Układy liniowosprężyste Clapeyrona

prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

Liniowosprężysty układ Clapeyrona

$\Downarrow$

zbiór połączonych ze sobą ciał odkształcalnych, w których przemieszczenia są liniowymi funkcjami sił

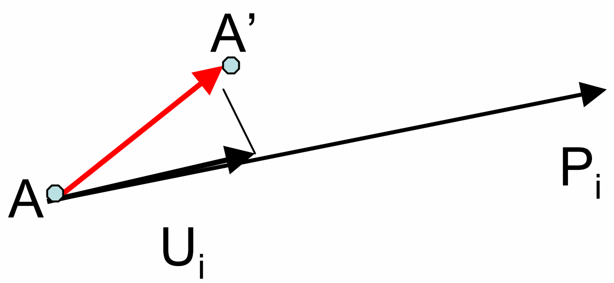
Układ rzeczywisty może być traktowany jako liniowosprężysty gdy:
- składa się z połączonych ze sobą ciał liniowosprężystych będących w równowadze,
- przemieszczenia nie wpływają na zmianę warunków równowagi,
- siły tarcia można pominąć.

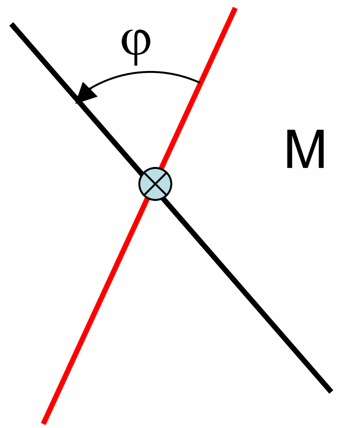
Siła uogólniona =

(a) **S**iła skupiona lub (b) moment skupiony,
(obciążenie rozłożone liniowo lub powierzchniowo)

Przemieszczenie uogólnione =

(a) przemieszczenie lub (b) kąt obrotu





Dowolne przemieszczenie uogólnione u_i (i=1,2,..,n) spowodowane jednoczesnym działaniem układu sił uogólnionych P_j (j=1,2,..,n) można przedstawić w postaci:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} P_j = f_{i1} P_1 + f_{i2} P_2 + \ldots + f_{ij} P_j + \ldots + f_{in} P_n$$

lub macierzowo:

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{P}}$$

$f_{ij} \equiv$ *liczby wpływowe*

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ P_n \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdot & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdot & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & f_{ij} & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdot & f_{nn} \end{bmatrix} \equiv \textit{macierz podatnosci}$$

Dowolną siłę uogólnioną P_i (i=1,2,..,n) można przedstawić jako liniową funkcję uogólnionych przemieszczeń u_j (j=1,2,..,n):

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} u_j = k_{i1} u_1 + k_{i2} u_2 + \ldots + k_{ij} u_j + \ldots + k_{in} u_n$$

lub macierzowo:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & . & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & . & k_{2n} \\ . & . & k_{ij} & . \\ k_{n1} & k_{n2} & . & k_{nn} \end{bmatrix} \equiv \textit{macierz sztywnosci}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}$$

Zasada superpozycji

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} P_j = f_{i1} P_1 + f_{i2} P_2 + \ldots + f_{ij} P_j + \ldots + f_{in} P_n$$

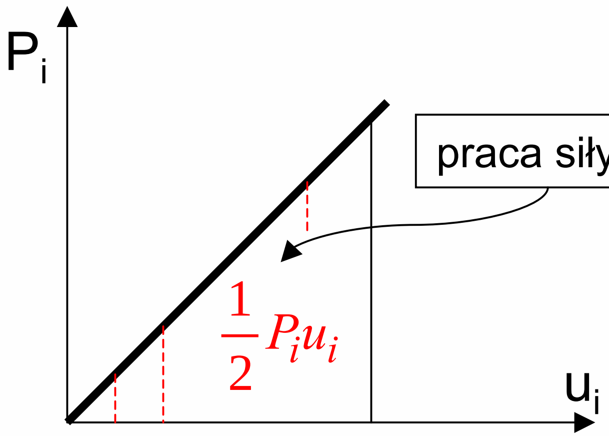
$$u_i^1 \qquad u_i^2 \qquad u_i^j \qquad u_i^n$$

