

STAN

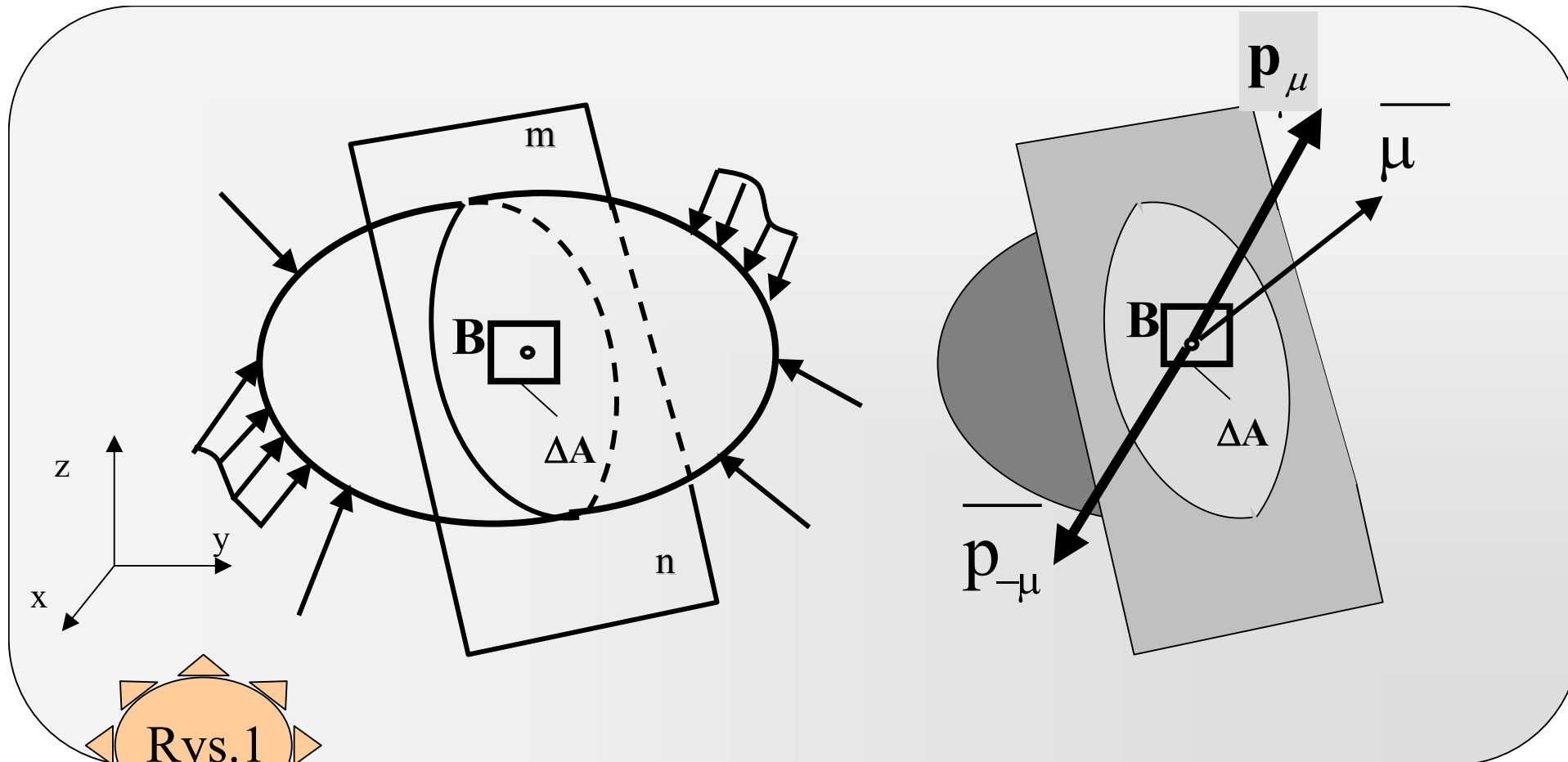
NAPREŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

Definicja stanu naprężenia

Ciało odkształcone ma nieskończenie wiele stopni swobody. Aby bowiem określić położenie ciała odkształcalnego, trzeba znać położenie wszystkich jego punktów, których wzajemne odległości mogą ulec zmianie. Ciało odkształcalne pozostaje w spoczynku, jeśli każda dowolna wyodrębniona z niego część jest w równowadze.

Przykład

Rozważymy najbliższe małe otoczenie punktu **B** ciała odkształcalnego w stanie spoczynku, ograniczone dowolną powierzchnią zamkniętą (rys.1)

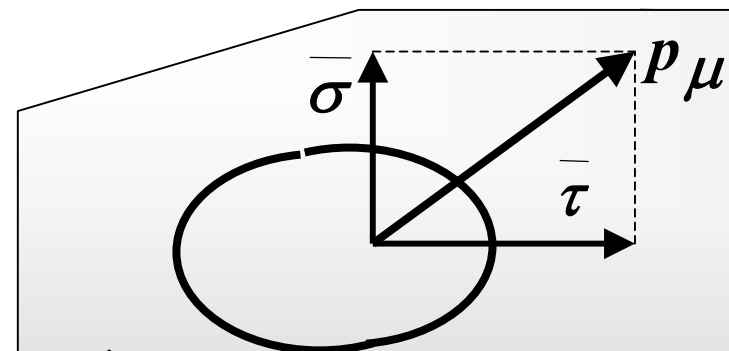


Rys.1

$$\bar{p}_\mu = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\bar{P}_\mu}{\Delta A}$$

(1)

- $\bar{\mu}$ - podaje kierunek i zwrot zewnętrznej osi normalnej;
- \bar{p}_μ - wektor naprężenia całkowitego;
- ΔA - element powierzchni przekroju w otoczeniu punktu



$$\bar{p}_\mu = \bar{\sigma} + \bar{\tau}$$

$$p_\mu = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (2)$$

Rys.1.b

σ - wektor naprężenia normalnego;
 τ - wektor naprężenia stycznego

Zbiór **wektorów naprężeń całkowitych** $\bar{\mathbf{p}}_{\mu}$ działających we wszystkich tych płaszczyznach (albo co na jedno wychodzi, przyporządkowanych wszystkim kierunkom $\bar{\boldsymbol{\mu}}$) tworzy **stan naprężenia w punkcie \mathbf{B}** ciała.

