UOGÓLNIONE PRAWO HOOKE'A

Układ liniowosprężysty Clapeyrona

- Robert Hooke podał następującą, pierwotna postać prawa liniowej sprężystości: *ut tensio sic vis*, czyli takie wydłużenie jaka siła

- W klasycznej teorii sprężystości nadano temu prawu bardziej precyzyjną, dwojaką formę, określającą w ciele sprężystym liniowe związki między przemieszczeniami, a siłami bądź odkształceniami, a naprężeniami, nazwano prawem *Hooke'a*.

- Dowolne przemieszczenie uogólnione u_i ($i= 1,2, ...,n$) spowodowane jednoczesnym działaniem wszystkich sił uogólnionych (P_1 ... P_j ... P_n) jest równe sumie przemieszczeń częściowych wywołanych działaniem poszczególnych, pojedyńczych sił i nie zależy od kolejności ich przyłożenia

$$u_i = f_{i1}P_1 + f_{i2}P_2 + \ldots + f_{ij}P_j + \ldots + f_{in}P_n + = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}P_j$$

- Dowolną siłę uogólnioną P_i **(i=1,2, ..., n)** można przedstawić jako liniową funkcję uogólnionych przemieszczeń $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n$

$$P_i = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \ldots + k_{ij}u_j + \ldots + k_{in}u_n = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}u_j$$

- Liczba wpływowa k_{ij} jest częścią siły P_i, spowodowaną przemieszczeniem $u_j = 1$. Liczby wpływowe k_{ij} nie zależą od wartości przemieszczeń u_j.

Uogólnione prawo Hooke'a dla ciała anizotropowego

prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

- Właściwa energia potencjalna odkształceń sprężystych Φ (potencjał sprężysty)

$$\Phi = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_{\varepsilon_{ij}=0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

- Całka nie zależy od drogi całkowania (potencjał sprężysty), dlatego funkcja podcałkowa jest różniczką zupełną

$$d\Phi = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \sigma_{22} d\varepsilon_{22} + \sigma_{33} d\varepsilon_{33} + 2(\sigma_{12} d\varepsilon_{12} + \sigma_{23} d\varepsilon_{23} + \sigma_{31} d\varepsilon_{31})$$

Stąd widać, że

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Z drugiej strony wprowadzimy wyrażenie

$$d\Phi^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = \varepsilon_{11} d\sigma_{11} + \varepsilon_{22} d\sigma_{22} + \varepsilon_{33} d\sigma_{33} + 2(\varepsilon_{12} d\sigma_{12} + \varepsilon_{23} d\sigma_{23} + \varepsilon_{31} d\sigma_{31})$$

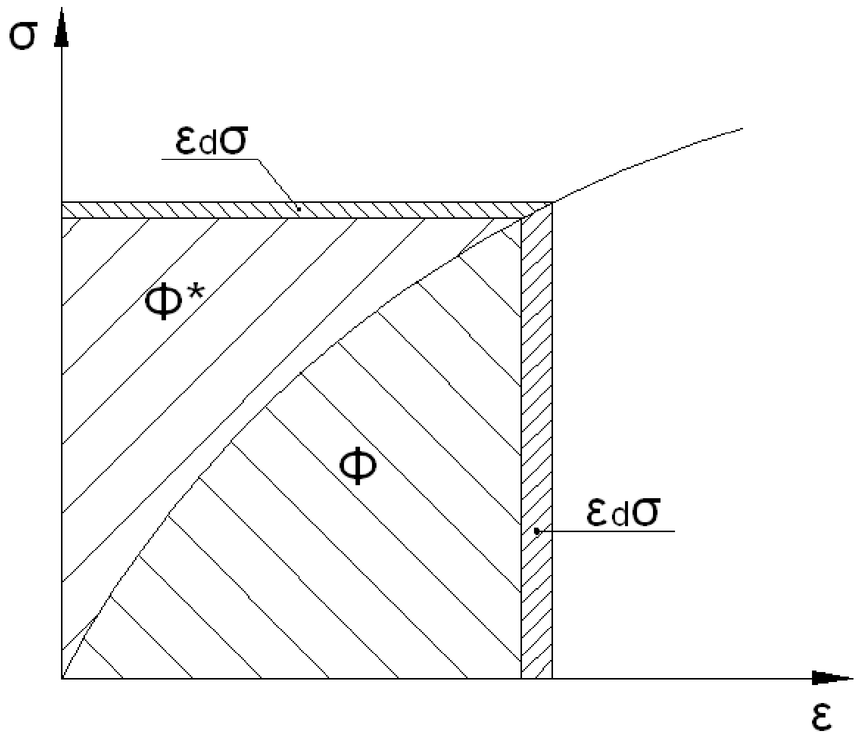
Wtedy suma $d\Phi + d\Phi^*$ jest różniczką zupełną $d(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$

tzn.

