

PODSTAWY LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI



- **Przestrzenne zadanie brzegowe teorii sprężystości**
- **Metody rozwiązywania zadań brzegowych teorii sprężystości**
- **Rozwiązanie płaskiego zadania brzegowego teorii sprężystości w naprężeniach**
- **Rozwiązanie płaskiego osiowosymetrycznego zadania brzegowego teorii sprężystości w przemieszczeniach**
- **Naprężenia kontaktowe**

Przestrzenne zadanie brzegowe teorii sprężystości

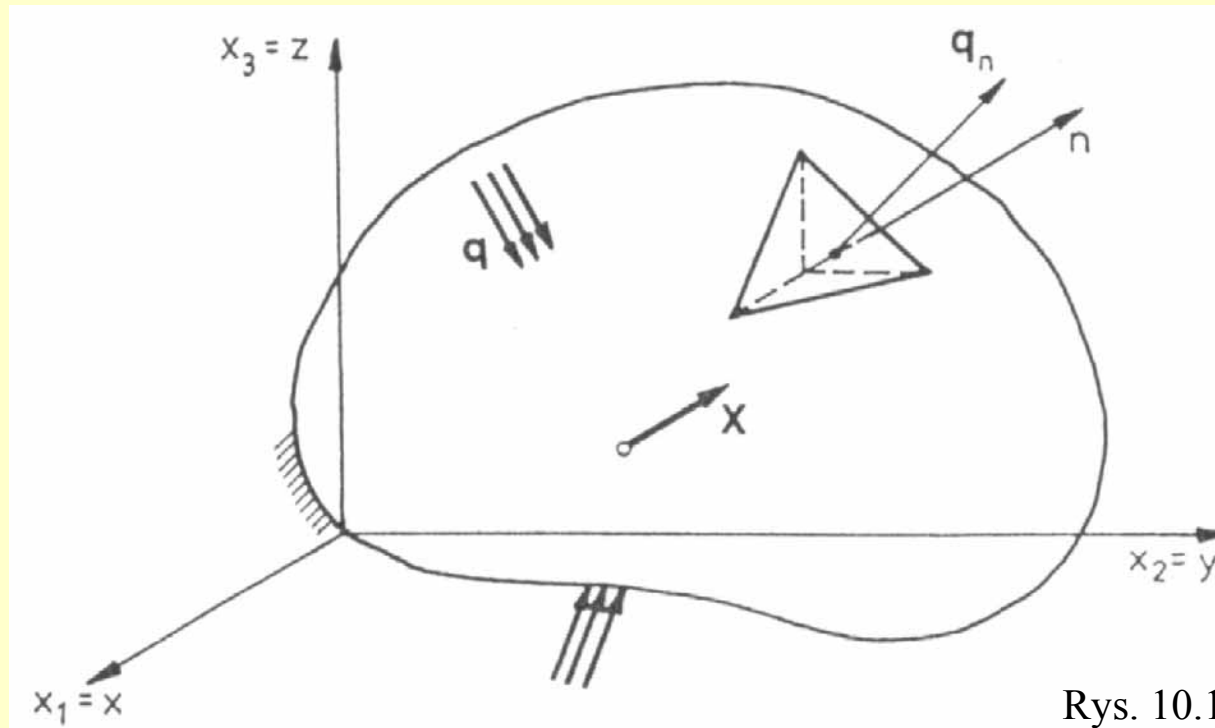
Klasyczna, liniowa teoria sprężystości jest mechaniką ciała (ośrodka) odkształcalnego, opierająca się na następujących założeniach:

1. Ciało jest wypełnione w sposób ciągły materią zarówno przed, jak i po odkształceniu (*kontinuum materialne*).
2. Ośrodek ciągły jest fizycznie jednorodny i izotropowy.
3. Przemieszczenia i odkształcenia pojawiają się w chwili przyłożenia obciążeń wywołujących naprężenia.
4. Istnieje naturalny beznapięciowy (beznaprężeniowy) stan ciała, do którego powraca ono zawsze po odciążeniu.
5. Odkształcenia i przemieszczenia są bardzo małe.
6. Ośrodek ciągły (materiał) zachowuje się zgodnie z prawem Hooke'a.
7. Funkcje określające naprężenia, przemieszczenia i odkształcenia są ciągłe i różniczkowalne.

Przestrzenne zadanie brzegowej teorii sprężystości

można sformułować w następujący sposób:

Dane jest ciało liniowo sprężyste o dowolnym kształcie i wymiarach (rys. 10.1)



Rys. 10.1

Przyjmujemy, że pozostaje ono w spoczynku. Znany jest sposób podparcia ciała i jego własności sprężyste. Określone są siły **powierzchniowe q** i **masowe X** (objętościowe X_p) działające na rozważane ciało. Poszukujemy natomiast wektorowego pola przemieszczeń oraz tensorowych pól stanu naprężenia i odkształcenia w tym ciele. Innymi słowy, trzeba znaleźć piętnaście funkcji współrzędnych punktu w ciele nieodkształconym.

