Metody energetyczne

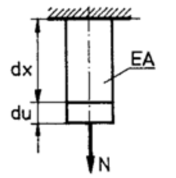
Metoda Maxwella – Mohra

Układy statycznie niewyznaczalne

Metoda sił

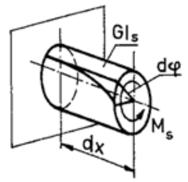
Zasada minimum energii

Energia sprężysta układu prętowego



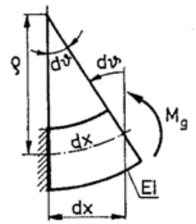
Rozciąganie lub ściskanie pręta

$$dV = \frac{1}{2} N du = \frac{N^2 dx}{2EA}$$



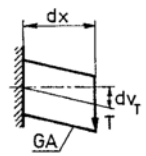
Skręcanie pręta

$$dV = \frac{1}{2} M_s d\varphi = \frac{M_S^2 dx}{2GI_S}$$



Zginanie proste belki

$$dV = \frac{1}{2} M_g d\vartheta = \frac{M_g^2 dx}{2EI}$$



Ścinanie pręta (model uproszczony)

$$dV = \frac{1}{2} T dv_T = \frac{\beta T^2 dx}{2GA}$$

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{\left(Sila\ wewnętrzna\right)^2}{\left(Sztywnosc\right)}$$

Rozciąganie: $$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}$$

Skręcanie: $$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{M_s^2}{GI_s}$$

Zginanie: $$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{M_g^2}{EI}$$

Ścinanie: $$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}\frac{\beta T^2}{GA}$$

$$V = \int_0^l \frac{(Sila\ wewnętrzna)^2\,dx}{2(Sztywnosc)}$$

Rozciąganie: $$V = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA}$$

Skręcanie: $$V = \int_0^l \frac{M_s^2 dx}{2GI_s}$$

Zginanie: $$V = \int_0^l \frac{M_g^2 dx}{2EI}$$

Ścinanie: $$V = \int_0^l \frac{\beta T^2 dx}{2GA}$$

Jeśli siła wewnętrzna oraz sztywność nie zależą od x

$$\boxed{V = \frac{\left(Sila\ wewnętrzna\right)^2 dlugosc}{2\left(Sztywnosc\right)}}$$

Jeśli N oraz EA nie zależą od x

Rozciąganie: $$\boxed{V = \frac{N^2 l}{2EA}}$$

Jeśli M_s oraz GI_s nie zależą od x

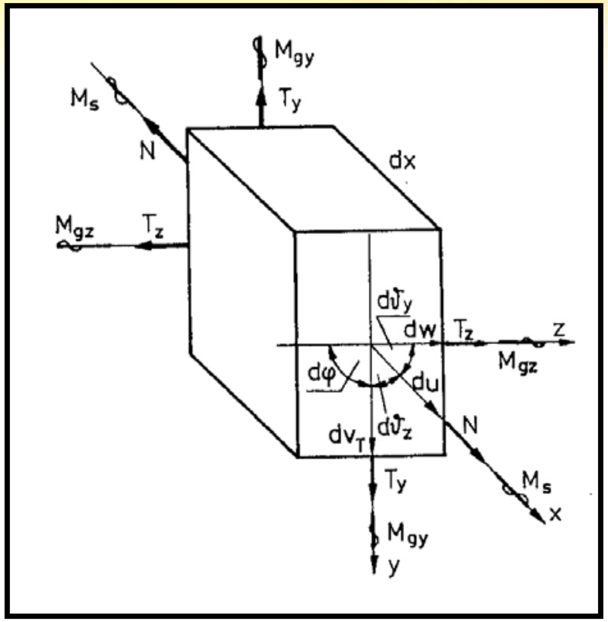
Skręcanie: $$\boxed{V = \frac{M_s^2 l}{2GI_s}}$$

Jeśli M_g oraz EI nie zależą od x

Zginanie: $$\boxed{V = \frac{M_g^2 l}{2EI}}$$

Jeśli T oraz GA nie zależą od x

Ścinanie: $$\boxed{V = \frac{\beta T^2 l}{2GA}}$$



W przypadku ogólnym energia sprężysta odkształcenia odcinka pręta o długości *dx* będzie równa sumie prac składowych sił wewnętrznych N, M_s, M_{gy}, M_{gz}, T_y, T_z *na odpowiadających im przemieszczeniach* du, $d\varphi$, $d\theta_y$, $d\theta_z$, $d\upsilon_T$, dw_T.

