Złożone działanie
sił wewnętrznych
w prętach prostych

Jeżeli siły wewnętrzne nie redukują się wyłącznie do siły podłużnej <u>N</u>, poprzecznej <u>T</u> i momentu gnącego <u>Mg</u> czy momentu skręcającego <u>Ms</u>, to przypadki takie nazywa się

<u>złożonymi zagadnieniami wytrzymałości prętów</u>.

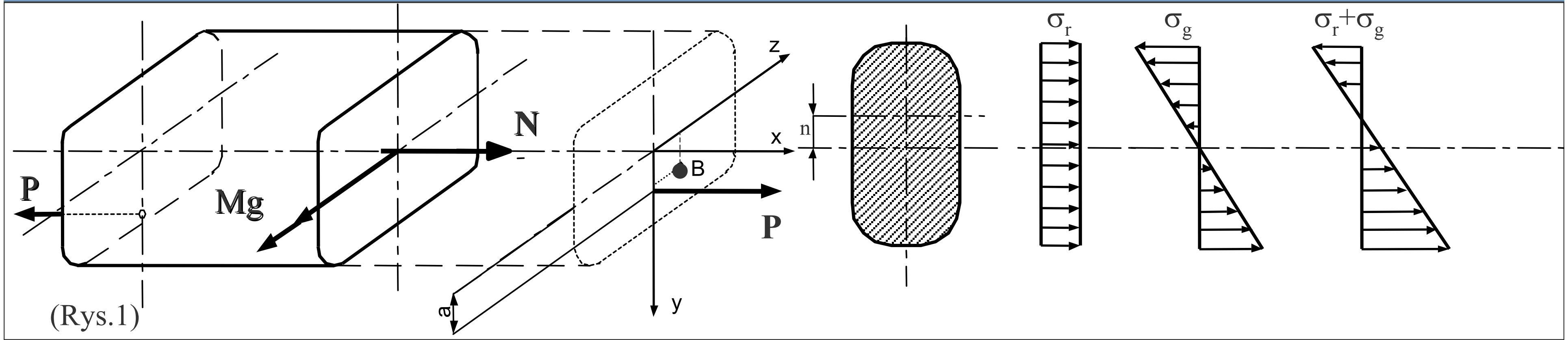
NAPRĘŻENIA W PRĘCIE ROZCIĄGANYM LUB ŚCISKANYM I ZGINANYM

Rozpatrzymy pręt prosty obciążony układem dwóch sił P równoważących się (rys.1).Ich prosta działania nie pokrywa się z osią pręta, ma jednak jej kierunek. Obciążenie takie określa się jako **rozciąganie mimośrodowe**.

Osie y i z są **głównymi osiami bezwładności przekroju**. Jako siły wewnętrzne w dowolnym przekroju występują:

- **siła podłużna N = P**
- **moment gnący Mg = Pa**.

Jest to więc zagadnienie równoczesnego rozciągania i zginania, które z uwagi na to, że wektor momentu gnącego ma kierunek głównej osi bezwładności przekroju, jest **zginaniem prostym**.



(Rys.1)

Naprężenie spowodowane **rozciąganiem w dowolnym punkcie *B*** wynosi

$$\sigma_r = \frac{N}{A} = \frac{P}{A}$$

a naprężenie od zginania

$$\sigma_g = \frac{M_g}{I_z} y = \frac{Pa}{I_z} y$$

W obu przypadkach wywołany **stan naprężenia** jest **jednoosiowy.** Składając **naprężenia σ_r i σ_g,** otrzymujemy naprężenie całkowite

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_g = \frac{P}{A} + \frac{Pa}{I_z} y$$

lub po podstawieniu $I_{\dot{z}}=Ai_z^2$ (gdzie $i_{\dot{z}}$ - promień bezwładności przekroju względem osi z)

$$\sigma = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{a}{i_z^2} y\right)$$

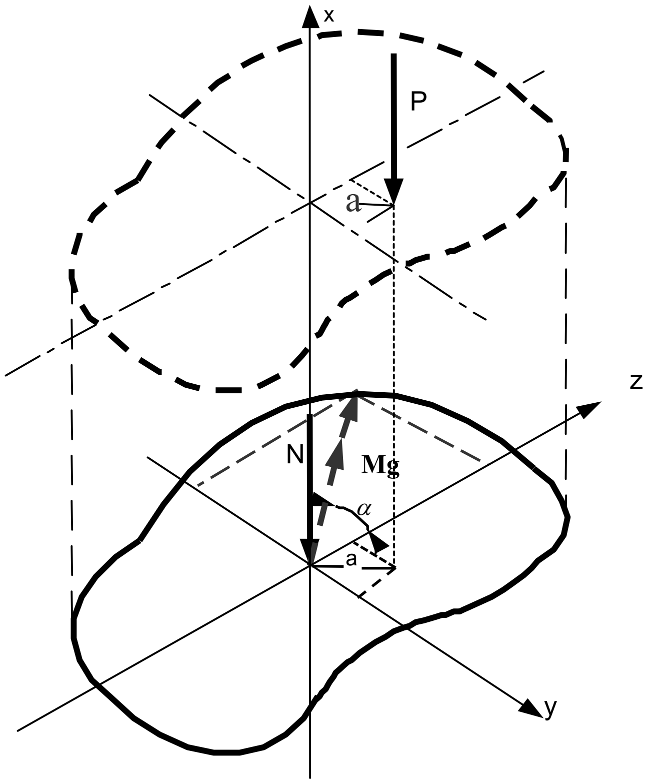
Porównując σ = 0, otrzymujemy równanie **osi obojętnej**