Poszukiwane funkcje:

$$\sigma_{ij} = (x_k) \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (10.1)$$

$$u_i(x_k) \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (10.2)$$

$$\varepsilon_{ij}(i_k) \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (10.3)$$

lub w notacji inżynierskiej:

$$\begin{array}{ll} \sigma_x(x, y, z) & \tau_{xy}(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) & \tau_{yz}(x, y, z) \\ \sigma_z(x, y, z) & \tau_{zx}(x, y, z) \end{array} \quad (10.4)$$

$$\begin{array}{l} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{array} \quad (10.5)$$

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_x(x, y, z) & \gamma_{xy}(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) & \gamma_{yz}(x, y, z) \\ \varepsilon_z(x, y, z) & \gamma_{zx}(x, y, z) \end{array} \quad (10.6)$$

Do znalezienia tych funkcji należy zastosować piętnaście podstawowych równań teorii sprężystości, które zostały wcześniej wprowadzone. Tworzą one trzy grupy zależności:

A. Równania wewnętrznej równowagi lokalnej

Są to trzy warunki Naviera, w których uwzględniono postulat Boltzmana, zwany także warunkiem Cauchy'ego

$$\sigma_{ji,j} + X_i \rho = 0 \quad (i = 1,2,3; j = 1,2,3) \quad (10.7)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i = 1,2,3; j = 1,2,3) \quad (10.8)$$

albo w notacji inżynierskiej:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \rho = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \rho = 0 \quad (10.9)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \rho = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (10.10)$$

B. Związki geometryczne.

Wyróżnia się dwa rodzaje związków geometrycznych:

B1. Zależność między składowymi stanu odkształcenia i przemieszczeniami, czyli sześć związków Cauchy'ego.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i = 1,2,3; j = 1,2,3) \quad (10.11)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (10.12)$$

albo w notacji inżynierskiej:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (10.13)$$

B2. Warunki ciągłości (nierozdzielności) odkształceń de Saint – Venanta, których jest także sześć:

$$e_{ikm} e_{jln} \varepsilon_{kl,mn} = 0$$

$$(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$$

$$(k = 1,2,3; l = 1,2,3)$$

$$(m = 1,2,3; n = 1,2,3)$$

(10.14)

albo w notacji inżynierskiej:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}$$

(10.15)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$$

C. Związki fizyczne

Jest to uogólnione prawo Hooke'a, które może mieć dwojaką postać:

C1. Sześć funkcji określających składowe stanu odkształcenia w zależności od składowych stanu naprężenia:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (10.16)$$

albo w notacji inżynierskiej:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (10.17)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

C2. Sześć funkcji określających składowe stanu naprężenia w zależności od składowych stanu odkształcenia.

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2\nu G}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3) \quad (10.18)$$

albo w notacji inżynierskiej:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \quad (10.19)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

W dynamicznym zadaniu brzegowym teorii sprężystości poszukiwane funkcje (10.1), (10.2) i (10.3) albo (10.4), (10.5) i (10.6) są dodatkowo zależne od czasu t . W równaniach równowagi wewnętrznej należy uwzględnić siły bezwładności d'Alemberta przyłożone do nieskończonego prostopadłościanu. Formuły (10.7) albo (10.9), w których prawe strony są odpowiednio równe :

$$\rho \ddot{u}_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

albo

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

stają się **dynamicznymi równaniami ośrodka (ciała) odkształcalnego.**

Metody rozwiązywania zadań brzegowych teorii sprężystości

Poszukiwane funkcje (10.1), (10.2) i (10.3) albo (10.4), (10.5) i (10.6) muszą być tak dobrane, aby spełniały podstawowe równania teorii sprężystości A, B i C oraz warunki brzegowe, a w przypadku zadania dynamicznego także warunki początkowe.

Rozwiązanie w naprężeniach polega na tym, że w pierwszej kolejności wyznacza się sześć funkcji określających składowe stanu naprężenia $\sigma_{ij}(x_k)$ ($i, j, k = 1, 2, 3$)
albo $\sigma_x(x, y, z)$, $\sigma_y(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$, $\tau_{zx}(x, y, z)$.

Należy w tym celu tak przekształcić podstawowe równania teorii sprężystości, aby uzyskać układ równań różniczkowych ze względu na naprężenia. Trzy pierwsze równania tego układu stanowią lokalne warunki równowagi wewnętrznej A. Aby uzyskać pozostałe równania, należy składowe stanu odkształcenia, wyrażone przez składowe stanu naprężenia w zależnościach C1, wprowadzić do warunków ciągłości odkształceń B2. Po dokonaniu tej operacji i po przekształceniach, w trakcie których stosuje się również równania równowagi lokalnej, otrzymujemy warunki nierozdzielności odkształceń wyrażone przez naprężenia. Jest to sześć równań Beltramiiego - Michella >>>

Sześć równań Beltramiego – Michella:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} X_{k,k} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (10.20)$$

albo w notacji inżynierskiej:

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{sr}}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \rho + 2 \frac{\partial X}{\partial x} \rho = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{sr}}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \rho + 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \rho = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{sr}}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \rho + 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \rho = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{sr}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \rho + \frac{\partial X}{\partial y} \rho = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{sr}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial Y}{\partial y} \rho + \frac{\partial X}{\partial z} \rho = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{sr}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \rho + \frac{\partial Z}{\partial x} \rho = 0$$

(10.21)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

oznacza operator
harmoniczny Laplace'a
zwany laplasjanem.
Czytaj „nabla dwa”.

(10.22)

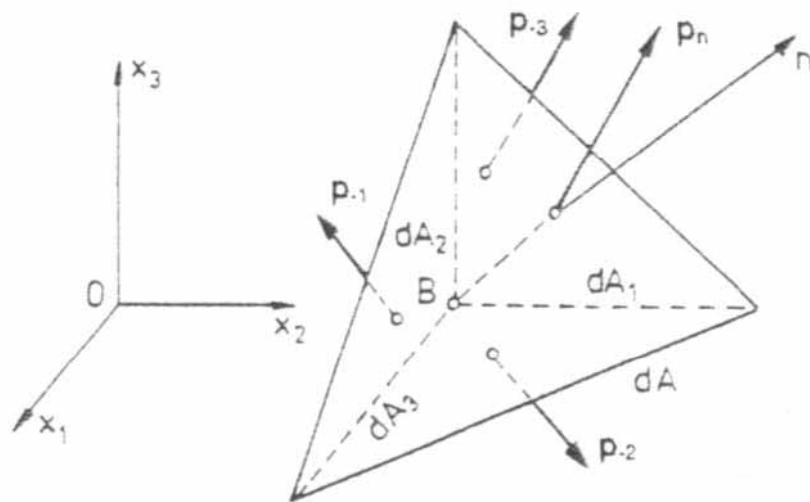
Poszukiwanych sześć funkcji $\sigma_{ij}(x_k)$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) albo $\sigma_x(x, y, z)$,
 $\sigma_y(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$, $\tau_{zx}(x, y, z)$,
 musi spełniać równania równowagi wewnętrznej A, równania Beltramiego – Michella oraz
warunki brzegowe:

$$q_{ni} = \sigma_{ji} \alpha_{jn} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) \quad (10.23)$$

albo w notacji inżynierskiej:

$$\begin{aligned} q_{nx} &= \sigma_x \cos(xn) + \tau_{yx} \cos(yn) + \tau_{zx} \cos(zn) \\ q_{ny} &= \tau_{xy} \cos(xn) + \sigma_y \cos(yn) + \tau_{zy} \cos(zn) \\ q_{nz} &= \tau_{xz} \cos(xn) + \tau_{yz} \cos(yn) + \sigma_z \cos(zn) \end{aligned} \quad (10.24)$$

W tym przypadku n jest normalną do powierzchni zew. ciała w rozważanym punkcie, której kierunek wyznaczają α_{ij} ($j = 1, 2, 3$) albo $\cos(xn)$, $\cos(yn)$, $\cos(zn)$.



Ściana elementarnego czworościanu (patrz obok) prostopadła do n jest fragmentem powierzchni ciała, na który działa obciążenie powierzchniowe $q(x, y, z)$ o składowych q_{ni} ($i = 1, 2, 3$) albo q_{nx}, q_{ny}, q_{nz} . Pozostałe trzy wzajemnie prostopadłe ściany, na których występują naprężenia, znajdują się już wewnątrz ciała. Warunki brzegowe wiążą znane powierzchniowe obciążenia zewnętrzne ze stanem naprężenia wewnątrz ciała.

Przy okazji omawiania warunków brzegowych warto przytoczyć **zasadę de Saint – Venanta**, która brzmi:

Różne, ale statycznie równoważne układy sił, przyłożone na niewielkiej części powierzchni ciała, wywołują w punktach dostatecznie oddalonych od strefy działania obciążenia praktycznie jednakowe stany naprężenia. Przez dostateczne oddalenie od strefy działania obciążenia należy rozumieć odległość rzędu porównywalnego z liniowymi wymiarami powierzchni, na którą działa układ sił zewnętrznych.

Zasada ta umożliwia modyfikację i upraszczanie warunków brzegowych. Wynika z niej również, że stan naprężenia w pobliżu miejsca przyłożenia obciążenia powinien być przedmiotem odrębnej analizy. Wiąże się to z naprężeniami stykowymi.

Rozwiązanie w przemieszczeniach polega na tym, że w pierwszej kolejności wyznacza się trzy funkcje określające przemieszczenia $u_i(x_j)$ ($i, j = 1, 2, 3$) albo $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. Należy w związku z tym przekształcić podstawowe równania teorii sprężystości, aby uzyskać układ równań różniczkowych ze względu na przemieszczenia. W tym celu składowe stanu odkształcenia wyrażone przez przemieszczenia zgodne z zależnościami B1 wprowadzamy do uogólnionego prawa Hooke'a (C2). Uzyskamy składowe stanu naprężenia wyrażone przez przemieszczenia, które różniczkujemy i wstawiamy do warunków równowagi wewnętrznej A. Po przekształceniach otrzymamy warunki równowagi wewnętrznej wyrażone w przemieszczeniach, czyli trzy równania **Naviera – Lamego** :

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ji} + X_i = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (10.25)$$

albo w notacji inżynierskiej:

$$\begin{aligned} (\lambda + G)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + G\nabla^2 u + \rho X &= 0 \\ (\lambda + G)\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + G\nabla^2 v + \rho Y &= 0 \\ (\lambda + G)\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + G\nabla^2 w + \rho Z &= 0 \end{aligned} \quad (10.26)$$

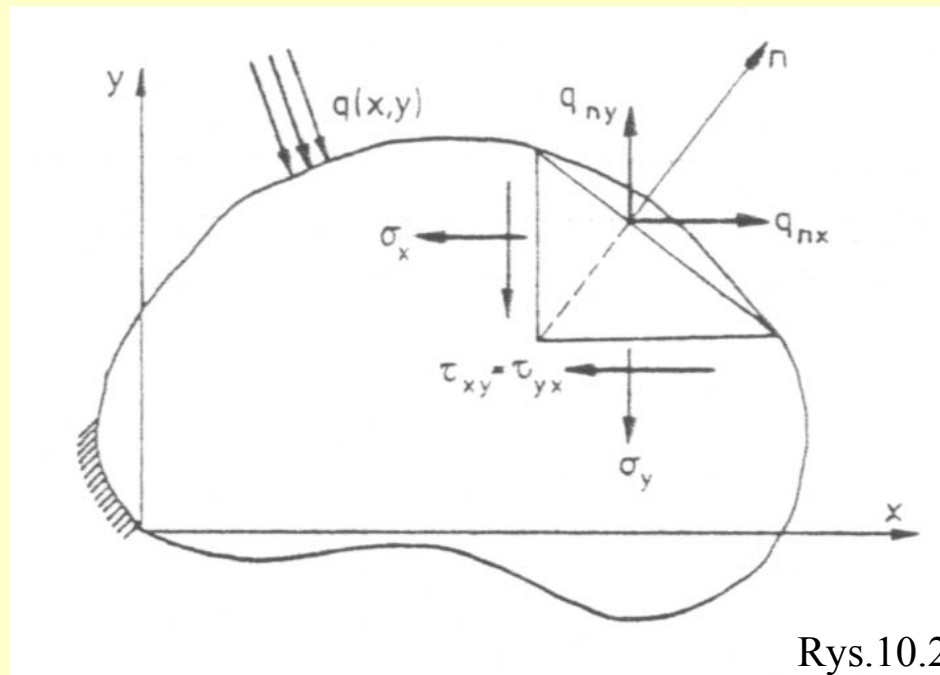
gdzie: $\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$; $\lambda = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu}$ - stała Lamego