Jeśli odcinek pręta o długości *dx* uznać za odrębny układ, to N, M_s, M_{gy}, M_{gz}, T_y, T_z należy traktować jako siły zewnętrzne

$$dV = \frac{1}{2}\left(Ndu + M_s d\varphi + M_{gy} d\vartheta_y + M_{gz} d\vartheta_z + T_y d\upsilon_T + T_z dw_T\right)$$

Po uwzględnieniu, że przemieszczenia są następującymi funkcjami składowych sił wewnętrznych

$$du = \frac{N dx}{EA} \qquad d\varphi = \frac{M_s dx}{GI_s} \qquad d\vartheta_y = \frac{M_{gy} dx}{EI_y}$$

$$d\vartheta_z = \frac{M_{gz} dx}{EI_z} \qquad d\upsilon_T = \frac{\beta_y T_y dx}{GA} \qquad dw_T = \frac{\beta_z T_z dx}{GA}$$

Otrzymamy zależność

$$dV = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_s^2}{GI_s} + \frac{M_{gy}^2}{EI_y} + \frac{M_{gz}^2}{EI_z} + \frac{\beta_y T_y^2}{GA} + \frac{\beta_z T_z^2}{GA} \right) dx$$

Energia sprężysta w pręcie prostym w przypadku ogólnym

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_s^2}{GI_s} + \frac{M_{gy}^2}{EI_y} + \frac{M_{gz}^2}{EI_z} + \frac{\beta_y T_y^2}{GA} + \frac{\beta_z T_z^2}{GA} \right) dx$$

Metody energetyczne wyznaczania przemieszczeń

- Castigliana
- Maxwella-Mohra

Metoda Maxwella-Mohra

W celu określenia dowolnego uogólnionego przemieszczenia u w prętowym układzie liniowosprężystym metodą Maxwell-Mohra wykonamy następujące operacje:

• Wyznaczymy siły $N, M_s, M_{gy}, M_{gz}, T_y, T_z$ w prętach układu, wywołane obciążeniem rzeczywistym

• Obciążamy układ siłą jednostkową $\bar{1}$ odpowiadającą poszukiwanemu przemieszczeniu u i wyznaczamy $N', M_s', M'_{gy}, M'_{gz}, T'_y, T'_z$, które wywołuje ona w prętach

W miejsce jednostkowej siły $\overline{1}$ wprowadźmy siłę uogólnioną o wartości P (P=0), która wywoła dodatkowo siły wewnętrzne:

$$PN', PM_s^{'}, PM_{gy}^{'}, PM_{gz}^{'}, PT_y^{'}, PT_z^{'}$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{(N+PN^{'})^2}{EA} + \frac{(M_s + PM_s^{'})^2}{GI_s} + \frac{(M_{gy} + PM_{gy}^{'})^2}{EI_y} + \frac{(M_{gz} + PM_{gz}^{'})^2}{EI_z} + \frac{\beta_y (T_y + PT_y^{'})^2}{GA} + \frac{\beta_z (T_z + PT_y^{'})^2}{GA} \right) dx$$

$$u = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{P=0}$$

Metoda Maxwella-Mohra

$$u = \int_0^l \left(\frac{NN'}{EA} + \frac{M_s M_s'}{GI_s} + \frac{M_{gy} M_{gy}'}{EI_y} + \frac{M_{gz} M_{gz}'}{EI_z} + \frac{\beta_y T_y T_y'}{GA} + \frac{\beta_z T_z T_z'}{GA} \right) dx$$

W celu określenia przemieszczenia u metodą Maxwella-Mohra dla dowolnego liniowosprężystego układu prętowego należy dokonać sumowania całek, obliczonych dla poszczególnych przedziałów (prętów).

Statycznie niewyznaczalne układy prętowe

Układ prętowy jest *statycznie niewyznaczalny*, jeśli nie można określić reakcji w podporach czy sił wewnętrznych w przekrojach prętów, posługując się wyłącznie równaniami równowagi.

Liczba sił statycznie niewyznaczalnych, czyli *hiperstatycznych*, równa różnicy między liczbą wszystkich sił niewiadomych, a liczbą równań równowagi, określa stopień statycznej niewyznaczalności układu prętowego.

Statycznie niewyznaczalne układy prętowe

Rozwiązanie każdego zadania statycznie niewyznaczalnego oprócz wykorzystania warunków równowagi wymaga uwzględnienia geometrycznych i fizycznych aspektów odkształcalności ciała.