$$1 + \frac{a}{i_z^2} y_o = 0$$

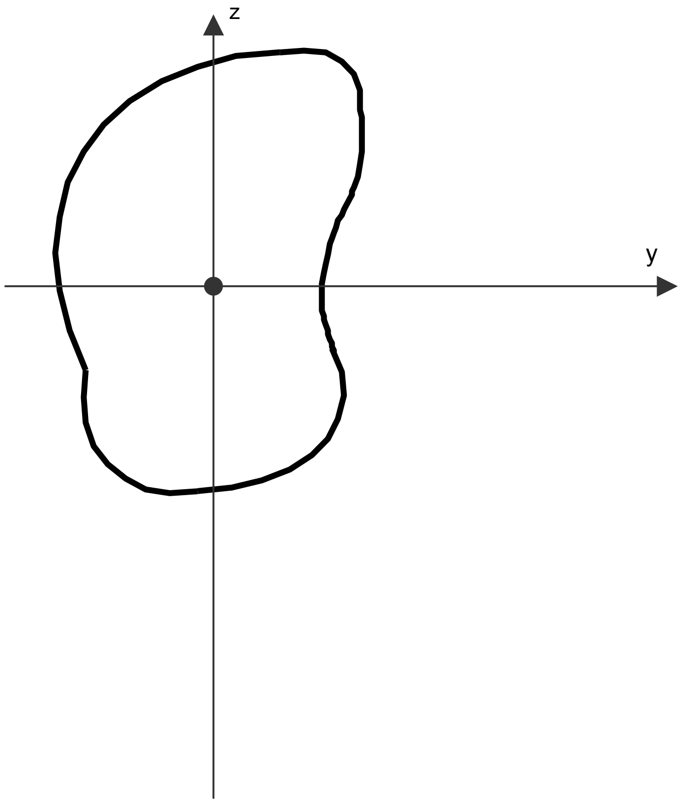
Jest to **równanie linii prostej**, równoległej do osi *z*, przesuniętej względem niej o $n = -i_z^2 / a$

Na rys. (1) oś obojętna linii przecina przekrój pręta; zmniejszając mimośród *a* możemy ją odsunąć poza przekrój pręta. Wówczas wystąpią wyłącznie naprężenia dodatnie, choć o zmiennych wartościach.

Na przykładzie ***pręta ściskanego*** mimośrodowo **siłą P** (rys.2) rozważymy przypadek , gdzie oprócz działania siły osiowej występuje **zginanie ukośne**.W dowolnym przekroju pręta wystąpią: **siła podłużna N = - P** i **moment gnący Mg = Pa**, powodujący **zginanie ukośne**