Funkcje $u_i(x_j)$ ($i, j = 1, 2, 3$) albo $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ muszą spełniać układ równań różniczkowych cząstkowych Naviera – Lamego (10.25) lub (10.26) oraz warunki brzegowe. Są to warunki naprężeniowe (10.23) albo (10.24), które należy również podać w przemieszczeniach. Aby uzyskać odpowiednie formuły, wystarczy w naprężeniowych warunkach brzegowych (10.23) albo (10.24) składowe stanu naprężenia wyrazić przez przemieszczenia, w analogiczny do stosowanego przy wyprowadzeniu równań Naviera -Lamego. Mogą to być również **przemieszczeniowe warunki brzegowe** określające przemieszczenia $u_i(x_j)$ ($i, j = 1, 2, 3$) albo $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ na części lub na całym brzegu.

Rozwiązanie przestrzennego zadania brzegowego teorii sprężystości wprost, tzn. przez całkowanie układu cząstkowych równań różniczkowych jest bardzo trudne. Dlatego stosuje się różne sposoby ułatwiające uzyskanie choćby przybliżonego rozwiązania. Wprowadza się w tym celu uproszczone modele geometryczne ciała liniowo – sprężystego, takie jak pręt, tarcza, płyta czy powłoka. **Stosuje się przybliżone metody rozwiązywania równań różniczkowych.** Korzysta się także z przybliżonych metod numerycznych rozwiązywania zadań teorii sprężystości, takich jak metoda różnic skończonych, metoda elementów skończonych czy metoda elementów brzegowych. Metody te noszą nazwę metod macierzowych lub komputerowych, ponieważ opierają się na rachunku macierzowym i są przystosowane do obliczeń za pomocą komputera.

ROZWIĄZANIE PŁASKIEGO ZADANIA BRZEGOWEGO TEORII SPRĘŻYSTOŚCI W NAPRĘŻENIACH.

Wyróżnić trzeba dwa przypadki tego zadania, a mianowicie **płaski stan naprężenia** lub **odkształcenia**. Poszukuje się odpowiednio funkcji $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ lub $\varepsilon_x(x, y)$, $\varepsilon_y(x, y)$, $\gamma_{xy}(x, y)$. Rozważymy szczegółowo pierwszy przypadek, który zilustrowano na rys. 10.2, przedstawiającym tarcze przenoszącą obciążenia zewnętrzne $q(x, y)$ i utwierdzoną na części brzegu.

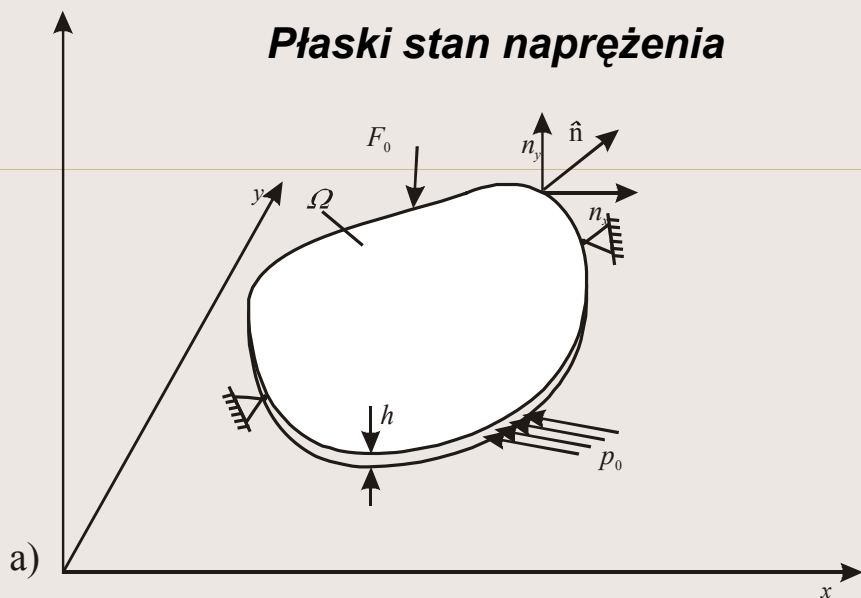


Rys.10.2

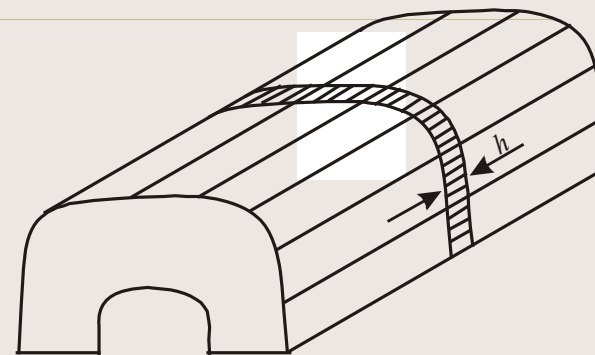
Podstawowe równania teorii sprężystości przedstawiają się następująco: >>>

Plaskie zadania teorii sprężystości

Plaski stan naprężenia



Plaski stan odkształcenia



$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_z \neq 0$, ponieważ

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right]$$

A. Lokalne warunki równowagi

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X\rho = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y\rho = 0$$

(10.27)