Zauważmy, że płaszczyzna przechodząca przez punkt \mathbf{B} i prostopadła do kierunku $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ dzieli ciało na części „l” i „p”

Wektor $\bar{\mathbf{p}}_{\mu}$ jest miarą lokalnego oddziaływania mechanicznego części „p” na „l”, a wektor $\bar{\mathbf{p}}_{-\mu} = -\bar{\mathbf{p}}_{\mu}$ części „l” na „p” ciała w punkcie \mathbf{B} rozważanego przekroju.

TENSOROWE POLE

STANU NAPRĘŻEŃ

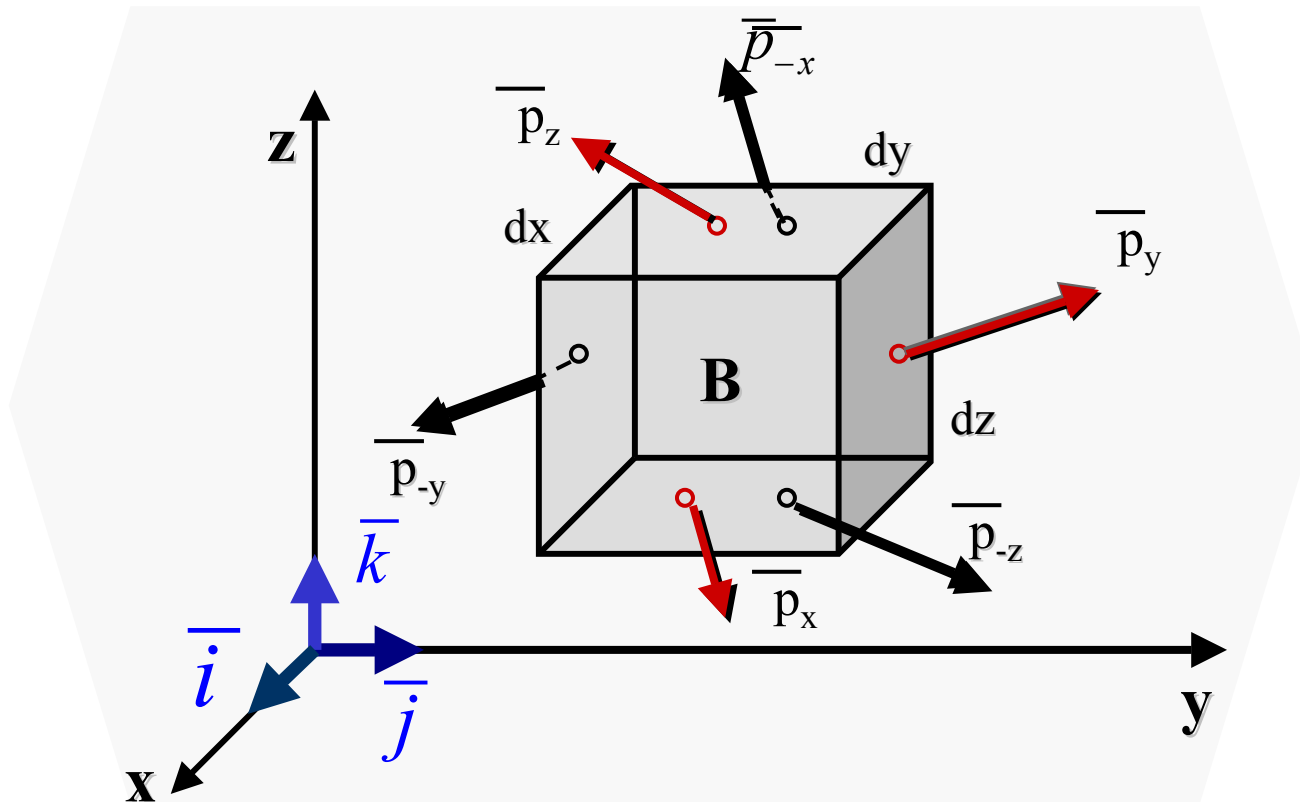
Aby określić stan naprężenia w punkcie ciała, należy podać sposób jednoznaczego przyporządkowania jednoznaczemu kierunkowi μ odpowiadającego mu wektora naprężenia całkowitego \bar{p}_μ (który działa na płaszczyźnie prostopadłej do $\bar{\mu}$).
Zajmiemy się teraz znalezieniem takiego sposobu przyporządkowania.

Niechaj obszar wewnętrzny w otoczeniu punktu **B** będzie elementarnym prostopadłościanem w prostokątnym układzie osi współrzędnych, xyz o wersorach $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (rys.2).

Na ścianach widocznych działają **wektory naprężenia całkowitego** $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ przyporządkowane **dodatnim zwrotom** osi xyz na ścianach niewidocznych

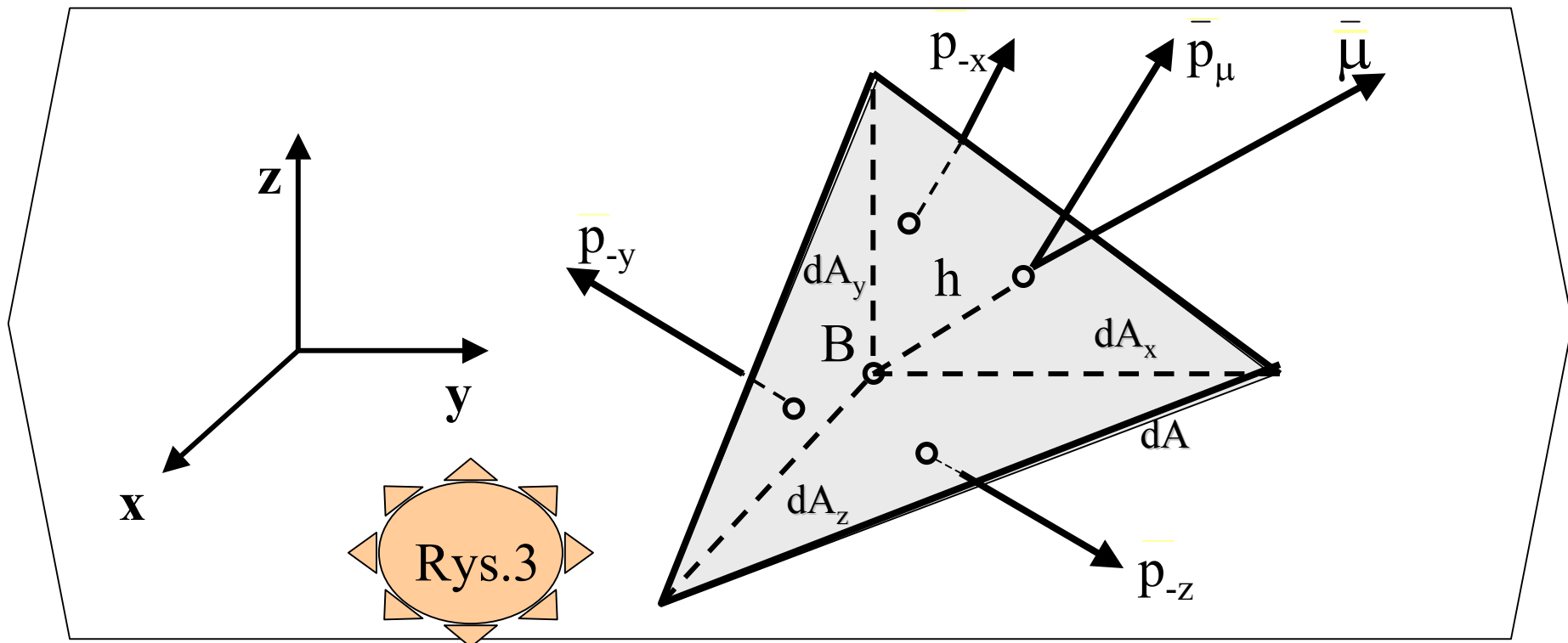
$$\bar{p}_{-x} = -\bar{p}_x, \bar{p}_{-y} = -\bar{p}_y, \bar{p}_{-z} = -\bar{p}_z$$