Formułuje się w tym celu trzy grupy zależności:

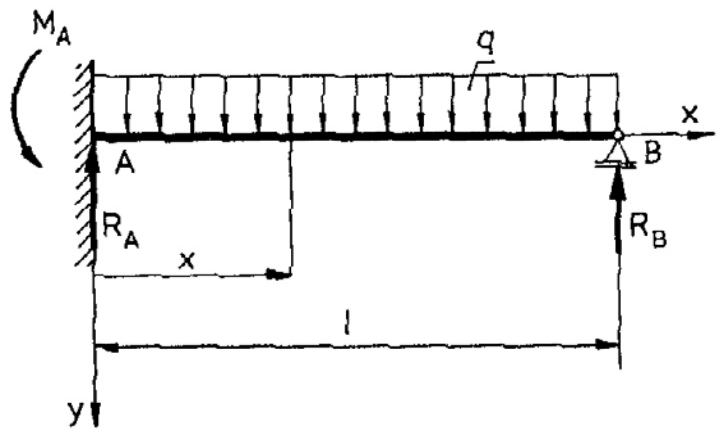
A. Równania równowagi,

B. Warunki geometryczne

C. Związki fizyczne

Wyróżnić można dwie podstawowe metody rozwiązywania zadań statycznie niewyznaczalnych:

- metodę sił
- metodę przemieszczeń



Równania równowagi

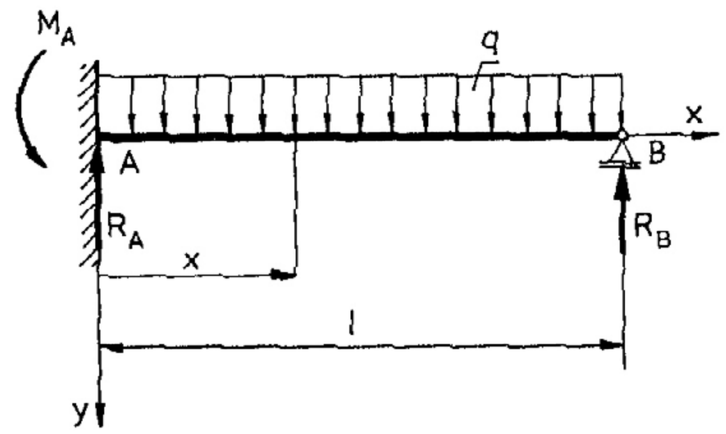
$$ql - R_A - R_B = 0$$

$$-M_A + R_A l - \frac{1}{2} q l^2 = 0$$

Równania: 2

Niewiadome: 3

Zadanie jednokrotnie (3-2) statycznie niewyznaczalne

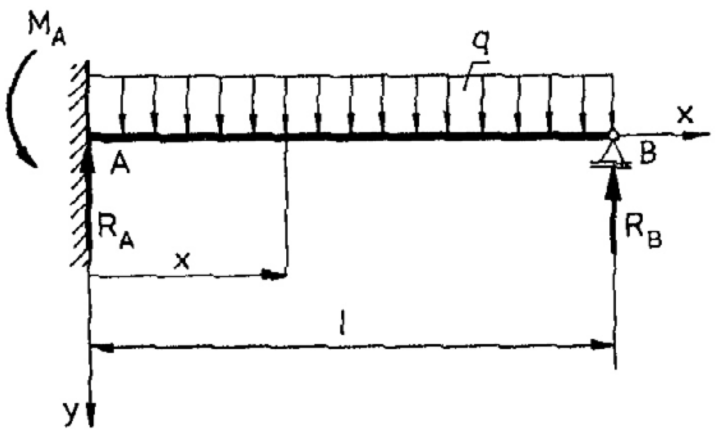


Warunki geometryczne

Reakcja R_B (traktowana jako wielkość hiperstatyczna) jest spowodowana podparciem belki w punkcie B, co odpowiada następującemu warunkowi geometrycznemu

$$\upsilon_B = 0$$

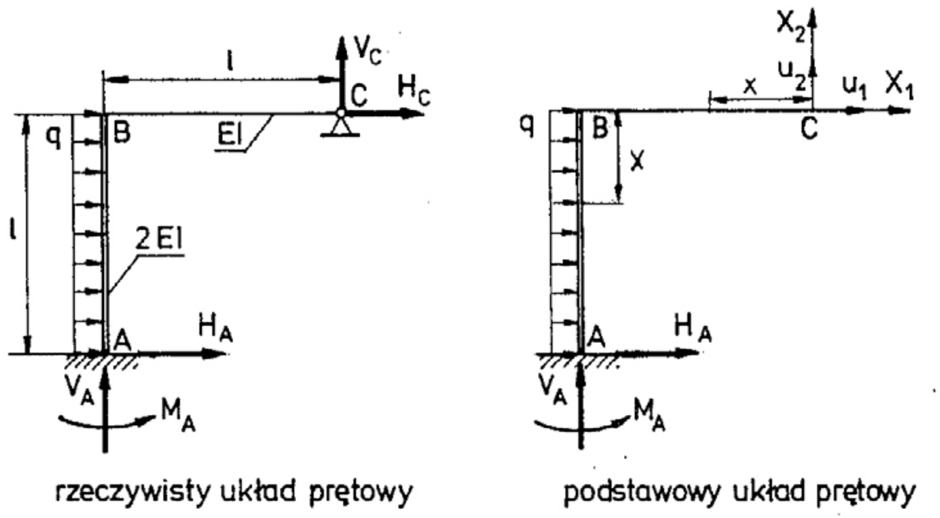
Związki fizyczne



Związek fizyczny powinien uzależniać υ_B od sił działających na belkę oraz jej własności sprężystych.