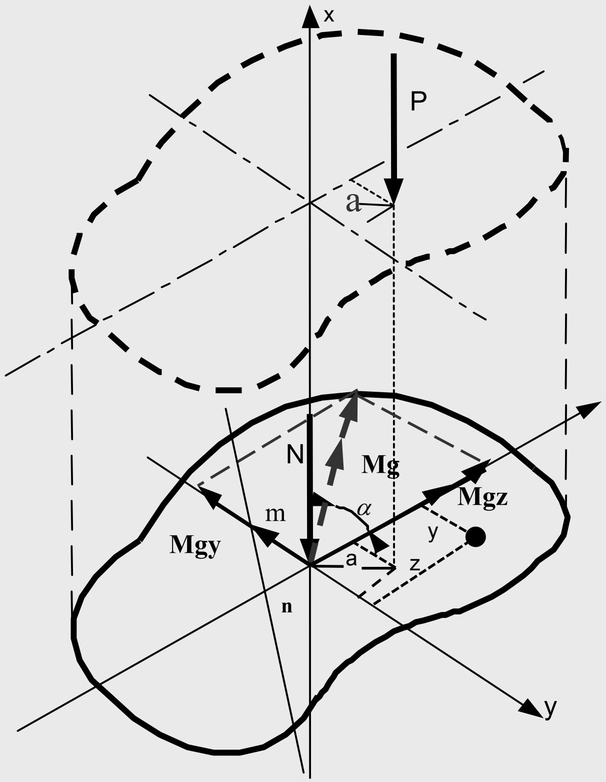
Rys.2



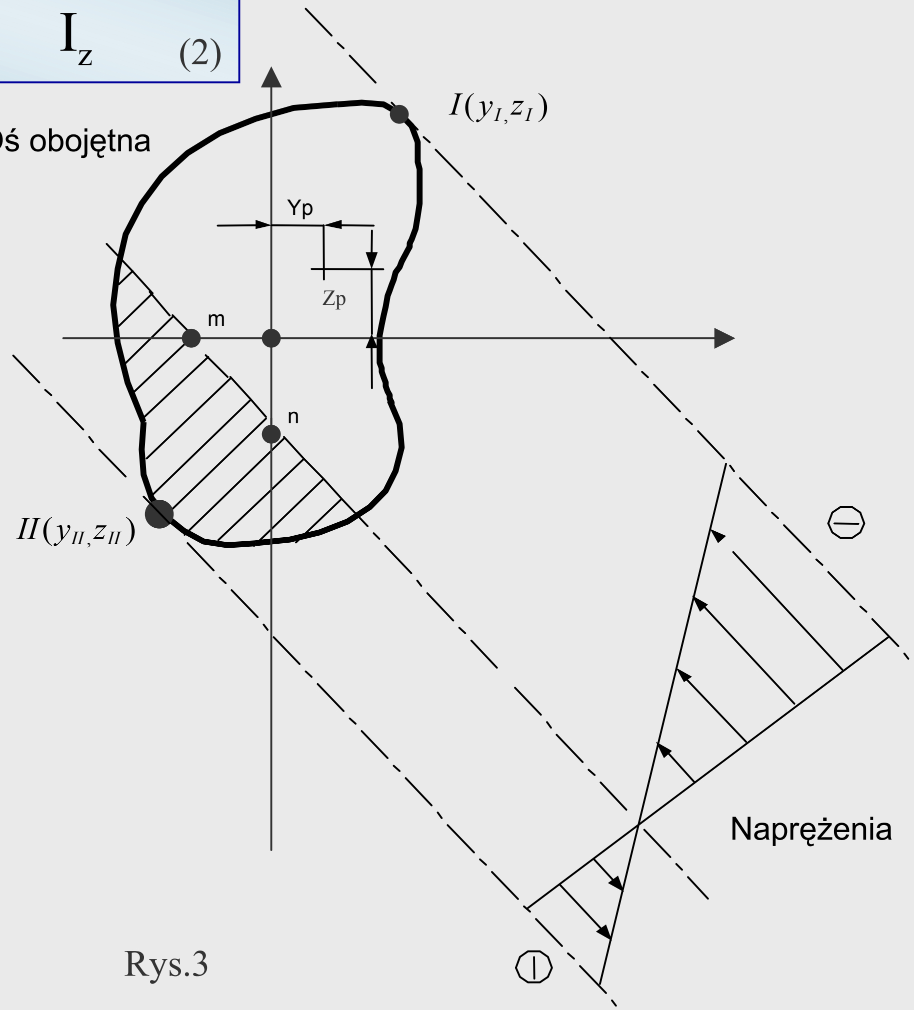
Rys.3

Moment gnący rozkłada się na dwa momenty zginania prostego. $M_{gy} = -Pz_p$ i $M_{gz} = Py_p$, gdzie y_p i z_p są odległościami prostej działania P od gnącego w punkcje o współrzędnych y i z, otrzymujemy

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{gy} z}{I_y} - \frac{M_{gz} y}{I_z} \qquad (2)$$



Rys.2



Rys.3

Po wstawieniu odpowiednich wyrażeń na ***N*, *M*$_{gy}$, *M*$_{gz}$** otrzymujemy

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Pz_p}{I_y} z - \frac{Py_p}{I_z} y \qquad (2)$$

Podstawiając za $I_y = Ai_y^2 \quad I_z = Ai_z^2$

$$\sigma = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y\right) \qquad (3)$$

Po porównaniu **$\sigma = 0$** otrzymujemy

$$1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_o + \frac{y_p}{i_z^2} y_o = 0 \qquad (4)$$

Jest to równanie miejsca geometrycznego punktów, w którym naprężenie równe jest zeru. Miejscem tym jest linia prosta nie przechodząca przez środek przekroju. Jest to **oś obojętna.**
Największe wartości osiągają naprężenia ściskające i rozciągające na konturze przekroju w punktach *I* i *II* (rys.3) najbardziej oddalonych od osi obojętnej po obydwu jej stronach.