przyporządkowane ujemnym zwrotom osi xyz .



Rys.2

Przeprowadzimy w nieskończenie małej odległości h od punktu B dowolnie zorientowaną płaszczyznę. Powstanie elementarny czworościan (rys.3) Orientacja płaszczyzny określona jest zewnętrzną normalną o wersorze $\bar{\mu}$. Na płaszczyźnie działa **wektor naprężenia całkowitego** \bar{p}_μ przyporządkowany kierunkowi $\bar{\mu}$



Rys.3

Czworościan utrzymywany jest w równowadze przez **siły powierzchniowe** określone naprężeniami \bar{p}_{-x} , \bar{p}_{-y} , \bar{p}_{-z} i \bar{p}_μ .

Ponieważ wymiary czworościanu są nieskończenie małe, można przyjąć, iż działa na niego zbieżny przestrzenny układ sił, a więc **warunek równowagi** będzie miał następującą postać:

$$\bar{p}_\mu dA + \bar{p}_{-x} dA_x + \bar{p}_{-y} dA_y + \bar{p}_{-z} dA_z = 0 \quad (3)$$

gdzie dA , dA_x , dA_y , dA_z **poła powierzchni ścian**, dla których normalne zewnętrzne stanowią odpowiednio μ i ujemne zwroty osi xyz . Związek powyższy można przedstawić w postaci:

$$\bar{p}_\mu dA - \bar{p}_x dA_x - \bar{p}_y dA_y - \bar{p}_z dA_z = 0 \quad (4)$$

$$dA_x = dA \alpha_{x\mu}, \quad dA_y = dA \alpha_{y\mu}, \quad dA_z = dA \alpha_{z\mu} \quad (5)$$

$$\alpha_{x\mu} = \cos \square (x, \mu), \quad \alpha_{y\mu} = \cos \square (y, \mu), \quad \alpha_{z\mu} = \cos \square (z, \mu) \quad (6)$$

Wstawiając (5) do (4) otrzymujemy wzór Cauchy'ego:

$$\bar{\mathbf{p}}_{\mu} = \bar{\mathbf{p}}_x \alpha_{x\mu} + \bar{\mathbf{p}}_y \alpha_{y\mu} + \bar{\mathbf{p}}_z \alpha_{z\mu} \quad (7)$$

Wektor naprężenia $\bar{\mathbf{p}}_{\mu}$ można także przedstawić w postaci:

$$\bar{\mathbf{p}}_{\mu} = p_{\mu x} \bar{i} + p_{\mu y} \bar{j} + p_{\mu z} \bar{k} \quad (8)$$

a wektory naprężeń $\bar{\mathbf{p}}_x$, $\bar{\mathbf{p}}_y$ i $\bar{\mathbf{p}}_z$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_x &= \sigma_x \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k} \\ \bar{\mathbf{p}}_y &= \tau_{yx} \bar{i} + \sigma_y \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k} \\ \bar{\mathbf{p}}_z &= \tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + \sigma_z \bar{k} \end{aligned}$$

gdzie składowe stanu naprężenia:

$$(9) \quad [\mathbf{T}_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

Wstawiając (8) i (9) do wzoru Cauchy'ego (7) i porównując czynniki występujące przy jednakowych wersorach i, j, k otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{\mu x} &= \sigma_x \alpha_{x\mu} + \tau_{yx} \alpha_{y\mu} + \tau_{zx} \alpha_{z\mu} \\
 \mathbf{p}_{\mu y} &= \tau_{xy} \alpha_{x\mu} + \sigma_y \alpha_{y\mu} + \tau_{zy} \alpha_{z\mu} \\
 \mathbf{p}_{\mu z} &= \tau_{xz} \alpha_{x\mu} + \tau_{yz} \alpha_{y\mu} + \sigma_z \alpha_{z\mu}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{\mu x} \\ \mathbf{p}_{\mu y} \\ \mathbf{p}_{\mu z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{x\mu} \\ \alpha_{y\mu} \\ \alpha_{z\mu} \end{Bmatrix}
 \tag{12}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{\mu x} \\ \mathbf{p}_{\mu y} \\ \mathbf{p}_{\mu z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{x\mu} \\ \alpha_{y\mu} \\ \alpha_{z\mu} \end{Bmatrix}$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{p}}_{\mu} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{\mu x} \\ \mathbf{p}_{\mu y} \\ \mathbf{p}_{\mu z} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}^o = \begin{Bmatrix} \alpha_{x\mu} \\ \alpha_{y\mu} \\ \alpha_{z\mu} \end{Bmatrix}$$

$$\text{lub } \bar{\mathbf{p}}_{\mu} = [\mathbf{T}'_{\sigma}] \bar{\boldsymbol{\mu}}^o \quad (13)$$

$$[\mathbf{T}'_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_{\sigma}]^T$$

(14)