Okazuje się, że warunek geometryczny υ_B=0 jest po prostu dodatkowym warunkiem brzegowym.

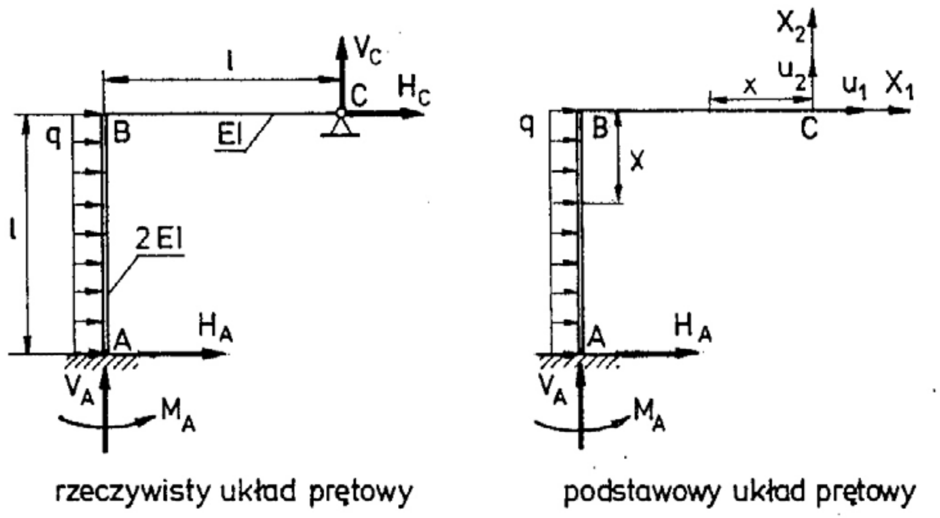
Metoda sił



Algorytm postępowania

1. Określić rodzaj i liczbę wielkości podporowych i sformułować równania równowagi

Metoda sił



- Punkt C – podpora przegubowa stała – dwie reakcje (pozioma i pionowa)
- Punkt A – utwierdzenie – trzy reakcje (pozioma, pionowa i moment)