Równanie (4) możemy przedstawić w postaci

$$y_o = -\frac{i_z^2}{y_p} - \frac{i_z^2 z_p}{i_y^2 y_p} z_o \qquad (5)$$

Po podstawieniu za $\frac{i_z^2}{i_y^2} = \frac{I_z}{I_y}$, $-\frac{z_p}{y_p} = \operatorname{tg}\alpha$ (gdzie α jest kątem nachylenia wektora momentu gnącego do osi *z*) otrzymujemy

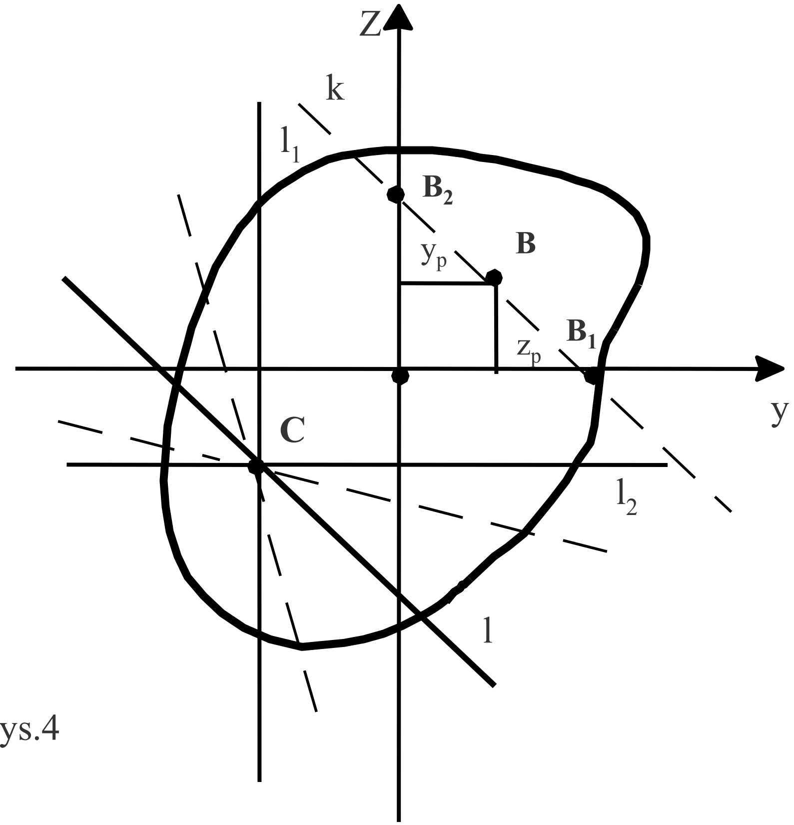
$$y_o = -\frac{i_z^2}{y_p} + \frac{I_z}{I_y} z_o \operatorname{tg}\alpha \qquad (6)$$

Kąt nachylenia β osi obojętnej do osi *z* określa $\operatorname{tg}\beta = \frac{I_z}{I_y}\operatorname{tg}\alpha$. Jest on taki sam, jak w zginaniu ukośnym.

Wyznaczmy odcinki *m* i *n*, jakie oś obojętna odetnie na osiach *y* i *z* (rys.3)

$$m = y_{z_o=0} = -\frac{i_z^2}{y_p} \qquad n = z_{y_o=0} = -\frac{i_y^2}{z_p} \qquad (7)$$

Niech **sile *P*** przyłożonej w **punkcie *B*** (rys. 4) odpowiada **oś obojętna *l***. Przyjmuje się na niej dowolny punkt ***C* (y_c, z_c)**. Aby zbadać jak będzie się zmieniało położenie punktu przyłożenia siły ***P*** w przypadku obrotu osi obojętnej wokół punktu ***C***, należy w równaniu osi obojętnej (4) wstawić za y_o i z_o stałe wartości y_c i z_c, traktując y_p i z_p jako zmienne