B. Związki geometryczne

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10.28)$$

lub

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (10.29)$$

C. Związki fizyczne

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (10.30)$$

lub

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (10.31)$$

Rozwiązanie płaskiego zadania brzegowego teorii sprężystości w naprężeniach opiera się na warunkach równowagi wewnętrznej (10.27) oraz warunku nierozdzielności przemieszczeń (10.29) wyrażonym w naprężeniach. Aby otrzymać to trzecie równanie,

wprowadzimy zależność (10.30) do (10.29) po uwzględnieniu , że $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \right] = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \right]$$

Po wykonaniu różniczkowania i uporządkowaniu uzyskuje się:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (10.32)$$

Różniczkujemy pierwsze równanie (10.27) względem x, a drugie względem y, dodajemy stronami i wyliczamy, co następuje:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \rho \quad (10.33)$$

Po wstawieniu wzoru (10.33) do (10.32) i po prostych przekształceniach otrzymujemy
równanie Levy'ego:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \rho \quad (10.34)$$

Dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia, po analogicznych operacjach, równanie Levy'ego ma następującą postać:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{(1 - \nu)} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \rho \quad (10.35)$$

Jeśli siły masowe X, Y mają wartości stałe, równanie Levy'ego dla płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia jest identyczne

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (10.36)$$

Upoważnia nas to do zajmowania się wyłącznie przypadkiem płaskiego stanu naprężenia. Poszukiwane funkcje $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ muszą spełniać równania równowagi wewnętrznej (10.27), równanie Levy'ego (10.36) oraz następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} q_{nx} &= \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{yx} \cos(y, n) \\ q_{ny} &= \tau_{xy} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) \end{aligned} \quad (10.37)$$

Rozwiązanie płaskiego zadania teorii sprężystości można uprościć, wprowadzając **funkcję naprężeń Airy'ego** $\psi (x, y)$, za pomocą której można wyrazić składowe stanu naprężenia następująco:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + X\rho y - Y\rho x \quad (10.38)$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli X i Y mają wartości stałe, funkcje (10.38) spełniają warunki równowagi (10.27). Po wstawieniu zależności (10.38) do równania Levy'ego (10.36) i po prostych przekształceniach uzyskuje się **równanie biharmoniczne** ze względu na funkcję naprężeń:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (10.39)$$

czyli $\nabla^2 \nabla^2 \psi = \nabla^4 \psi = 0 \quad (10.40)$

gdzie: $\nabla^2 \nabla^2 = \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (10.41)$

Funkcja naprężeń $\psi(x, y)$ musi być tak dobrana, aby spełniała równanie biharmoniczne, a składowe stanu naprężenia przez nią wyrażone spełniały warunki brzegowe.

[Przykład 10.1 >>>](#)

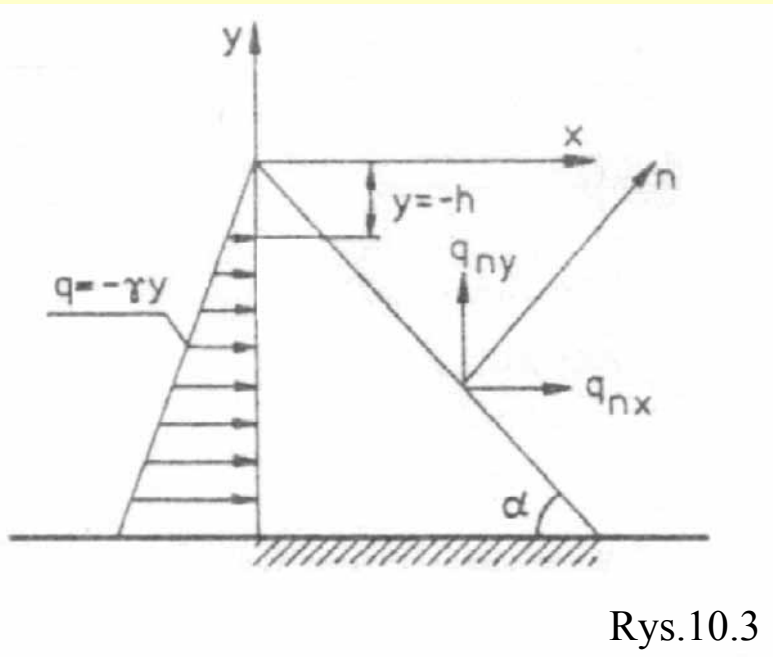
PRZYKŁAD 10.1

Płaska tarcza o grubości równej 1 jest zamocowana i obciążona w sposób pokazany na rys. 4. Dane: γ , p – ciężar jednostki objętości materiału tarczy, kąt α .

Poszukujemy rozwiązania w postaci wielomianu trzeciego stopnia

$$\psi(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad (10.42)$$

Funkcja ta może być funkcją naprężeń, ponieważ spełnia równanie biharmoniczne.



Składowe stanu naprężenia wyrażają następująco:

$$\sigma_x = 2cx + 6dy$$

$$\sigma_y = 6ax + 2by \quad (10.43)$$

$$\tau_{xy} = -2bx - 2cy + px$$

Stałe a, b, c, d oblicza się z warunków brzegowych.