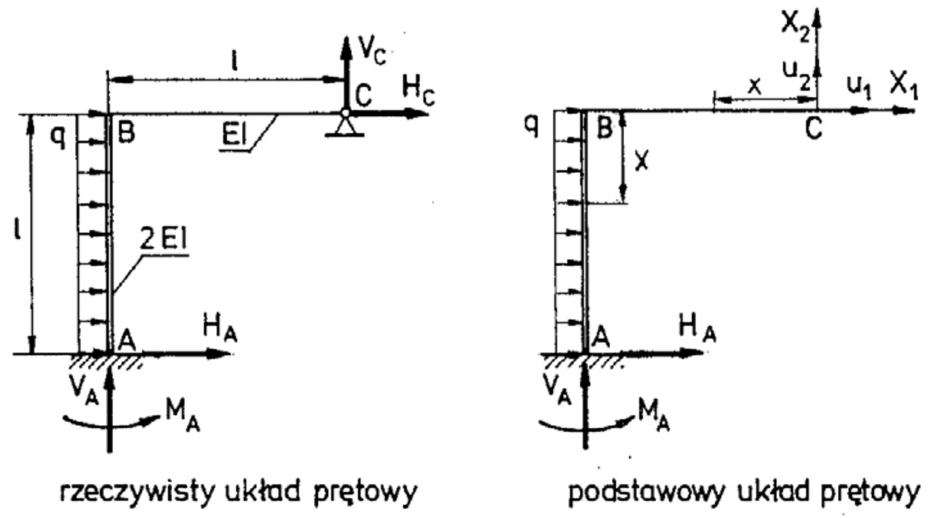
równania równowagi

$$H_A + H_C + ql = 0$$

$$V_A + V_C = 0$$

$$V_C l - H_C l - \frac{1}{2} q l^2 + M_A = 0$$

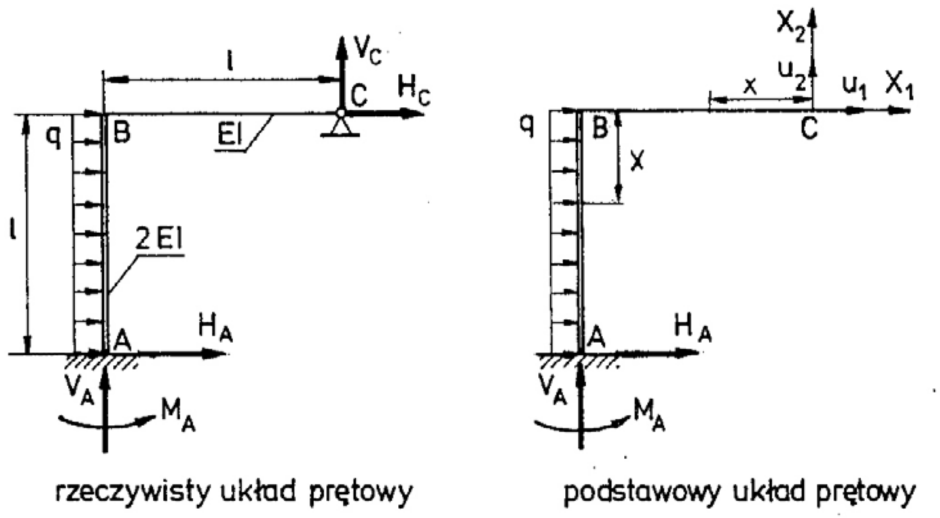
Metoda sił



Algorytm postępowania

2. Obliczyć stopień statycznej niewyznaczalności i utworzyć podstawowy układ prętowy

Metoda sił



- Liczba niewiadomych 5 (reakcje)

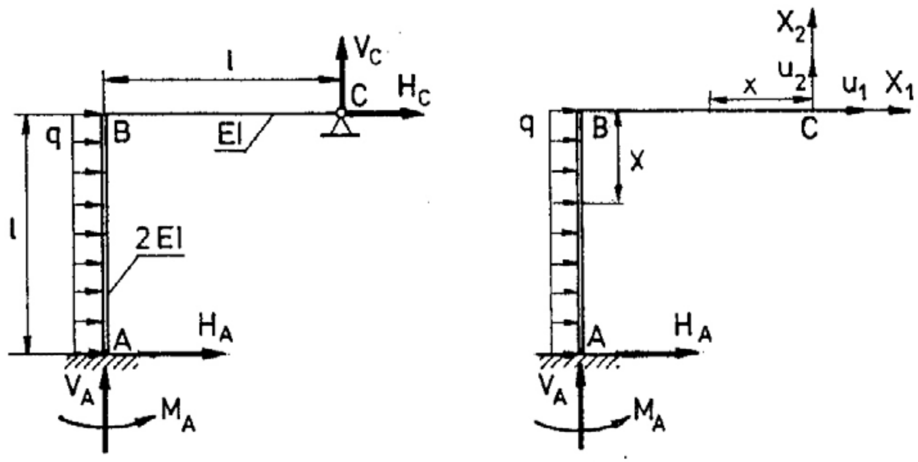
- Liczba równań 3

5 – 3 = 2 - rama jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna

Wielkości hiperstatyczne:

$X_1 = H_c$ $\qquad$ $X_2 = V_c$

Metoda sił

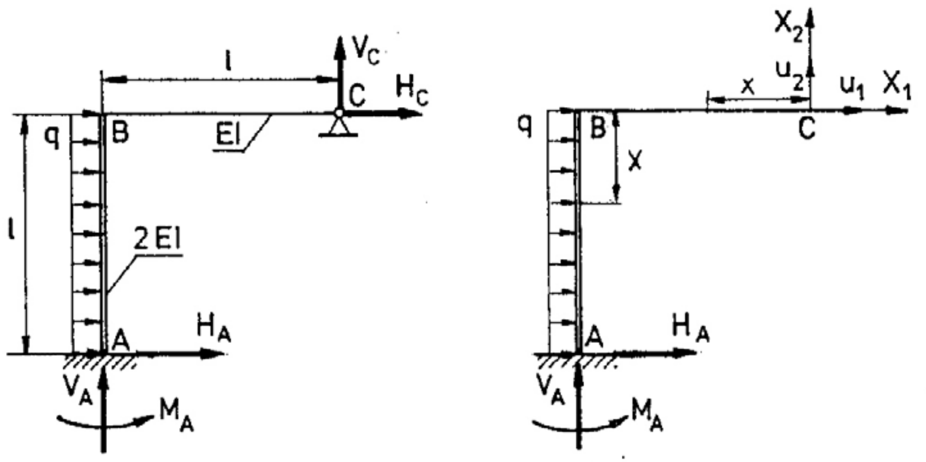


rzeczywisty układ prętowy podstawowy układ prętowy

Algorytm postępowania

3. Określić warunki geometryczne oraz związki fizyczne i sformułować na ich podstawie równania kanoniczne metody sił

Metoda sił



rzeczywisty układ prętowy

podstawowy układ prętowy

Δ_{1P}, Δ_{2P} - część przemieszczeń u_1 i u_2 spowodowana działaniem obciążenia q.