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

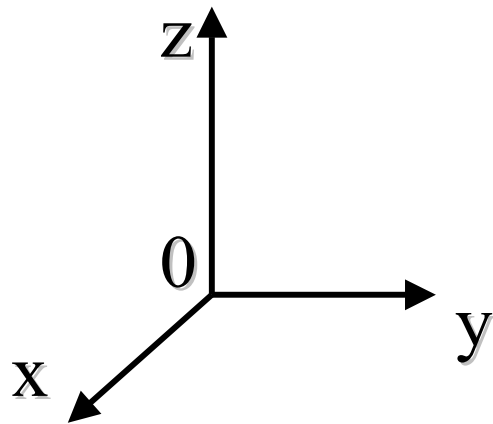
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

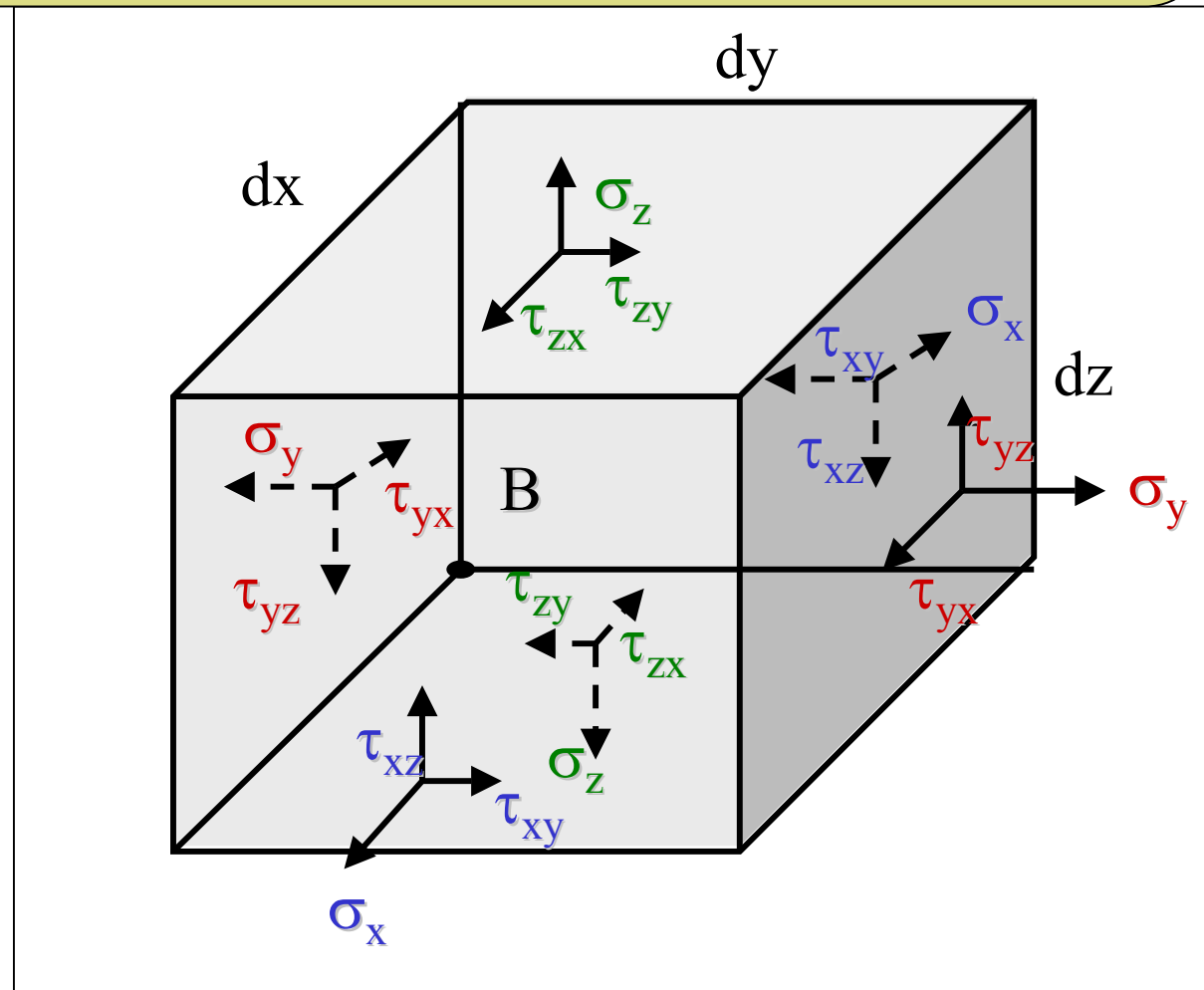
tensor stanu naprężenia

gdzie:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ **składowe normalne stanu naprężania** działające w płaszczyźnie, do której normalną jest odpowiednio oś x, y, z,
 $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$ - **składowe styczne stanu naprężenia**



Rys.4



Jeżeli każdemu punktowi ciała przypisany zostanie tensor stanu naprężenia, to określone będzie **tensorowe pole stanu naprężenia** w tym ciele. Pole tensorowe określa **sześć składowy stanu naprężenia**, które są funkcjami współrzędnych punktu ciała x, y, z $\sigma_x(x,y,z)$ $\sigma_y(x,y,z)$, $\sigma_z(x,y,z)$, $\tau_{xy}(x,y,z)$, $\tau_{yz}(x,y,z)$, $\tau_{zx}(x,y,z)$.

Stan naprężenia w ciele może być **niejednorodny** lub **jednorodny**.
W pierwszym ogólnym przypadku tensory stanu naprężenia w poszczególnych punktach ciała są różne, a w drugim szczególnym przypadku są jednakowe.

