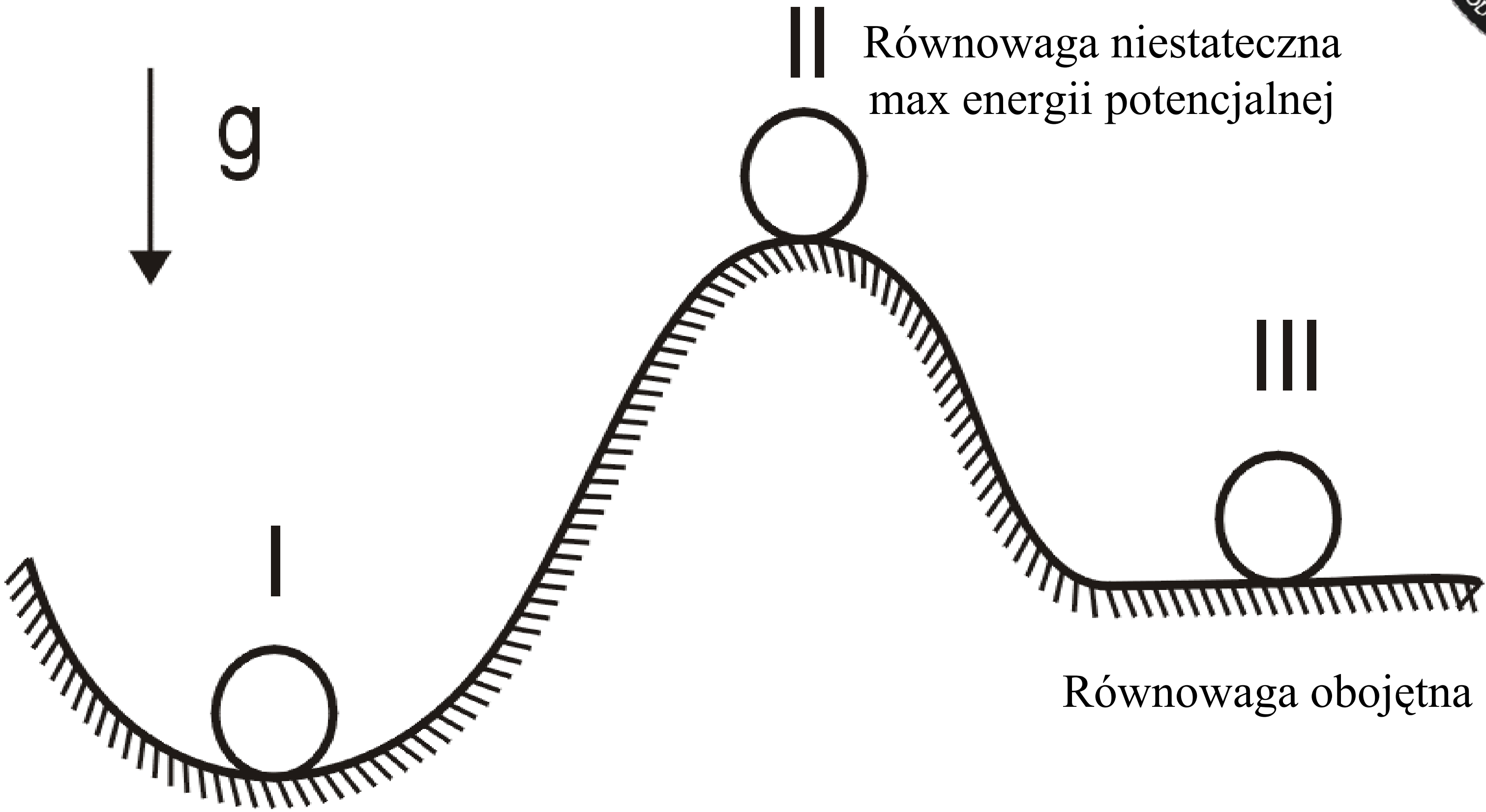
Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki
POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