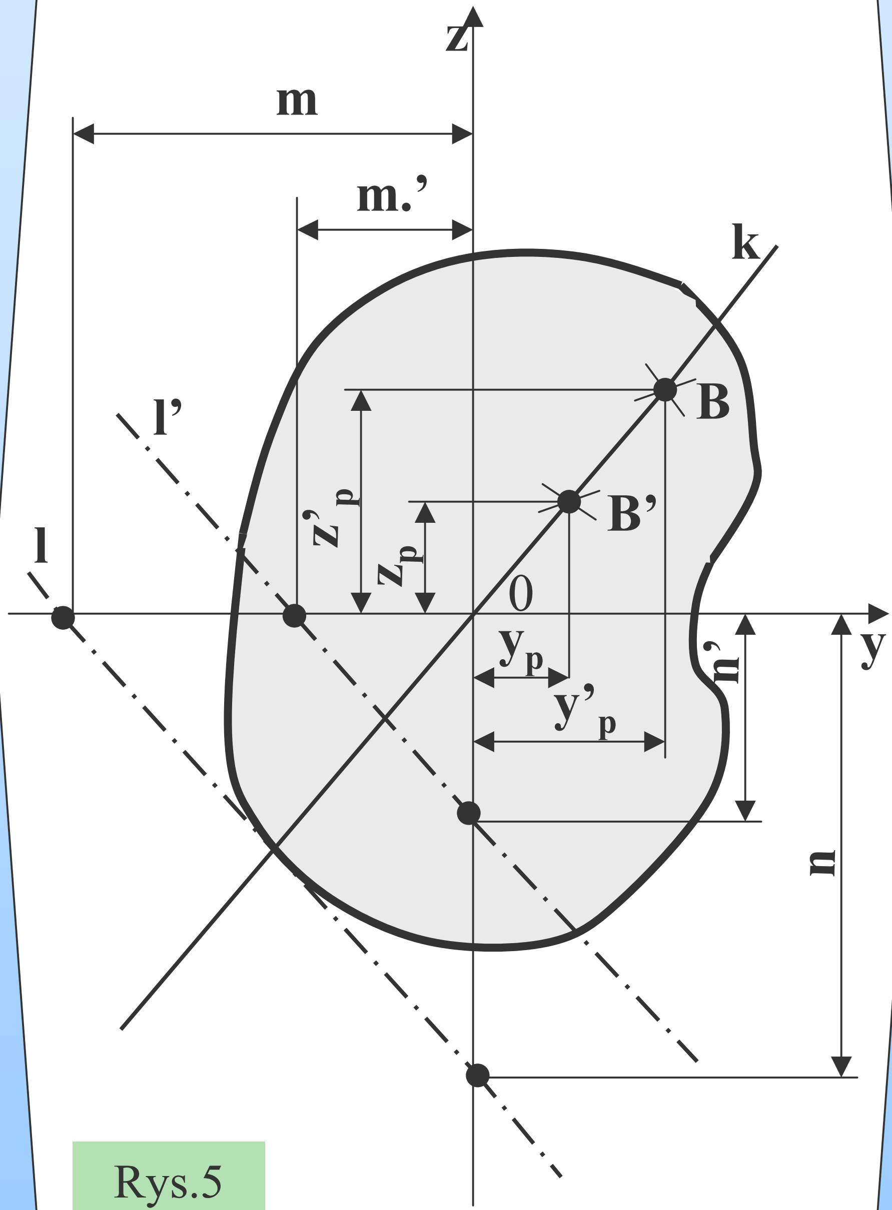


Rys.4

Jest to *równanie linii prostej k* (ze względu na zmienne y_p i z_p).

$$1+\frac{z_c}{i_y^2}z_p+\frac{y_c}{i_z^2}y_p=0$$

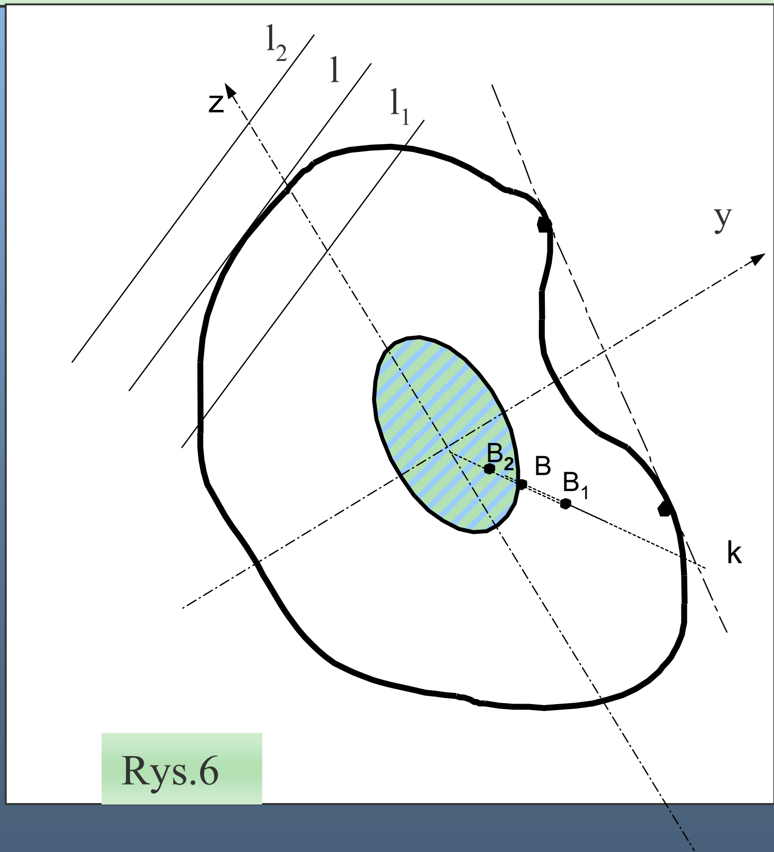
Obrotowi linii dookoła jednego punktu odpowiada przesuwanie się punktu przyłożenia siły po linii prostej. W przypadku gdy siłę ***P*** przyłożymy w punktach $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_2}$ leżących na osiach głównych bezwładności przekroju, łatwo wyznaczymy osie obojętne $\boldsymbol{l_1}$ i $\boldsymbol{l_2}$ równoległe do odpowiednich osi głównych. Ich przecięcie wyznacza punkt obrotu osi obojętnej w przypadku przesuwania się punktu przyłożenia siły po prostej *k*.



Rys.5

RDZEŃ PRZEKROJU

Dla siły ściskającej w punkcie B_1 (rys.6) wyznaczamy oś obojętna l_1. Przechodzi ona przez figurę przekroju, więc w obrębie przekroju wystąpią naprężenia ściskające i rozciągające. Dla siły przyłożonej w punkcje B_2, leżącej na prostej przechodzącej przez punkt $\boldsymbol{B_1}$ i środek przekroju, oś obojętna l_2 będzie przechodzić równolegle do osi l_1, lecz poza przekrojem.