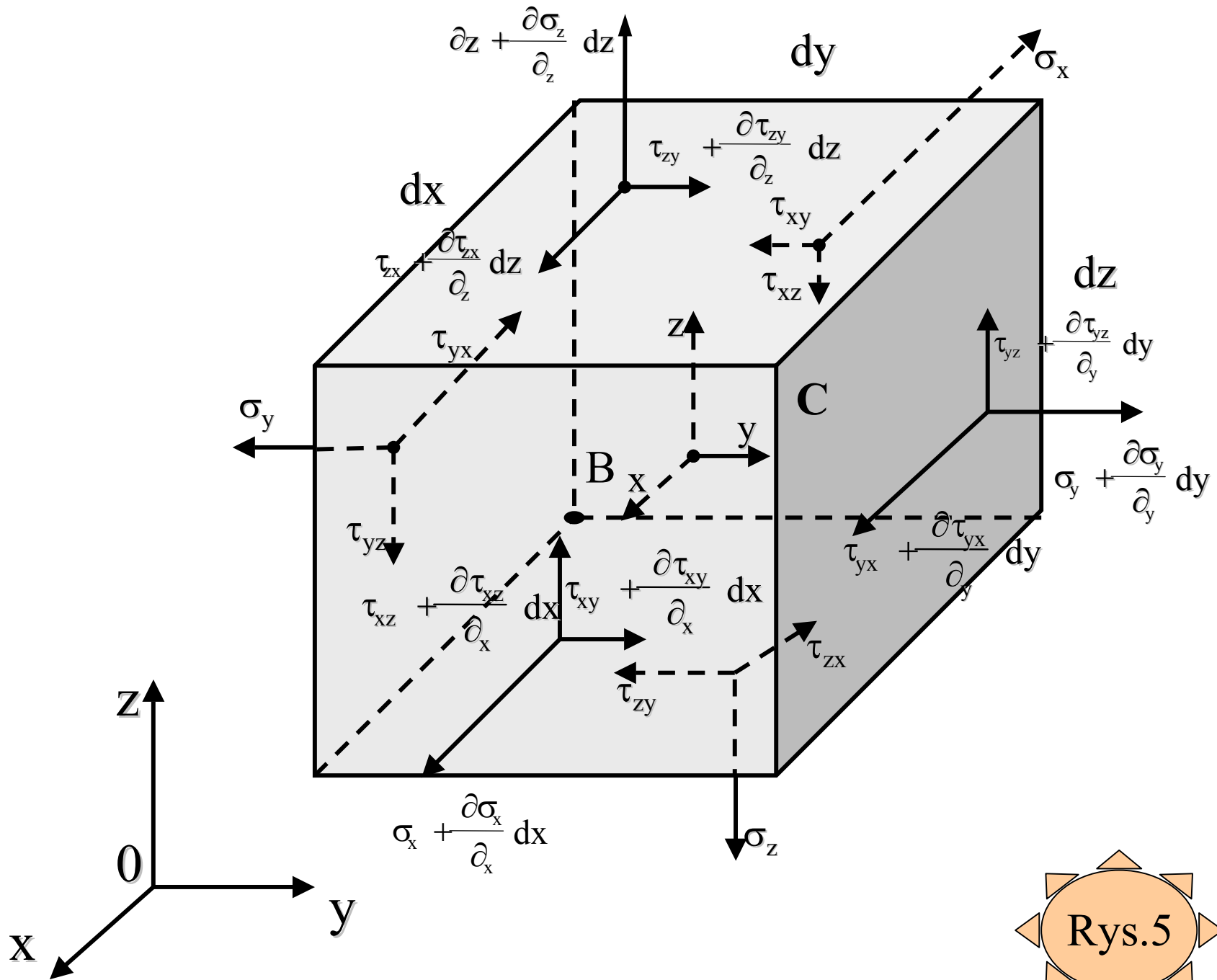
Aby zdefiniować **tensor stanu naprężenia w punkcie ciała**, rozważano równowagę elementarnego prostopadłościanu w przypadku jednorodnego stanu naprężenia. Dlatego składowe stanu naprężenia działające na równoległych ścianach były jednakowe (rys.4).

**LOKALNE RÓWNANIA
RÓWNOWAGI
WEWNĘTRZNEJ CIAŁA**

W przypadku **niejednorodnego stanu naprężenia** jego składowe są funkcjami współrzędnych x, y, z punktu ciała. Rozważając równowagę elementarnego prostopadłościanu należy zatem uwzględnić przyrosty tych funkcji, wynikające z przyrostu współrzędnych.

Ściany bowiem niewidoczne wyznaczają punkt **B** o współrzędnych x, y, z , a widoczne punkty **C** o współrzędnych $x + dx, y + dy, z + dz$.

Na elementarny prostopadłościan działają **siły powierzchniowe**, reprezentowane na poszczególnych ścianach przez **składowe stanu naprężenia** oraz **siły masowe**, których składowe w kierunku osi xyz oznaczamy odpowiednio X, Y, Z w N/kg . Siły te muszą spełniać sześć warunków równowagi.



Rys.5

Lokalne równania różniczkowe równowagi wewnętrznej ciała

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \rho &= 0\end{aligned}\tag{15}$$

gdzie:

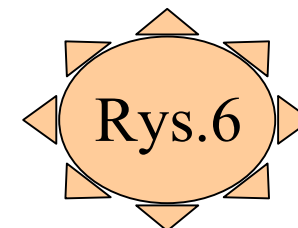
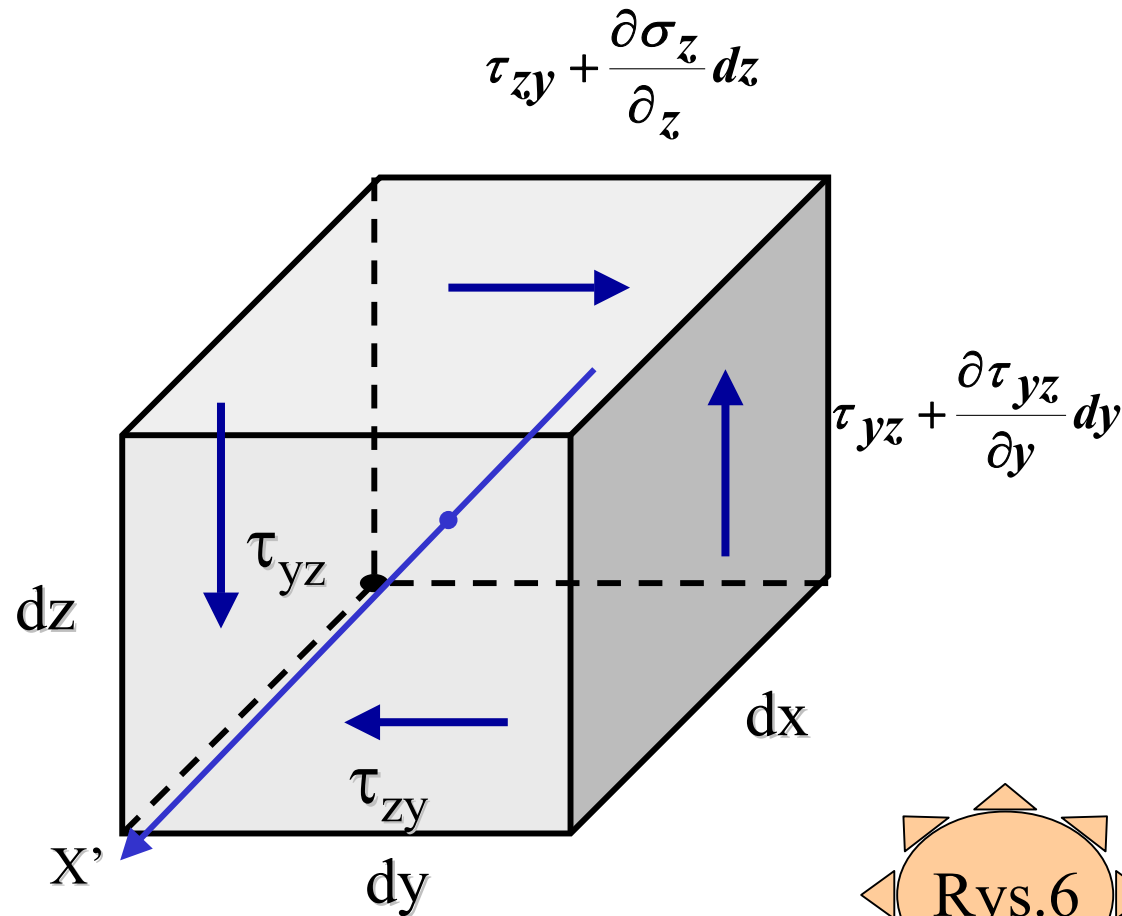
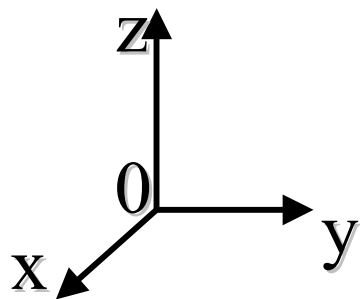
$X\rho$, $Y\rho$, $Z\rho$ są to siły objętościowe w $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