$$\boxed{u_i = u_i^1 + u_i^2 + \ldots + \ldots u_i^j + \ldots + u_i^n}$$

Jeżeli zachodzą liniowe związki między skutkami i przyczynami, to skutek spowodowany jednoczesnym działaniem wszystkich przyczyn jest sumą skutków wywołanych pojedynczymi przyczynami

Energia sprężysta

Na układ liniowosprężysty działają siły uogólnione $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n$. Zwiększają się one w sposób quasi-statyczny od zera do pełnych swoich wartości. Obciążenia te wywołują odpowiadające im przemieszczenia $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_n$.



$$L = V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i u_i$$

Energia kinetyczna:

$$E = L + A$$

L= praca sił zewnętrznych P_i

A= praca sił wewnętrznych

Ponieważ E=0, więc

$$\boxed{L = -A \equiv V}$$

V= energia sprężysta, równa pracy sił wewnętrznych A wziętych ze znakiem (-)

$$L = V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i u_i$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} P_j \qquad P_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} u_j$$

$$\boxed{L = V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_i P_j f_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j k_{ij}}$$

Energia sprężysta układu liniowosprężystego jest jednorodną kwadratową funkcją sił lub przemieszczeń uogólnionych.
Ponieważ V nie jest liniową funkcją P_i oraz u_i, nie można do obliczania energii sprężystej stosować zasady superpozycji.

Twierdzenie o wzajemności prac Bettiego

Niech na układ liniowosprężysty działają w sposób quasi-statyczny dwie siły, w kolejności P_i i P_j oraz P_j i P_i.

$$L_{ij} = \frac{1}{2} P_i u_{ii} + \left(\frac{1}{2} P_j u_{jj} + P_i u_{ij} \right) \quad = \quad L_{ji} = \frac{1}{2} P_j u_{jj} + \left(\frac{1}{2} P_i u_{ii} + P_j u_{ji} \right)$$

$$\boxed{P_i u_{ij} = P_j u_{ji}}$$

Praca siły P_i na odpowiadającym jej przemieszczeniu u_{ij} wywołanym siłą P_j jest równa pracy siły P_j na odpowiadającym jej przemieszczeniu u_{ji} wywołanym siłą P_i.

Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń Maxwella

Załóżmy, że $P_i=P_j$. Wówczas z tw. Bettiego wynika, że

$$\boxed{u_{ij} = u_{ji}}$$

Przemieszczenie u_{ij} opowiadające sile P_i spowodowane siłą P_j jest równe przemieszczeniu u_{ji} odpowiadającemu sile P_j spowodowanemu siłą P_i jeśli $P_i=P_j$.

Jeśli $P_i=P_j=1$, to $u_{ij} = f_{ij}P_j = f_{ij}$ oraz $u_{ji} = f_{ji}P_i = f_{ji}$

stąd $$\boxed{f_{ij} = f_{ji} \;\; oraz \;\; k_{ij} = k_{ji}}$$

Macierze podatności **F** i sztywności **K** są symetryczne

Twierdzenie Castigliana

Na układ liniowosprężysty działają uogólnione siły $P_1, P_2, .., P_i,.., P_n$.
Siły te doznają przyrostów $dP_1, dP_2, .., dP_i,..,dP_n$.
Praca przyrostów sił dP_i na odpowiadających im przemieszczeniach u_i jest równa:

$$\boxed{dL = \sum_{i=1}^{n} dP_i u_i}$$

Różniczka energii sprężystej $V=V(P_1, P_2, .., P_i,.., P_n)$ jako funkcji wielu zmiennych wyraża się zależnością:

$$\boxed{dV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial P_i} dP_i}$$

$$dL = dV$$

$$\sum_{i=1}^{n} dP_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial P_i} dP_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(u_i - \frac{\partial V}{\partial P_i} \right) dP_i = 0$$

dla dowolnych przyrostów dP_i

Twierdzenie Castigliana:

$$u_i = \frac{\partial V}{\partial P_i}$$

Pochodna cząstkowa energii sprężystej względem siły uogólnionej jest równa przemieszczeniu uogólnionemu odpowiadającemu tej sile.