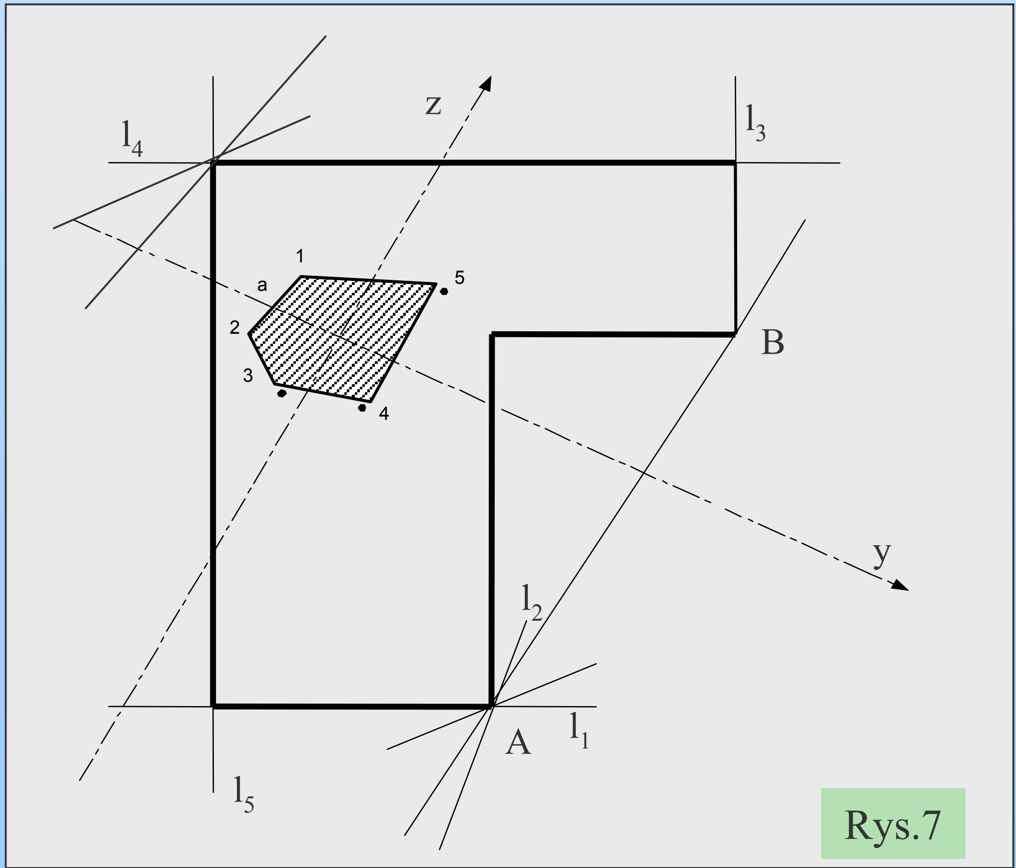
Rys.6

W przekroju występują wyłącznie naprężenia jednego znaku (ściskające).

Miejsce geometryczne punktów przyłożenia siły (działającej osiowo), dla których w przekroju występują naprężenia wyłącznie jednego znaku , nazywa się rdzeniem (jądrem) przekroju.

Kontur rdzenia wyznaczają punkty *B* (rys. 6), dla których osie obojętne będą styczne do konturu przekroju, nie przecinając go.

Wyznaczeniem rdzenia przekroju jest zadaniem szczególnie prostym, gdy przekrój jest wielokątem (rys.7)



Rys.7

Równoczesne działanie momentu skręcającego i siły podłużnej lub momentu gnącego

Technicznym przykładem równoczesnego skręcania i rozciągania może być zawieszony pionowo *wał turbiny wodnej*.

W celu określenia stanu naprężenia w wale wyznacza się oddzielnie **naprężenia styczne τ** jak dla skręcania i **naprężenia normalne σ** jak dla rozciągania.