Obliczamy **sumę momentów sił** działających na elementarny prostopadłościan względem osi x' przechodzącej przez jego środek ciężkości (dzięki czemu można pominąć momenty sił masowych) i równoległej do osi x , a następnie przyrównujemy ją do zera.

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$



Znajomość pola tensorowego stanu naprężenia stanowi podstawę oceny wytrzymałości ciała. Dlatego jednym z głównych zadań wytrzymałości materiałów jest **analiza stanu naprężenia**.

Inne oznaczenia:

$$x \rightarrow x_1, \quad y \rightarrow x_2, \quad z \rightarrow x_3$$

$$\sigma_x = \sigma_{11}, \quad \sigma_y = \sigma_{22}, \quad \sigma_z = \sigma_{33}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{12}, \quad \tau_{yz} = \sigma_{23}, \quad \tau_{zx} = \sigma_{31}$$

Tensor stanu naprężenia

$$\left[\mathbf{T}_\sigma \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \left[\mathbf{T}_\sigma \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \left[\sigma_{ij} \right]$$

(16)

Równania różniczkowe
lokalnej równowagi wewnętrznej

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 \rho &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 \rho &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 \rho &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

lub

$$\sigma_{ji,j} + X_i \rho = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_{ji,j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (18)$$

STAN ODKSZTAŁCENIA

Pole wektorowe przemieszczeń

Jeśli do unieruchomionego przez więzy **ciała odkształcalnego** przyłożyć **obciążenia zewnętrzne**, to dowolny jego punkt **B**, którego położenie wyznacza **wektor promień** $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

przemieści się i zajmie pozycję **B'**.

Odcinek skierowany **BB'** nazywa się wektorem przemieszczenia

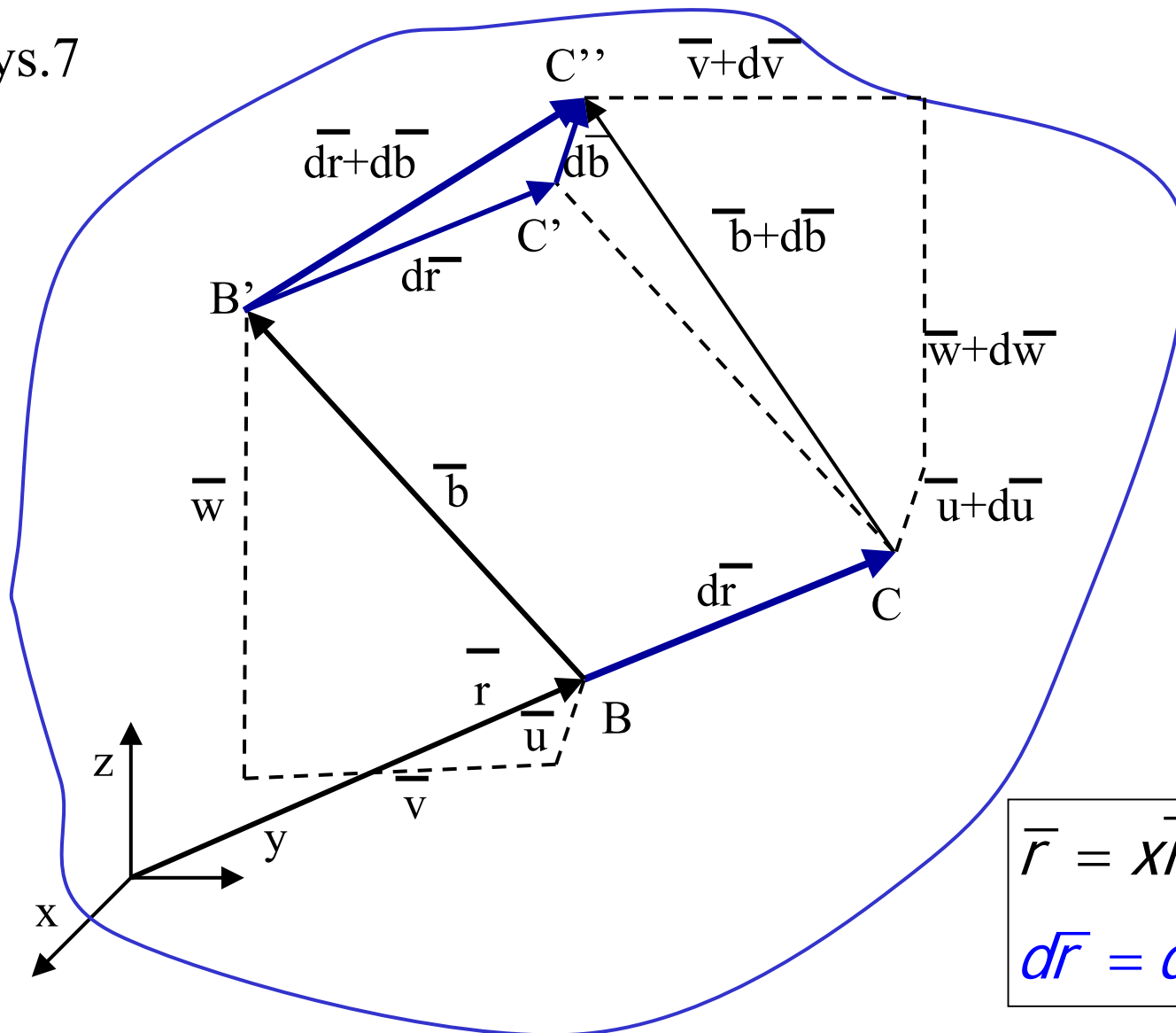
$$\bar{b} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$$