$$d\Phi + d\Phi^* = \partial(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$$

dlatego $\boxed{\varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{ij}}}$ → $\boxed{\Phi^* = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma}$

$\Phi^* \equiv$ właściwa energia dopełniająca



$$\boxed{\Phi + \Phi^* = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}$$

dla ciała liniowo-sprężystego

$$\boxed{\Phi = \Phi^* = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}$$

W przypadku jednoosiowego rozciągania (ściskania) prawo Hooke'a

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

E- moduł sprężystości podłużnej Younga

- Dla dowolnego stanu naprężenia i odkształcenia prawo to można uogólnić

$$\boxed{\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}}$$

σ_{ij} – tensor stanu naprężenia

lub odwrotnie

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}\sigma_{kl}}$$

ε_{ij} – tensor stanu odkształcenia

E_{ijkl} - tensor IV rzędu modułów sprężystości,
D_{ijkl} - tensor sprężystych podatności

W przypadku ogólnym

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})}$$

- zależność nieliniowa

W zapisie macierzowym:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$$

gdzie

$$\{\sigma\}\Big|_{1\times 9} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{13}, \sigma_{31}]^T$$

$$\{\varepsilon\}\Big|_{1\times 9} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{31}]^T$$

$$[E]\Big|_{9\times 9} = [E_{ijkl}]$$

Macierz [E] zawiera 81 stałych!

Ponieważ tensory σ_{ij} i ε_{ij} są symetryczne, więc

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \{\sigma\}\big|_{1\times 6} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \qquad \{\varepsilon\}\big|_{1\times 6} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}]^T$$

$$[E]\big|_{6\times 6} = [E_{ijkl}]$$ gdzie $$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{jilk}$$

[E] ma 36 stałych

$$[E]\big|_{6\times 6} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & E_{3323} \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1223} \\ E_{1211} & E_{1322} & E_{1333} & E_{1312} & E_{1313} & E_{1323} \\ E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2312} & E_{2313} & E_{2323} \end{bmatrix}$$

- Dalsze zmniejszenie liczby niezależnych składowych tensora [E] można otrzymać z rozważań termodynamicznych, jeśli założyć istnienie właściwej energii potencjalnej

- Różniczka $d\Phi$ jest równa

$$d\Phi = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$$

Stąd

$$\boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \, / \, \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{kl}}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{kl}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right) = E_{ijkl}}$$

prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

- Zmieniając kolejność różniczkowania mamy

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{kl}}\right) = E_{klij}$$

Stąd

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}} = E_{ijkl} = E_{klij}$$

- Liczba niezależnych modułów redukuje się do **21**. Jest to przypadek najbardziej ogólny – ***anizotropia*** materiału sprężystego

- Wiele materiałów cechuje się:

  - ***jednorodnością*** (własności mechaniczne jednakowe we wszystkich punktach)

  - ***izotropowością*** (własności mechaniczne jednakowe we wszystkich kierunkach)

prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

- W przypadku izotropii tensor E_{ijkl} jest tzw. ***tensorem izotropowym IV rzędu***, tzn. w każdym układzie współrzędnych prostokątnych ma jednakowe elementy – składowe

- Izotropowym tensorem II rzędu jest **tensor Kroneckera**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- Tensorami IV rzędu są $\delta_{ij}\delta_{kl}$ oraz $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$ i są one także tensorami izotropowymi

- Tensor E_{ijkl} da się przedstawić jako liniowa ich kombinacja

$$E_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}$$

gdzie ***a,b,c*** to stałe

- Prawo Hooke'a w wyniku symetrii ma postać:

$$\sigma_{ij} = a\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + b\varepsilon_{ij} + c\varepsilon_{ij}$$

lub

$$\sigma_{ij} = \underbrace{a}_{\lambda}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \underbrace{(b+c)}_{2\mu}\varepsilon_{ij}$$

- Mamy zatem tylko dwie stałe a i (b+c). Stałe te nazywane są stałymi Lamego λ=a i 2μ=b+c (mają wymiar naprężeń)

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

Gdzie stałe Lamego wyrażają się wzorami:

:

$$\mu = G \qquad \lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu}$$

gdzie

G – moduł sprężystości poprzecznej Kirchhoffa,

ν - liczba Poissona.