[WARUNKI BRZEGOWE >>>](#)

WARUNKI BRZEGOWE:

- na ścianie pionowej

1. $x = 0, \quad \tau_{xy} = 0,$

2. $x = 0, \quad \sigma_x = -q = \gamma y$

- na ścianie pochyłej

3. $\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha, \quad q_{nx} = 0, \quad \sigma_x \cos(xn) + \tau_{xy} \cos(yn) = 0$

4. $\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha, \quad q_{ny} = 0, \quad \tau_{xy} \cos(xn) + \sigma_y \cos(yn) = 0$

gdzie:

$$\cos(xn) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos(yn) = \cos(\alpha)$$

Z warunku 1

$$-2cy = 0 \quad c = 0$$

Z warunku 2

$$6dy = \gamma y \quad d = \frac{1}{6}\gamma$$

Z warunku 3

$$6 \cdot \frac{1}{6} \gamma y \sin \alpha - (2b - p)x \cos \alpha = 0$$

$$\gamma \frac{y \sin \alpha}{x \cos \alpha} = 2b - p$$

$$-\gamma \operatorname{tg}^2 \alpha = 2b - p$$

$$b = -\frac{1}{2} \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{2} p$$

Z warunku 4

$$(x\gamma \operatorname{tg}^2 \alpha - px + px) \sin \alpha + (6ax - y\gamma \operatorname{tg}^2 \alpha + py) \cos \alpha = 0$$

$$\gamma \operatorname{tg}^3 \alpha + 6a - \frac{y}{x} \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha + p \frac{y}{x} = 0$$

$$\gamma \operatorname{tg}^3 \alpha + 6a + \gamma \operatorname{tg}^3 \alpha - p \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$a = \frac{1}{6} p \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{3} \gamma \operatorname{tg}^3 \alpha = 0$$

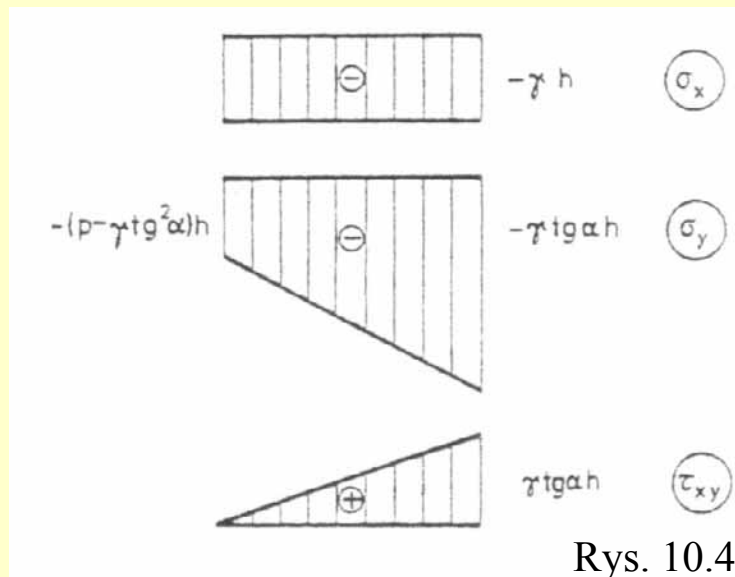
Po wstawieniu stałych a, b, c, d do formuł (10.43) otrzymuje się ostateczne rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \gamma y, \\ \sigma_y &= x(p - 2\gamma tg^2\alpha)tg\alpha + (p - \gamma tg^2\alpha)y = 0, \\ \tau_{xy} &= \gamma tg^2\alpha x\end{aligned}\tag{ 10.44 }$$

Po wstawieniu $y = -h = \text{const}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\gamma y \text{ - wartość stała} \\ \sigma_y &= x(p - 2\gamma tg^2\alpha)tg\alpha - (p - \gamma tg^2\alpha)h = 0 \text{ - funkcja liniowa } x \\ \tau_{xy} &= x\gamma tg^2\alpha \text{ - funkcja liniowa } x\end{aligned}\tag{ 10.45 }$$

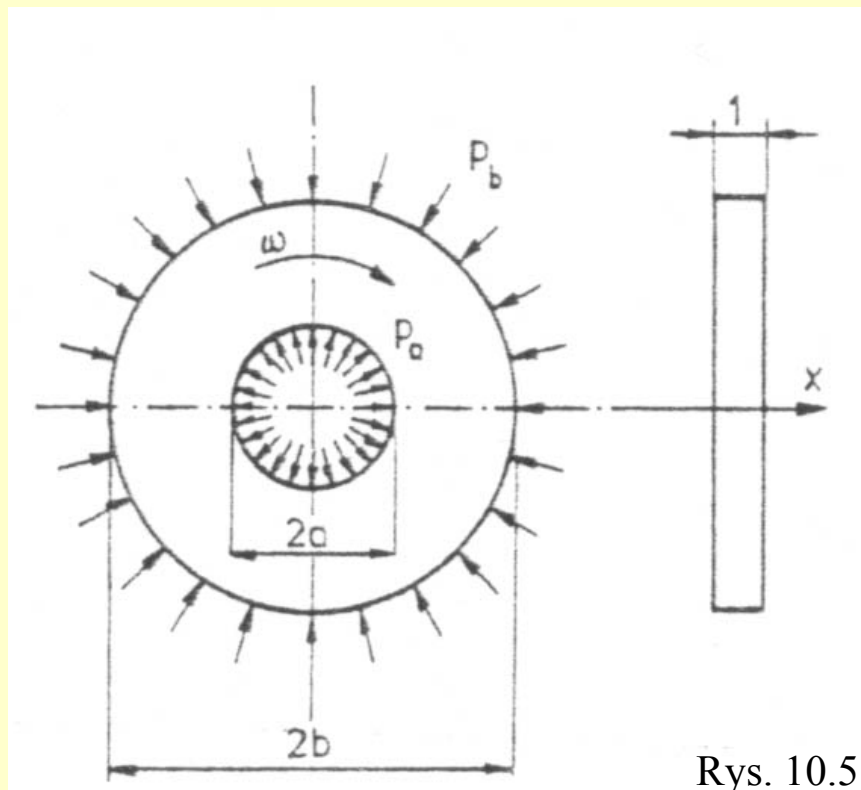
Opierając się na formułach (10.45), można sporządzić wykresy składowych stanu naprężenia dla $h = \text{const}$ (rys. 10.4)



Formuły (10.44) są błędne w pobliżu miejsca utwierdzenia, ponieważ nie są tam spełnione warunki brzegowe.