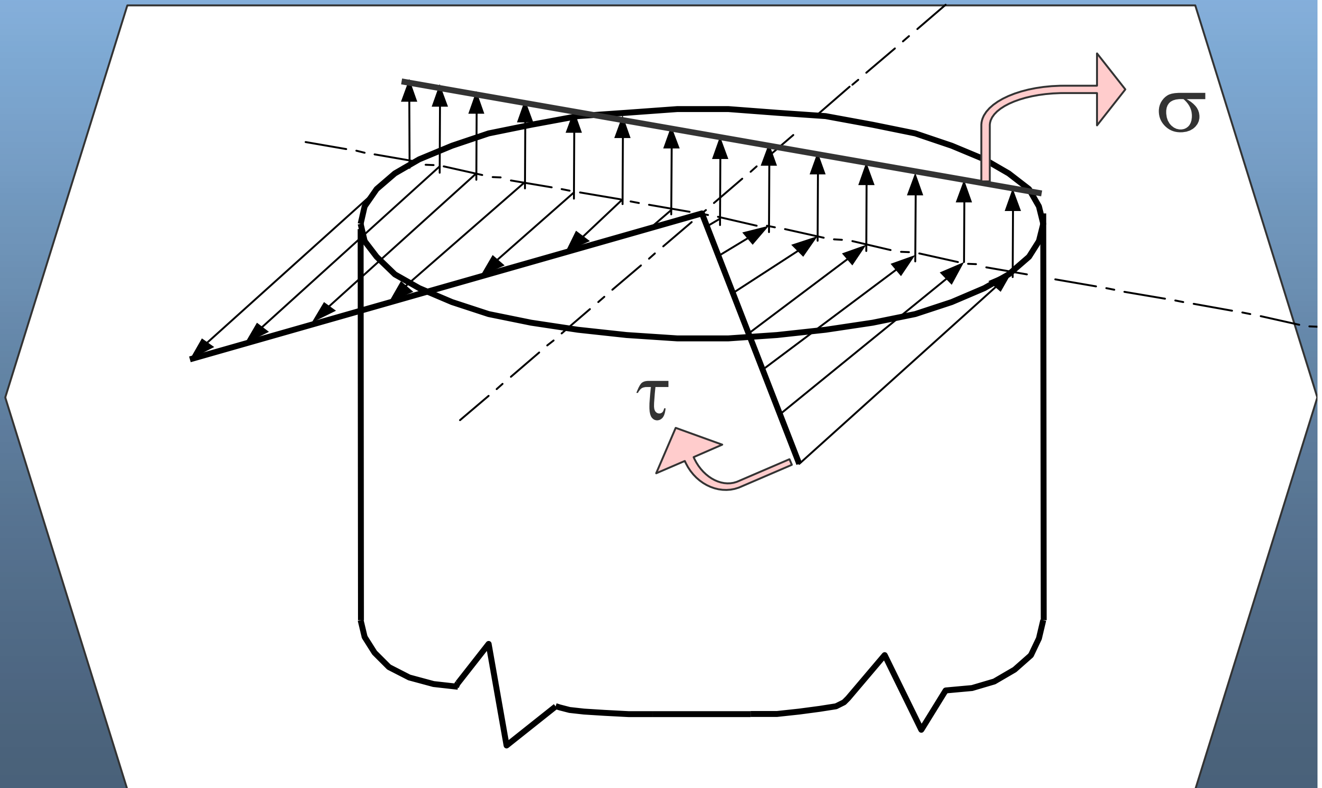
Do **oceny wytrzymałościowej** należy, opierając się na odpowiedniej hipotezie wytrzymałościowej, obliczyć **naprężenia zredukowane σ_{red}** i porównać je z **naprężeniem dopuszczalnym σ_{dop}**.

W wale okrągłym (rys.8) naprężenie od rozciągania rozkłada się w przekroju równomiernie

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Naprężenia styczne zaś są największe na obwodzie