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2\nu G}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

Uwzględniając, że zależność między G i E

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

stałe *Lamego wyrażają się następująco:*

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

i,j,k=1,2,3

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu}[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu}[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})]$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu}[\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})]$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \qquad \sigma_{23} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{23} \qquad \sigma_{31} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{31}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2vG}{1-2v}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}}$$

(i,j,k=1,2,3)

$$\boxed{\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \frac{2vG}{1-2v}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}$$

$$\boxed{\sigma_{22} = 2G\varepsilon_{22} + \frac{2vG}{1-2v}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}$$

$$\boxed{\sigma_{33} = 2G\varepsilon_{33} + \frac{2vG}{1-2v}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}$$

$$\boxed{\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}} \qquad \boxed{\sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23}} \qquad \boxed{\sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31}}$$

- Dla ciała izotropowego tensor E_{ijkl} przyjmuje postać:

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$i, j, k, l = 1,2,3$$

TYLKO DWIE STAŁE!

lub w zapisie macierzowym:

$$[E]\Big|_{6\times6} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\}\Big|_{1\times6} = [E]\Big|_{6\times6} \{\varepsilon\}\Big|_{1\times6}$$

Energia sprężysta właściwa

- Obliczamy porcję energii sprężyste zmagazynowaną w infinitezymalnym prostopadłościanie, traktując go jako układ liniowo-sprężysty

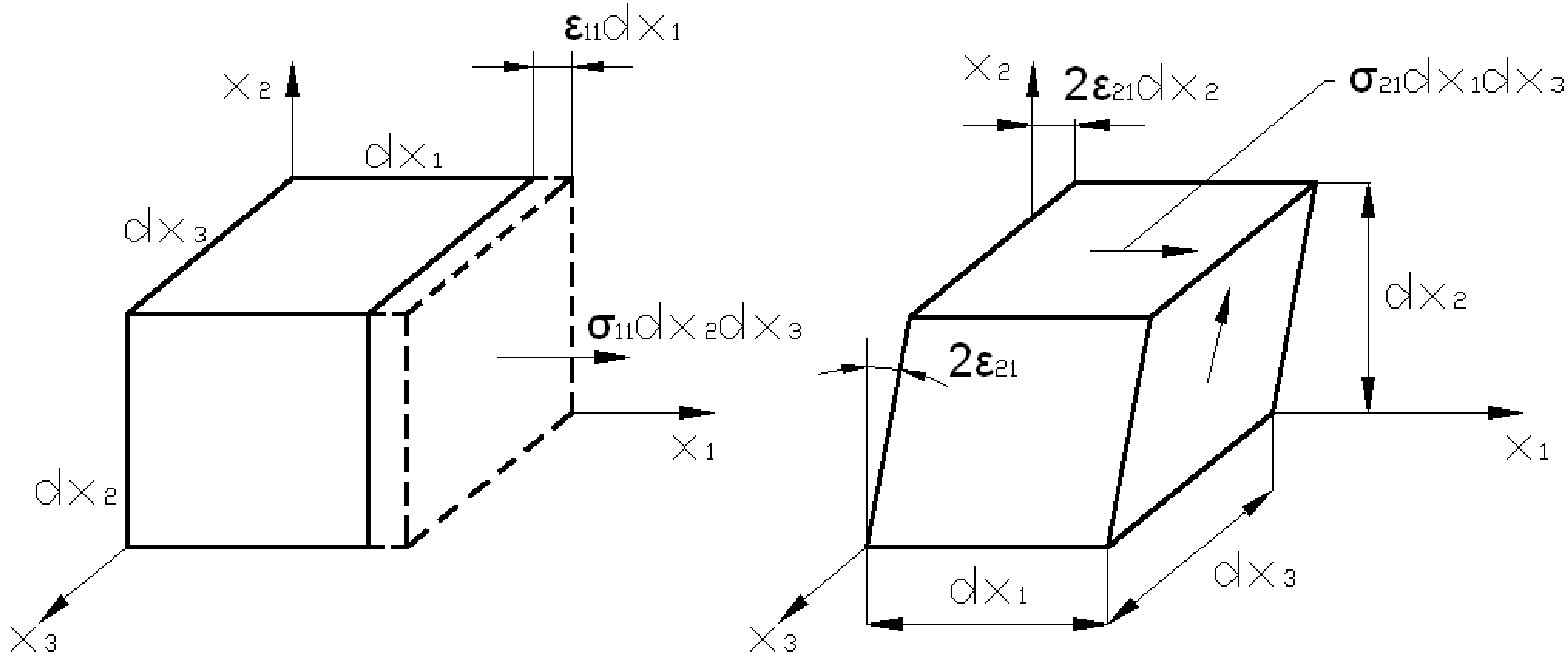
- Siły powierzchniowe proporcjonalne do składowych stanu naprężenia wykonują pracę na odpowiadających im przemie-szczeniach, proporcjonalnych do składowych stanu odkształcenia