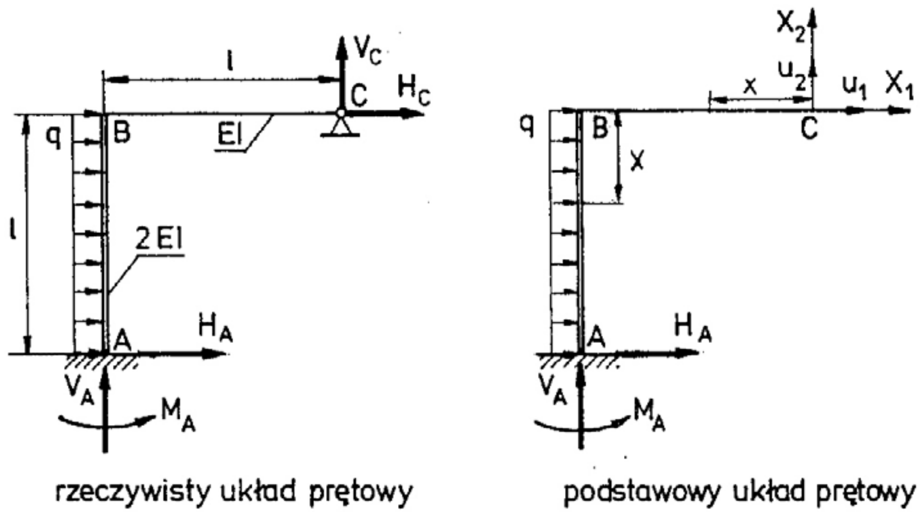
$u_1 = 0,\ u_2 = 0$

Związki fizyczne

$$u_1 = f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + \Delta_{1P}$$
$$u_2 = f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + \Delta_{2P}$$

$$f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$
$$f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