$$\tau_{max} = \frac{Ms}{Wo}$$

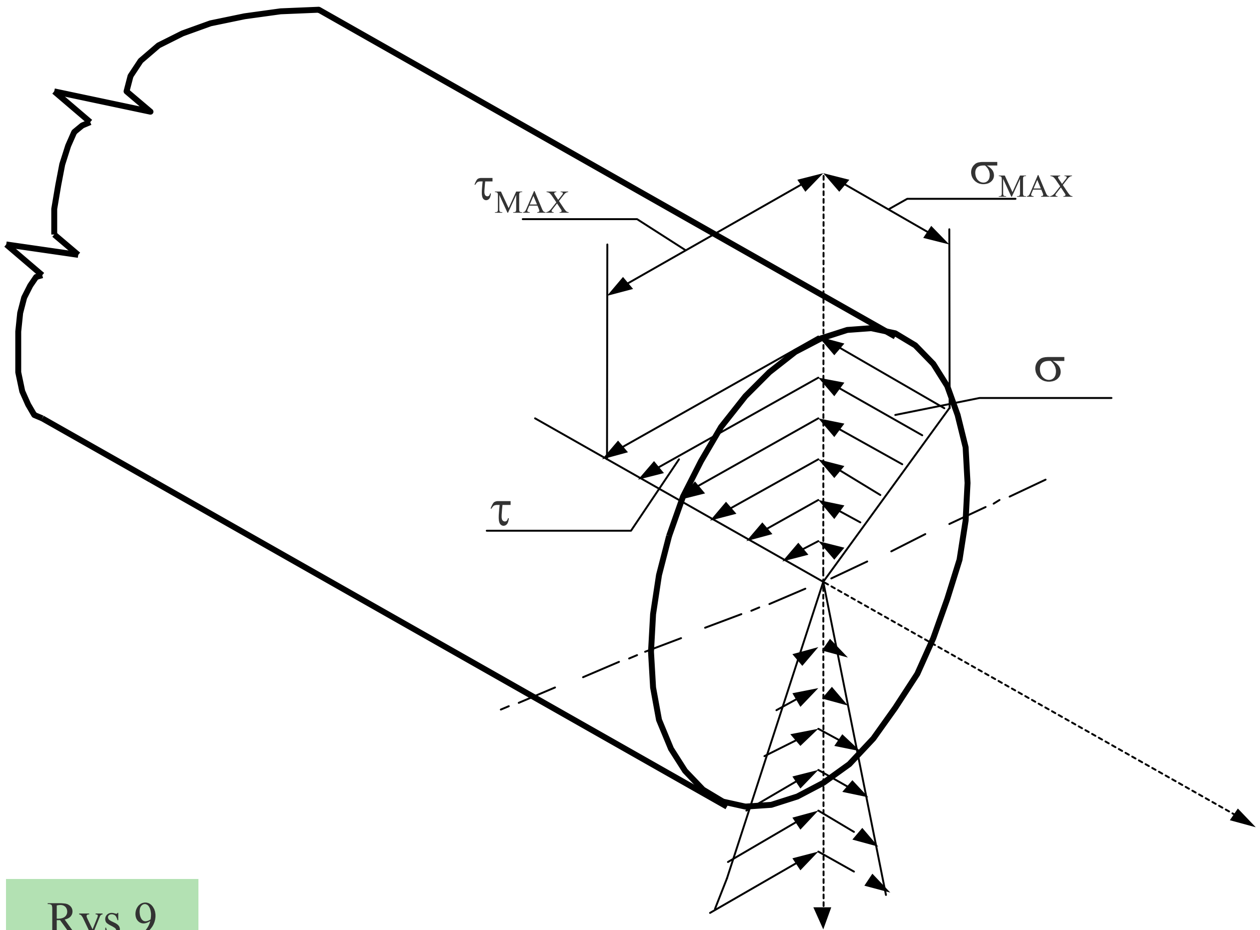


Rys.8

Bardzo częstym i typowym w technice budowy maszyn przypadkiem jest równoczesne **zginanie i skręcanie wału**. Jeżeli wał jest o przekroju kołowym, wówczas rozkład naprężeń w przekroju przedstawia się jak na rys.9.

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_o}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_g}{W}$$



Rys.9

Uważając, że dla materiałów ***sprężysto - plastycznych*** (stali) najstosowniejsza jest hipoteza energii odkształcenia postaciowego (hipoteza Hubera – Misesa), obliczamy:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} = \sqrt{\left(\left(\frac{M_g}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_s}{W_o}\right)^2\right)} \le \sigma_{dop}$$

Uwzględniając, że dla ***przekroju kołowego*** stosunek wskaźników wytrzymałości wynosi $\mathbf{W_o/W = 2}$, skąd $\mathbf{W_o = 2W}$

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4}M_s^2}}{W} \le \sigma_{dop}$$

$$M_{red} = \sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4}M_s^2} \qquad (11)$$

moment zredukowany lub ***zastępczy***

Dla materiałów ***sprężysto - plastycznych*** (stali) stosowana jest także hipoteza maksymalnych naprężeń stycznych:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \sqrt{\left(\left(\frac{M_g}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_s}{W_o}\right)^2\right)} \le \sigma_{dop}$$

Uwzględniając, że dla ***przekroju kołowego*** stosunek wskaźników wytrzymałości wynosi $\mathbf{W_o/W = 2}$, skąd $\mathbf{W_o = 2W}$

$$\boxed{\sigma_{red} = \frac{\sqrt{M_g^2 + \frac{4}{4}M_s^2}}{W} \le \sigma_{dop}}$$

$$\boxed{M_{red} = \sqrt{M_g^2 + M_s^2}} \qquad (11)$$

moment zredukowany lub ***zastępczy***

$$\frac{M_{red}}{W} \leq \sigma_{dop}$$

warunek wytrzymałości** dla **wału zginanego i skręcanego

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{red}}{\pi \sigma_{dop}}}$$

W przypadku gdy są określone: *moment gnący i skręcający* oraz *naprężenia dopuszczalne*, poszukuje się ***najmniejszej dopuszczalnej średnicy wału***

Wzór na moment obrotowy (skręcający) na wale

Momenty skręcające przekazywane na wał (za pomocą pasa czy kół zębatych) można obliczyć z jednego z podstawowych wzorów mechaniki, jeżeli znamy moc ***P*** przekazywaną na wał i prędkość obrotową wału ***n*** z wzoru.

$$M_S = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\frac{2\pi \cdot n}{60}} = 9554{,}14\frac{P}{n}$$

W ktorym :

P - moc w *kW*; ***n*** - prędkość obrotowa wału w *obr/min;*
$\boldsymbol{M_s}$ - moment skręcający w $N \cdot m$

$$N \cdot m = \frac{W}{s} = \frac{\frac{J}{s}}{s} = \frac{\frac{m^2 \cdot kg}{s^3}}{s} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot m = N \cdot m$$