- Porcja energii sprężystej dV=dL zmagazynowana w elementarnym prostopadłościanie objętości wynosi zatem

$$dV = dL = \frac{1}{2}[(\sigma_{11} dx_2 dx_3)(\varepsilon_{11} dx_1) + (\sigma_{22} dx_3 dx_1)(\varepsilon_{22} dx_2) + (\sigma_{33} dx_1 dx_2)(\varepsilon_{33} dx_3) +$$

$$+ (\sigma_{21} dx_3 dx_1)(2\varepsilon_{21} dx_2) + (\sigma_{32} dx_1 dx_2)(\sigma_{32} dx_1 dx_2) + (2\varepsilon_{32} dx_3) + (\sigma_{13} dx_2 dx_3)(2\varepsilon_{13} dx_1)]$$

- Sposób obliczania pracy wykonanej przez siłę $\sigma_{11} dx_2 dx_3$ na przemieszczeniu $\varepsilon_{11} dx_1$ oraz siłę $\sigma_{21} dx_3 dx_1$ na przemieszczeniu $2\varepsilon_{21} dx_2$ jest zilustrowany na rysunku



ROZCIĄGANIE
(ŚCISKANIE)

ŚCINANIE

- Po podzieleniu *dV=dL* przez objętość prostopadłościanu otrzymamy energie sprężystą przypadającą na jednostkę objętości, zwaną *właściwą energią sprężystą* w analizowanym punkcie ciała

$$\Phi = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \sigma_{12}2\varepsilon_{12} + \sigma_{23}2\varepsilon_{23} + \sigma_{31}2\varepsilon_{31})$$

- Po wstawieniu zamiast składowych stanu odkształcenia lub naprężenia otrzymuje się:

$$\boxed{\Phi=\frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})^2+(1+v)(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{22}\sigma_{33}-\sigma_{33}\sigma_{11})\right]}$$

$$\boxed{\Phi=G\left[\frac{v}{1-2v}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2+\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2+2(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2)\right]}$$

Energia sprężysta właściwa jest jednokrotną kwadratową funkcją składowych stanu naprężenia lub odkształcenia.

Właściwą energię można traktować jako sumę
energii zmiany objętości Φ_V i zmiany postaci ciała Φ_f

$$\boxed{\Phi = \Phi_V + \Phi_f}$$

$$\boxed{\Phi_V = \frac{1-2v}{6E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2}$$

$$\boxed{\Phi_f = \frac{1+v}{6E}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)\right]}$$

- Energia sprężysta Φ wyrażona przez składowe stanu naprężenia bądź odkształcenia nosi nazwę *potencjału sprężystego*, ponieważ spełnia warunki, jakie musi spełnić funkcja, aby być potencjałem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{11}} = \varepsilon_{11} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{22}} = \varepsilon_{22} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{33}} = \varepsilon_{33}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{12}} = 2\varepsilon_{12} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{23}} = 2\varepsilon_{23} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{31}} = 2\varepsilon_{31}$$

albo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{11}} = \sigma_{11} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{22}} = \sigma_{22} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{33}} = \sigma_{33}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(2\varepsilon_{12})} = \sigma_{12} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial(2\varepsilon_{23})} = \sigma_{23} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial(2\varepsilon_{31})} = \sigma_{31}$$

KONIEC