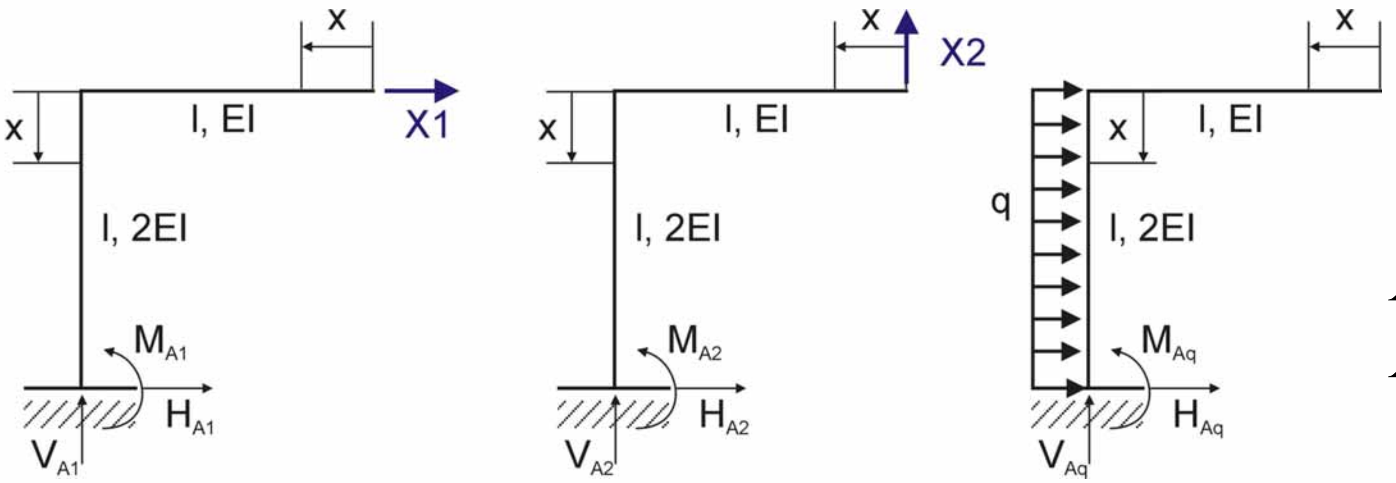
Metoda sił



Algorytm postępowania

4. Obliczyć współczynniki równań kanonicznych metody sił

Metoda sił



$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 1$$

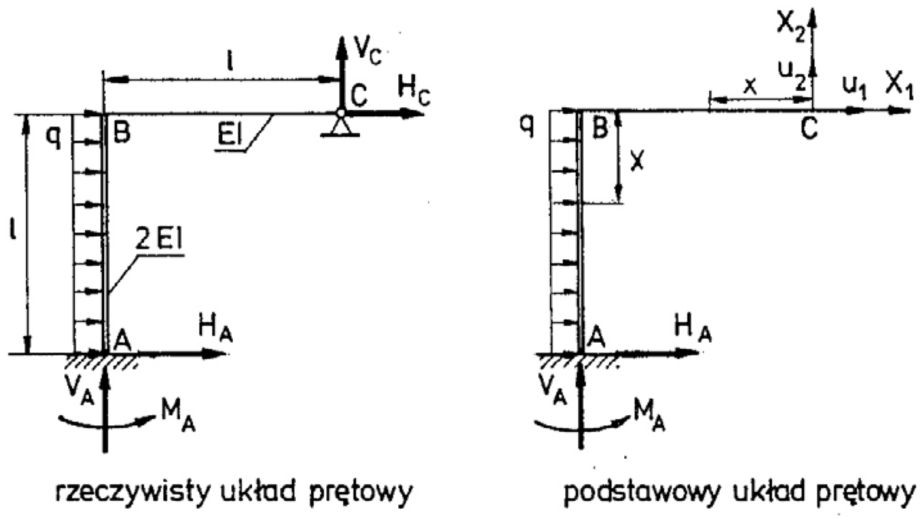
M_{g11}, M_{g21} M_{g12}, M_{g22} M_{g1P}, M_{g2P}

Algorytm postępowania

$$f_{12} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_{g12} M_{g11} dx + \frac{1}{2EI}\int_0^l M_{g22} M_{g21} dx = f_{21} \qquad f_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_{g11}^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^l M_{g21}^2 dx \qquad f_{22} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_{g12}^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^l M_{g22}^2 dx$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_{g1P} M_{g11} dx + \frac{1}{2EI}\int_0^l M_{g2P} M_{g21} dx \qquad \Delta_{2P} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_{g1P} M_{g12} dx + \frac{1}{2EI}\int_0^l M_{g2P} M_{g22} dx$$