ROZWIĄZANIE PŁASKIEGO OSIOWOSYMETRYCZNEGO ZADANIA BRZEGOWEGO TEORII SPRĘŻYSTOŚCI W PRZEMIESZCZENIACH.

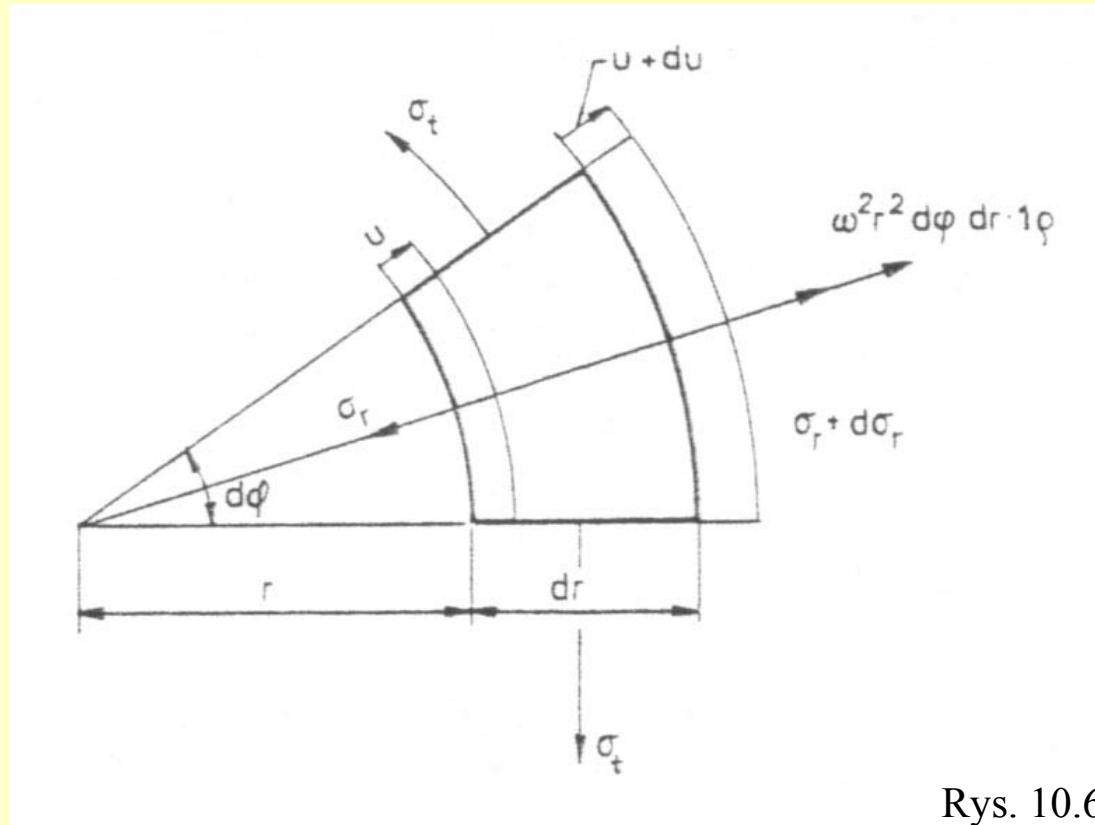
Pierścień o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b oraz grubości 1 wykonany jest z materiału o znanych stałych sprężystych ν , E oraz gęstości ρ . Na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej pierścienia, który wiruje ze stałą prędkością kątową ω , działa promieniowe obciążenie powierzchniowe p_a i p_b (rys. 10.5)



Rys. 10.5

Tak sformułowane **płaskie osiowosymetryczne**, dynamiczne zadanie brzegowe teorii sprężystości wygodniej będzie rozwiązywać w biegunowym układzie współrzędnych. Wymaga to wyprowadzenia odpowiednich podstawowych równań teorii sprężystości.

Wytniemy z rozważanego krążka segment ograniczony dwiema powierzchniami walcowymi o promieniu r i $r + dr$ oraz dwoma płaszczyznami przechodzącymi przez oś obrotu, które tworzą kąt dwuścienny $d\varphi$ (rys. 10.6)



Rys. 10.6

Ze względu na symetrię, w dowolnej płaszczyźnie przechodzącej przez oś obrotu naprężenie styczne musi być równe zero, a więc jest to płaszczyzna główna stanu naprężenia. Występuje w niej naprężenie σ_t zwane **obwodowym**. Na powierzchniach walcowych występują zatem również tylko naprężenia normalne, zwane **promieniowymi**, równe odpowiednio σ_r oraz $\sigma_r + d\sigma_r$. Obydwa naprężenia główne σ_t i σ_r zależą wyłącznie od promienia r .

Zgodnie z zasadą d' Alemberta, przyłożymy do segmentu siłę bezwładności równą iloczynowi masy $r d\varphi \rho r$ i przyspieszenia dośrodkowego $\omega^2 r$, zwróconą od środka na zewnątrz. Segment obciążony siłami powierzchniowymi oraz siłą bezwładności pozostaje w równowadze, a więc suma rzutów tych sił na symetryczny kierunek promieniowy musi być równa zero:

$$\omega^2 r^2 \rho dr d\varphi + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\varphi - \sigma_r r d\varphi - 2\sigma_t dr \sin \frac{d\varphi}{2} = 0$$

Po uwzględnieniu, że $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$ oraz odrzuceniu małych wyższego rzędu otrzymujemy

równanie równowagi wewnętrznej A:

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} r - \sigma_t = -\rho \omega^2 r^2 \quad (10.46)$$

Ze względu na osiową symetrię dowolny punkt tarczy dozna przemieszczenia u w kierunku promieniowym. Ponieważ u jest funkcją r , więc dwa punkty odległe od siebie o dr przemieszczą się odpowiednio o u i $u + du$. Wynikają z tego następujące związki geometryczne B:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_t = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \quad (10.47)$$

Odształcenie promieniowe ε_r i obwodowe ε_t zależy tylko od r . Są to odształcenia główne.