punktu **B**.

Pole wektorowe zostanie **określone**, jeśli każdemu punktowi ciała przypisany będzie **wektor przemieszczenia** \bar{b}

Składowe wektora przemieszczeń są w takim przypadku **funkcjami współrzędnych x,y,z** punktu **B** ciała w stanie nie odkształconym $u(x,y,z)$ $v(x,y,z)$ $w(x,y,z)$.

Rys.7



$\bar{i} \rightarrow$ wersor x
 $\bar{j} \rightarrow$ wersor y
 $\bar{k} \rightarrow$ wersor z

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$$

$$\bar{u} = u\bar{i} ; \bar{v} = v\bar{j} ; \bar{w} = w\bar{k}$$

$$d\bar{u} = du\bar{i} ; d\bar{v} = dv\bar{j} ; d\bar{w} = dw\bar{k}$$

$$\bar{b} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$$

$$d\bar{b} = du\bar{i} + dv\bar{j} + dw\bar{k}$$

Rozważmy infinitezymalny (nieskończenie mały) odcinek **BC** ciała odkształcalnego, który po jego odkształceniu stanie się odcinkiem **B'C''**. Zakładamy bowiem, że ze względu na nieskończenie małe wymiary pozostanie on nadal prosty. Położenie punktu C określa wektor $\bar{r} + d\bar{r} = (x + dx)\bar{i} + (y + dy)\bar{j} + (z + dz)\bar{k}$ a jego przemieszczenie $d\bar{b} = d\bar{u}\bar{i} + d\bar{v}\bar{j} + d\bar{w}\bar{k}$.

Odcinek **BC** jest jak widać, wektorem $d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$

Każdemu wektorowi $d\bar{r}$ w punkcie **B** ciała przyporządkować można odpowiedni wektor $d\bar{b}$. Takie przyporządkowanie jest, jak wiadomo, tensorem drugiego rzędu, który oznaczmy $\underline{\underline{\alpha}}$.

Składowe wektorów $\bar{d}b$ i $\bar{d}r$ związane są ze sobą następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (19)$$

Założyliśmy przy tym, że funkcje $u(x, y, z)$ $v(x, y, z)$ $w(x, y, z)$ są **ciągłe i różniczkowane**.

Wprowadzimy następujące macierze:

Jednokolumnową macierz składowych wektora \underline{db}

$$[db] = [du \quad dv \quad dw]^T \quad (20)$$

Jednokolumnową macierz składowych wektora \underline{dr}

$$[dr] = [dx \quad dy \quad dz]^T \quad (21)$$

Kwadratową macierz - reprezentację tensora $\underline{\alpha}$

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Zależności (19) po uwzględnieniu (20),(21) i (22) można zapisać w formie macierzowej następująco:

$$[db] = \overline{\alpha} [dr] \quad (23)$$

Niesymetryczny tensor α przedstawić można jako **sumę tenora**

$$\text{antysymetrycznego } \omega \text{ i symetrycznego } \varepsilon \quad (24)$$

$$\overline{\alpha} = \overline{\omega} + \overline{\varepsilon}$$

Słuszność tej formuły można sprawdzić dodając kolejno odpowiednie elementy macierzy. W formule (24) występują następujące macierze:

Kwadratowa macierz reprezentacja **tensora antysymetrycznego**

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Kwadratowa macierz reprezentacja **tensora symetrycznego**

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Wprowadźmy oznaczenia

Odształcenia
względne

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

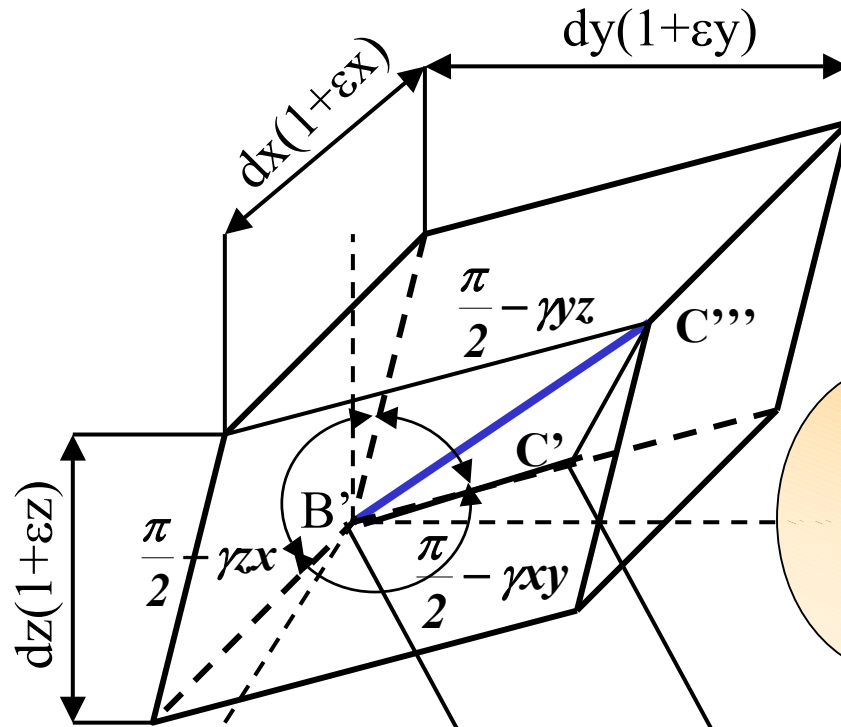
Kąty odkształceń
postaciowych

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\gamma_{zy} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