Metoda sił

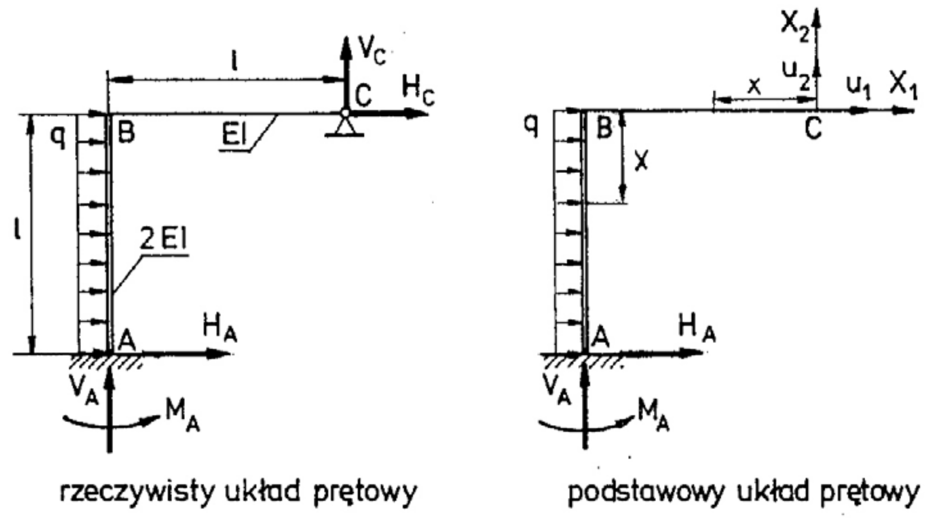


Algorytm postępowania

5. Wyznaczyć z równań kanonicznych metody sił wielkości hiperstatyczne

$$X_1 \qquad X_2$$

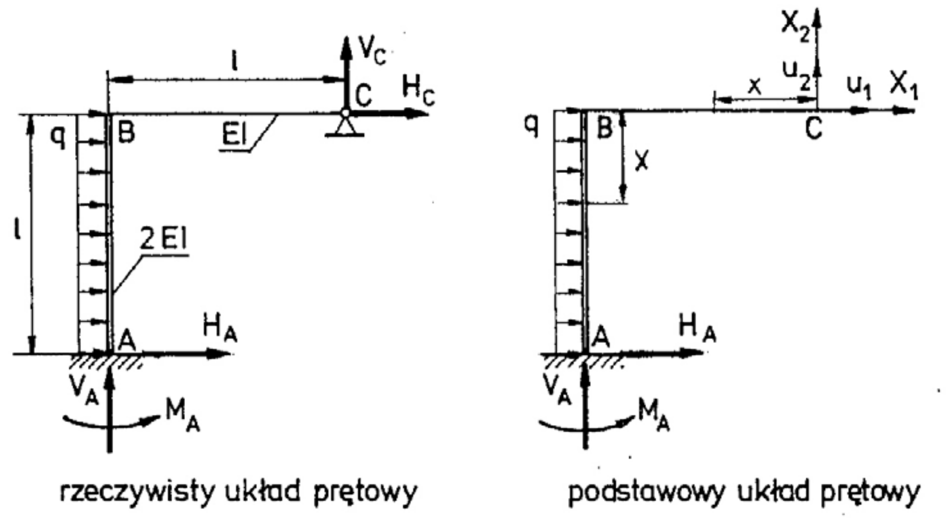
Metoda sił



Algorytm postępowania

6. Wykorzystując równania równowagi, znaleźć pozostałe niewiadome

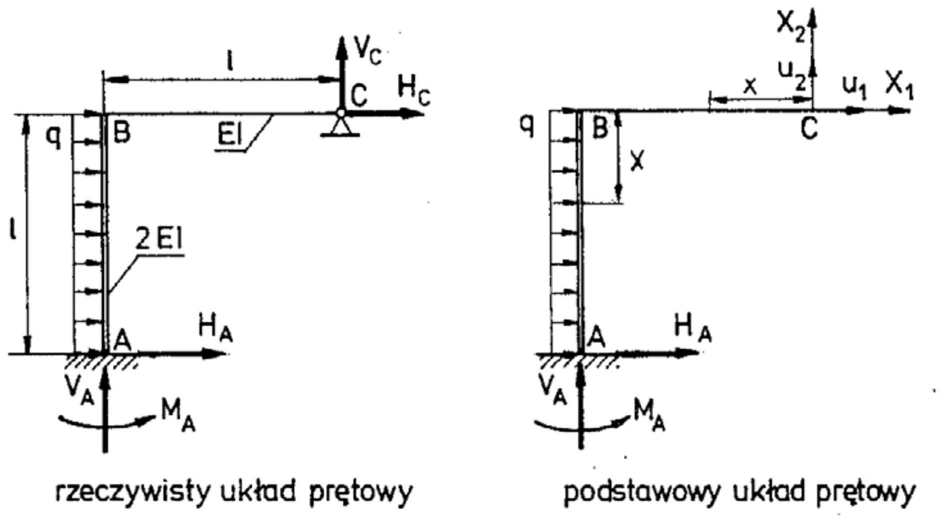
Metoda sił



Algorytm postępowania

7. Sformułować równania i narysować wykresy sił wewnętrznych

Metoda sił



Algorytm postępowania

8. Wyznaczyć poszukiwane przemieszczenia

Zasada minimum energii sprężystej Menabrei-Castigliana

Energia sprężysta układu statycznie niewyznaczalnego *V* jest wyrażona przez znane siły zewnętrzne (obciążenia) i niewiadome wielkości hiperstatyczne X_1, ..., X_n oraz niehiperstatyczne.

Jeżeli wykorzystując równania równowagi, uzależni się niewiadome niehiperstayczne od wielkości hiperstatycznych oraz obciążeń, energia *V* stanie się funkcją X_1, ..., X_n, jako zmiennych niezależnych.

Warunki geometryczne, jakie muszą spełniać przemieszczenia u_1, ..., u_n, odpowiadające wielkościom hiperstatycznym X_1, ...,X_n, można zapisać nastepująco

$$u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$$

Zasada minimum energii sprężystej Menabrei-Castigliana

Stosując metodę Castigliana, można określić przemieszczenia z wykorzystaniem do tego celu energii sprężystej $V(X_1, ..., X_n)$

$$u_1 = \frac{\partial V}{\partial X_1}, \quad ... \quad , \quad u_n = \frac{\partial V}{\partial X_n}$$

związki fizyczne

Po podstawieniu do związków geometrycznych:

$$\frac{\partial V}{\partial X_1} = 0, \quad ... \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial X_n} = 0$$

Zasada minimum energii sprężystej Menabrei-Castigliana

Spośród wszystkich możliwych zbiorów wielkości X_1, ..., X_n zbiorem rzeczywistych wielkości hiperstatycznych jest ten, dla którego energia sprężysta całego układu prętowego *V* osiąga wartość minimalną.