Wyboczenie pręta

Równowaga ciał - przykład



Równowaga niestateczna
max energii potencjalnej

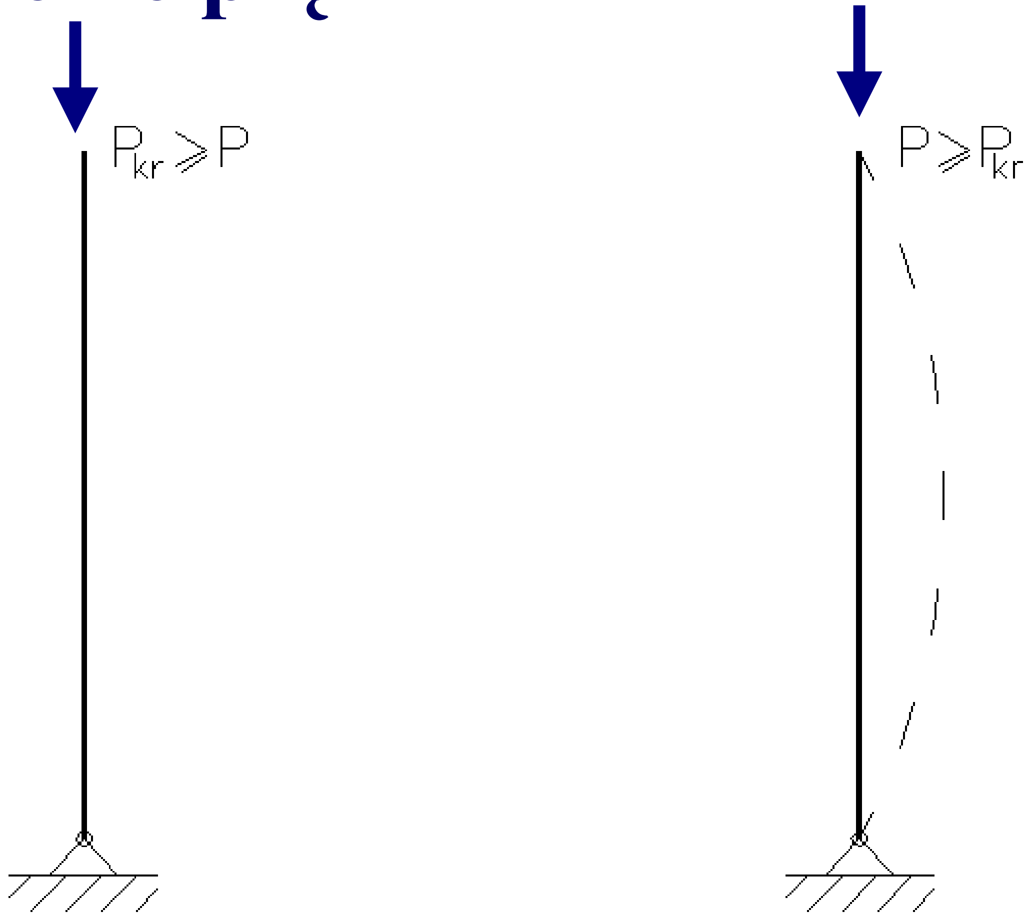
Równowaga obojętna

Stan równowagi statecznej
(trwałej)
minimum energii potencjalnej

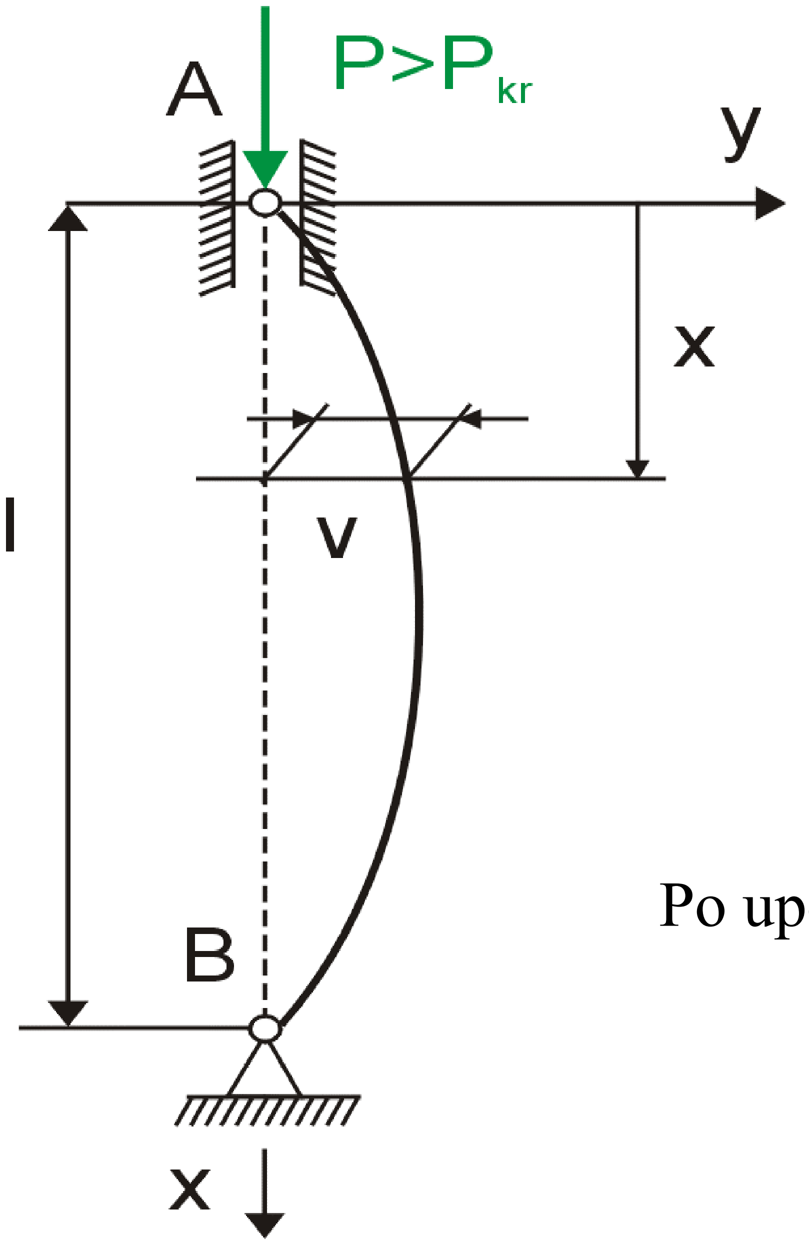
Równowaga ciał

- **Równowaga stateczna (trwała)** - taka forma równowagi w której ciało wychylone z położenia pierwotnego z powrotem do niego powraca.
- **Równowaga niestateczna** – ciało wychylone z położenia pierwotnego nie wraca do niego, ale przechodzi do innego.
- **Równowaga obojętna** – ciało wychylone z położenia pierwotnego pozostaje w nowym położeniu.

Wyboczenie pręta



Wygięcie pręta spowodowane przekroczeniem przez siłę ściskającą wartości krytycznej P_{kr}



$$M_g(x) = P_{kr} \cdot v$$

$$v'' EI = -M_g(x)$$

Formuła Eulera na siłę krytyczną przy wyboczeniu sprężystym pręta:

$$\boxed{EIv'' = -P_{kr} v}$$

E – moduł Younga

I – moduł przekroju poprzecznego pręta

Po uporządkowaniu:

$$\boxed{v'' + \frac{P_{kr}}{EI} v = 0}$$

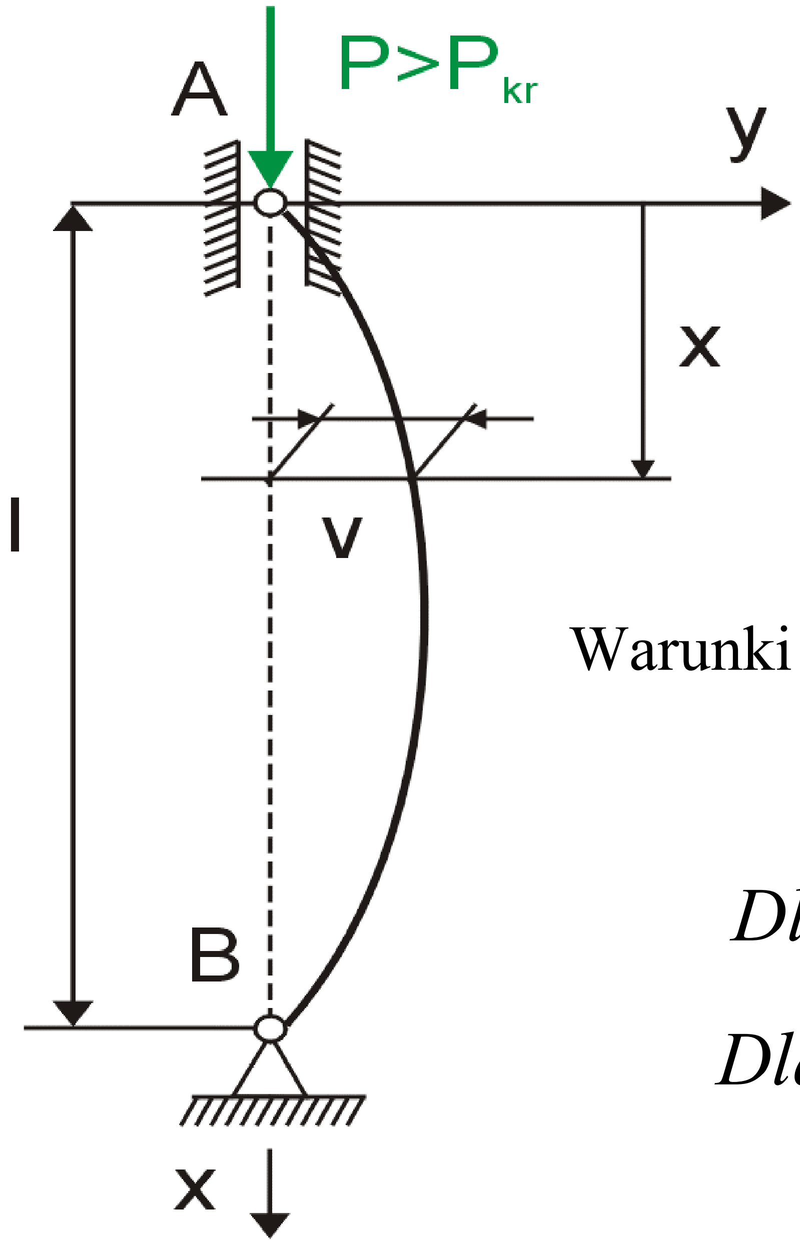
Podstawiając $\frac{P_{kr}}{EI} = k^2$ otrzymujemy: $v'' + k^2 v = 0;$

Całka ogólna ma postać: $v(x) = A\sin kx + B\cos kx$

Podstawiając: $k = \sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}}$

otrzymujemy:

$$\boxed{v(x) = A\sin\sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}}x + B\cos\sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}}x}$$



$$v(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

Warunki brzegowe:

$$Dla \quad x = 0, \; v = 0, \Rightarrow \; B = 0$$

$$Dla \quad x = l, \; v = 0, \Rightarrow \; A\sin kl = 0$$

Warunek $A \sin kl = 0$ jest spełniony gdy *A=0,*

lub gdy:

$$\sin kl = 0$$

czyli:

$$kl = n\pi, \qquad n = 1,2,3,...$$

podstawiając:

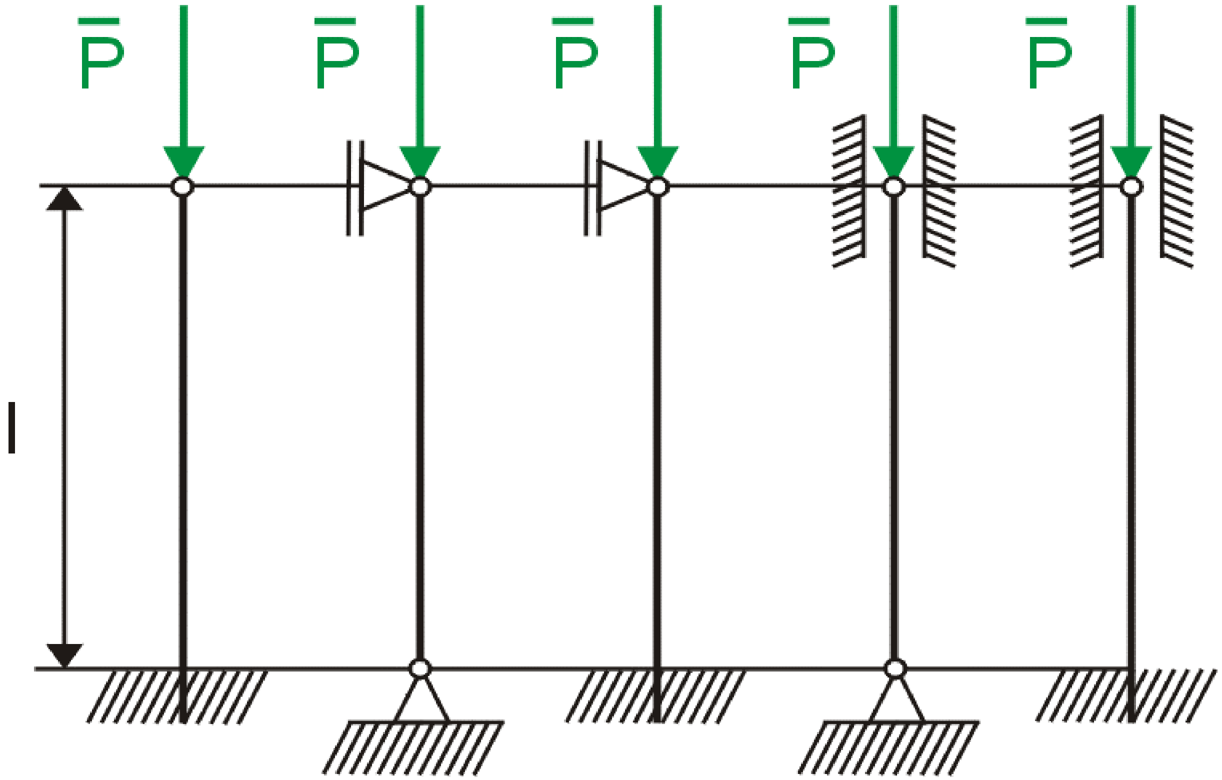
$$k = \sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}}\, l = n\pi \quad \Rightarrow \quad P_{kr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$$

Wzór na Eulerowską siłą krytyczną:

$$\boxed{P_{kr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{l_r^2}}$$

$$\boxed{P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l_r^2}}$$

Gdzie: $l_r = \alpha \cdot l$



α	2	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

Naprężenia

$$I = Ai^2 \qquad P_{kr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{l_r^2} \qquad \sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A}$$

Naprężenie krytyczne : $\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EAi^2}{l_r^2 A}$

Przekształcając: $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EAi^2}{l_r^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_r}{i}\right)^2}$