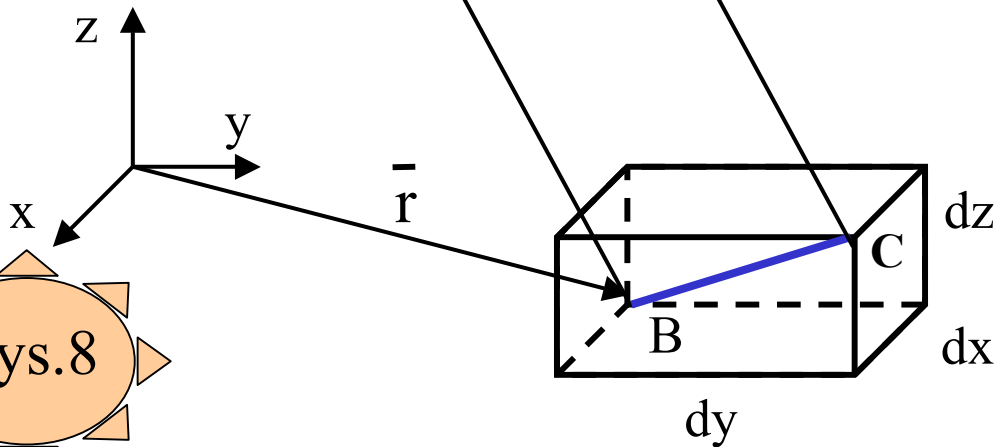
Tensor stanu odkształcenia

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

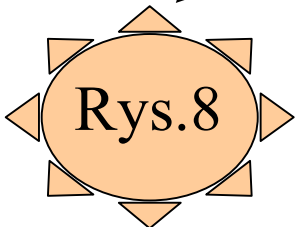
Odcinek BC potraktować można jako przekątną elementarnego prostopadłościanu, który stanowi otoczenie punktu B (rys.8)



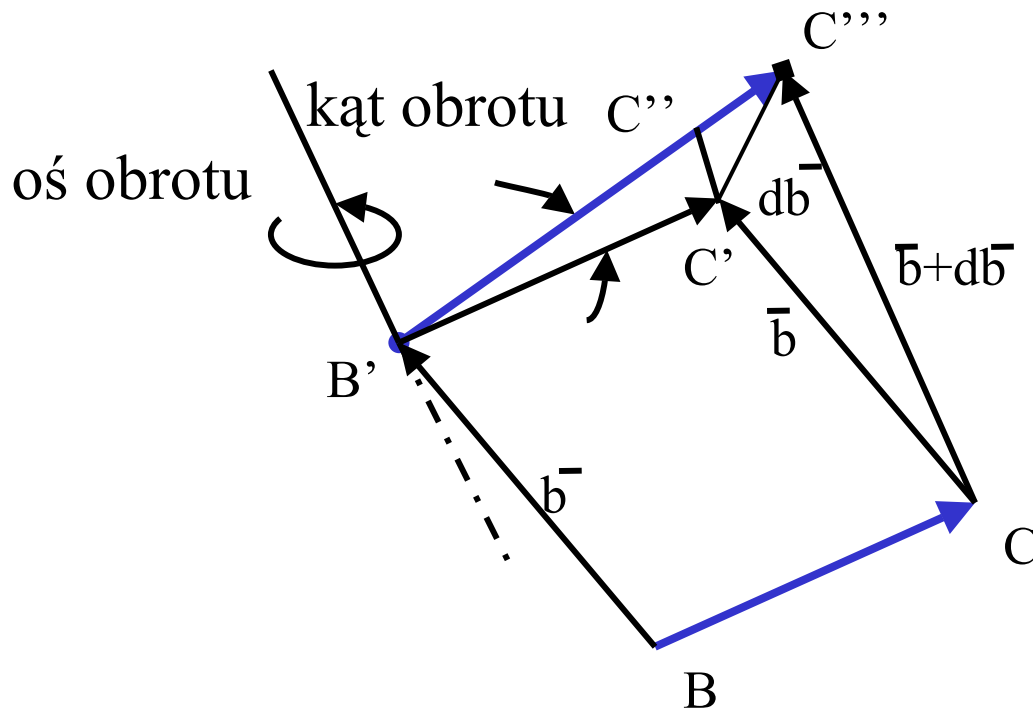
Prostopadłościan po odkształceniu



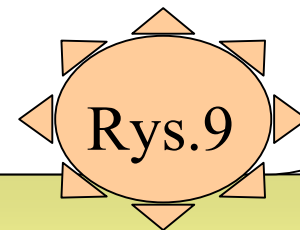
Prostopadłościan przed odkształceniem



Prostopadłościan przemieszcza się (BC przechodzi w położenie $B'C''$) jako ciało sztywne oraz odkształca się (przekątna $B'C''$ wydłuża się lub skraca o $C''C'''$).



Fazy zmian
przekątnej BC



Istotne znaczenie ma tu odkształcenie prostopadłościanu, związane ze zmianą długości jego przekątnej o $C''C'''$.

Odkształcenie elementarnego prostopadłościanu polega na **zmianie długości jego krawędzi**, co określają **wydłużenia względne** ε_x , ε_y , ε_z , oraz zmianie kątów prostych pomiędzy ścianami, co określają **kąty odkształcenia postaciowego** γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} .

Wprowadźmy nowe oznaczenia:

$$x \rightarrow x_1, \quad y \rightarrow x_2, \quad z \rightarrow x_3$$

$$u \rightarrow u_1, \quad v \rightarrow u_2, \quad w \rightarrow u_3$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_y = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_z = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)$$

lub

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Tensor stanu odkształcenia

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Warunki ciągłości (nierozdzielności) odkształceń de Saint – Venanta

Notacja inżynierska:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$$

lub

$$e_{ikm} e_{jln} \varepsilon_{kl,mn} = 0$$

$$(i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3)$$

gdzie

$$\varepsilon_{kl,mn} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_m \partial x_n}$$

$$e_{ikm} = \begin{cases} 0 & i = k, k = m, i = m \\ 1 & \text{jesli } i, k, m \text{ tworzy permutację cykliczną } 1, 2, 3 \\ -1 & i, k, m \text{ tworzy permutację cykliczną } 1, 3, 2 \end{cases}$$