Energia sprężysta układu prętowego

Pręt rozciągany (ściskany):

Rozważamy pręt o długości dx, polu przekroju A, rozciągany (ściskany) siłą N. Siła N wykonuje pracę:

$$dV = \frac{1}{2} N du$$

E= moduł Younga

gdzie $$du = \frac{N dx}{EA}$$

Dla pręta o długości *l:*

$$dV = \frac{N^2 dx}{2EA}$$

$$V = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx = \frac{N^2 l}{2EA}$$

Skręcanie:

Rozważamy pręt o długości dx, przekroju kołowym o biegunowym momencie bezwładności I_S skręcany momentem skręcającym M_S. Moment skręcający wykonuje pracę:

$$\boxed{dV = \frac{1}{2} M_S d\varphi}$$

G= moduł Kirchhoffa

gdzie

$$\boxed{d\varphi = \frac{M_S dx}{G I_S}}$$

Dla pręta o długości *l:*

$$\boxed{dV = \frac{M_S^2 dx}{2 G I_S}}$$

$$\boxed{V = \int_0^l \frac{M_S^2}{G I_S} dx = \frac{M_S^2 l}{2 G I_S}}$$

Zginanie:

Rozważmy pręt (belkę) o długości dx zginany momentem gnącym M_g.
Moment gnący wykonuje pracę na kącie ugięcia $d\vartheta$

$$dV = \frac{1}{2} M_g d\vartheta$$

E= moduł Younga
I = moment bezwładności przekroju

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{\rho} = -\frac{M_g}{EI} \quad skąd \quad d\vartheta = -\frac{M_g dx}{EI}$$

Dla pręta o długości l:

$$dV = \frac{M_g^2 dx}{2EI}$$

$$V = \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EI} = \frac{M_g^2 l}{2EI}$$

Ścinanie:

Rozważany jest pręt o długości dx ścinany siłą poprzeczną T.
Siła T wykonuje pracę na ugięciu środka ciężkości przekroju dv_T:

$$dV = \frac{1}{2} T dv_T$$

Ugięcie dv_T oblicza się porównując energię sprężystą w elemencie zastępczym (przekrój płaski) z energią w rzeczywistym elemencie pręta (przekrój wypaczony):

$$\frac{1}{2} T dv_T = \int_A \frac{\tau^2}{2G} dx dA$$

gdzie

$$\tau = \frac{T S_z}{I b}$$

wzór Żurawskiego

Ścinanie cd:

$$\frac{1}{2}T dv_T = dx \int_A \frac{T^2 S_z^2}{I^2 b^2 2G} dA \Rightarrow dv_T = \left[\frac{A}{I^2} \int_A \frac{S_z^2}{b^2} dA \right] \frac{T dx}{GA}$$

$$dv_T = \frac{\beta T dx}{GA}$$

β = bezwymiarowy współczynnik zależny od kształtu przekroju

gdzie

$$\beta = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S_z^2}{b^2} dA$$

$$dV = \frac{1}{2} T dv_T = \frac{\beta T^2 dx}{2GA}$$

Dla pręta o długości l:

$$V = \int_0^l \frac{\beta T^2 dx}{2GA} = \frac{\beta T^2 l}{2GA}$$

Podsumowanie

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{(Sila\ wewnętrzna)^2}{(Sztywnosc)}$$

Rozciąganie: $$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}$$

Skręcanie: $$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{M_s^2}{GI_s}$$

Zginanie: $$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{M_g^2}{EI}$$

Ścinanie: $$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{\beta T^2}{GA}$$