$$\boxed{\frac{l_r}{i} = \lambda}$$

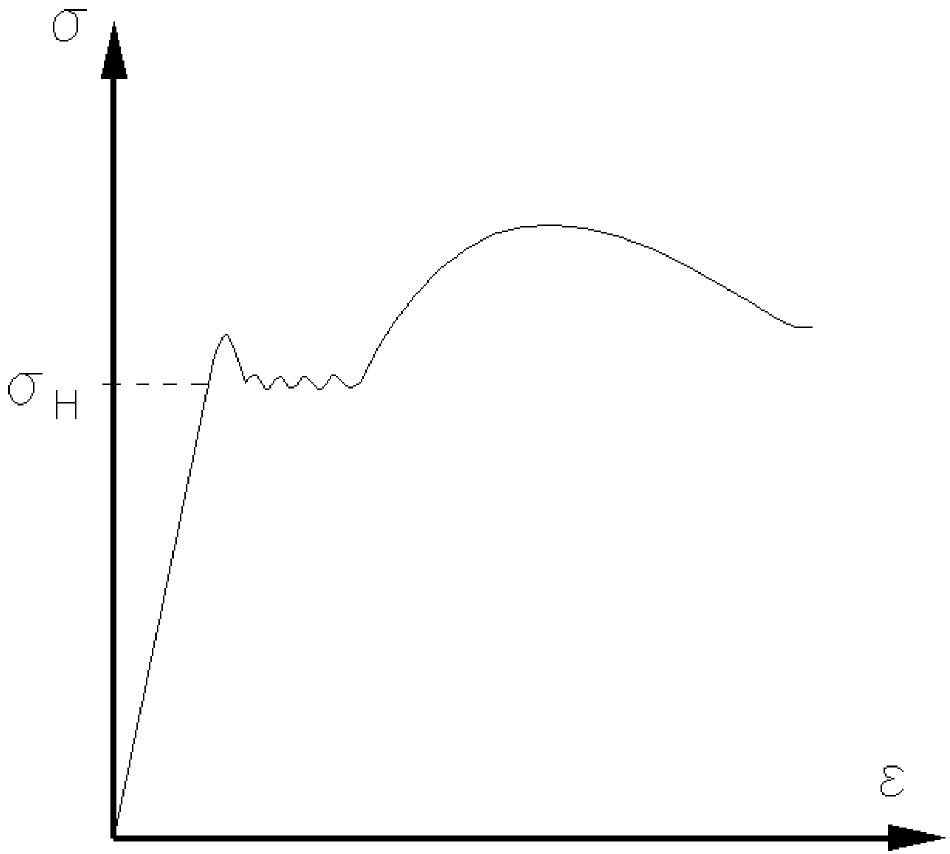
smukłość pręta

$$\boxed{\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$

eulerowskie naprężenie krytyczne

Naprężenia

$$\boxed{\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$ jest prawdziwe tylko gdy $\boxed{\sigma_{kr} \le \sigma_H}$ (granica proporcjonalności)



$$\sigma_H = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{gr}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_H}}}$$

smukłość graniczna

Podsumowanie

Siła krytyczna

$$\boxed{\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$

Naprężenie krytyczne

$$\boxed{P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l_r^2}}$$

TYLKO WTEDY GDY:

$$\boxed{\lambda > \lambda_{gr}}$$

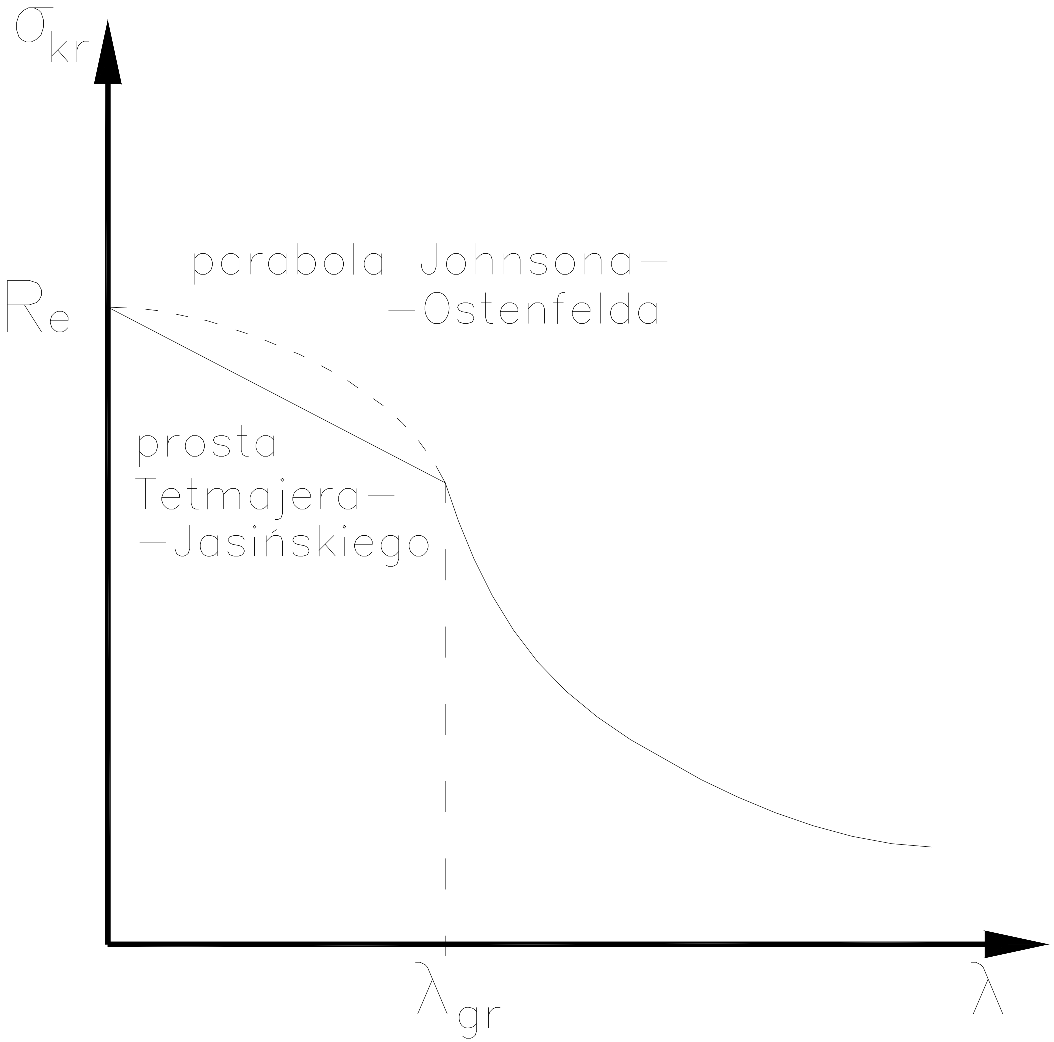
gdzie

$$\boxed{\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_H}}}$$

smukłość graniczna

Gdy $\lambda < \lambda_{gr}$ i $\sigma_{kr} < R_e$

Stosujemy zależności eksperymentalne:



$$\boxed{\sigma_{kr} = a - b\lambda}$$

Wzór Tetmajera-Jasińskiego

$$\boxed{\sigma_{kr} = A - B\lambda^2}$$

Wzór Johnsona-Ostenfelda

Gdzie:

A, B, a, b – stałe materiałowe

ustalone doświadczalnie

Kryteria wyboczenia

$$\boxed{P \le \frac{P_{kr}}{n_w},}$$ czyli $$\boxed{P \le \frac{\pi^2 EI}{n_w l_r^2}}$$

$$\boxed{\sigma \le \frac{\sigma_{kr}}{n_w},}$$ czyli $$\boxed{\frac{P}{A} \le \frac{\sigma_{kr}}{n_w}}$$

n_w – współczynnik bezpieczeństwa ze względu na wyboczenie

Uproszczone kryterium wyboczenia

$$\boxed{\sigma \le \beta k_c,}$$

czyli

$$\boxed{\frac{P}{A} \le \beta k_c}$$

k_c – dopuszczalne naprężenie materiału na ściskanie

β – współczynnik zależny od smukłości pręta i rodzaju materiału

Materiał	λ									
	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
St05 St35 St35x	0,950	0,890	0,800	0,680	0,550	0,420	0,320	0,250	0,200	0,160
18G2 18G2A	0,950	0,880	0,770	0,600	0,410	0,300	0,230	0,180	0,140	0,110