Po wyrugowaniu przemieszczenia u z zależności (10.47) otrzymamy warunek nierozdzielności odkształceń:

$$u = \varepsilon_t r, \quad \frac{du}{dr} = \varepsilon_t + \frac{d\varepsilon_t}{dr} r, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_t + \frac{d\varepsilon_t}{dr} r_t \quad (10.48)$$

Związki fizyczne C będą miały następującą postać:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu \sigma_t] \quad (10.49)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu \sigma_r]$$

lub

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t] \quad (10.50)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r]$$

Poszukujemy zatem pięciu funkcji $\sigma_r(r)$, $\sigma_t(r)$, $\varepsilon_r(r)$, $\varepsilon_t(r)$ i $u(r)$, które spełniają równania A, B, C oraz warunki brzegowe.

Rozwiązanie płaskiego osiowosymetrycznego, dynamicznego zadania teorii sprężystości w przemieszczeniach będzie polegało na znalezieniu w pierwszej kolejności $\mathbf{u}(\mathbf{r})$.

Wstawiamy związki geometryczne (10.47) do prawa Hooke'a (10.50)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right] \quad (10.51)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right]$$

Składowe stanu naprężenia wyrażone przez przemieszczenie zależnością (10.51) wprowadzamy do równania równowagi lokalnej (10.46)

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} r \frac{d}{dr} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right] - \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right] = -\rho\omega^2 r^2$$

Po obustronnym pomnożeniu przez $\frac{1-\nu^2}{E}$ i wykonaniu różniczkowania otrzymamy:

$$\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} + \frac{d^2u}{dr^2} r + \nu \frac{du}{dr} - \nu \frac{u}{r} - \frac{u}{r} - \nu \frac{du}{dr} = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 r^2$$

Po uproszczeniu i obustronnym podzieleniu przez r równanie równowagi lokalnej względem przemieszczenia u(r) będzie miało postać:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 r \quad (10.52)$$

Lewa strona równania (10.52) może być zapisana jeszcze krócej

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r \quad (10.53)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymamy:

$$u = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 \frac{r^3}{8} + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (10.54)$$

Stałe C_1 i C_2 należy wyliczyć z warunków brzegowych. Znajomość $u(r)$ umożliwia wyznaczenie na podstawie zależności (10.51) składowych stanu naprężenia: naprężenia promieniowego - $\sigma_r(r)$ i naprężenia obwodowego - $\sigma_t(r)$

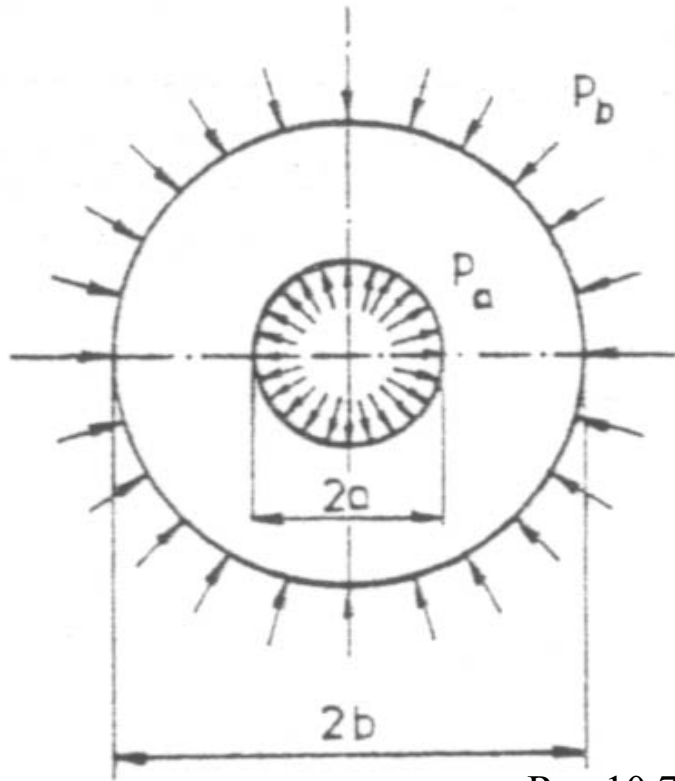
naprężenie promieniowe →

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\rho \omega^2}{8} (3+\nu) r^2$$

(10.55)

naprężenie obwodowe →

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\rho \omega^2}{8} (1+3\nu) r^2$$



Rys.10.7

W przypadku rury grubościennej (rys. 10.7) $\omega = 0$, a warunki brzegowe można sformułować następująco: dla $r = a$, $\sigma_r = -p_a$; dla $r = b$, $\sigma_r = -p_b$, czyli

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{a^2} \right] = -p_a$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{b^2} \right] = -p_b$$

Wyliczone z tych równań stałe wynoszą:

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}$$

$$C_2 = \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_a - p_b)$$

Po wstawieniu stałych C_1 i C_2 do zależności (10.55) oraz (10.54) otrzymujemy wzory na naprężenia i przemieszczenia w rurze:

NAPRĘŻENIA I PRZEMIESZCZENIA W RURZE GRUBOŚCIENNEJ

$$\sigma_t^r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \quad (10.56)$$

$$u = \frac{1 - \nu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \quad (10.57)$$

Warto zauważyć, że $\sigma_r + \sigma_t = 2 \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}$ nie zależy od r , a

więc $\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_t)$ jest wartością stałą. Innymi słowy, grubość

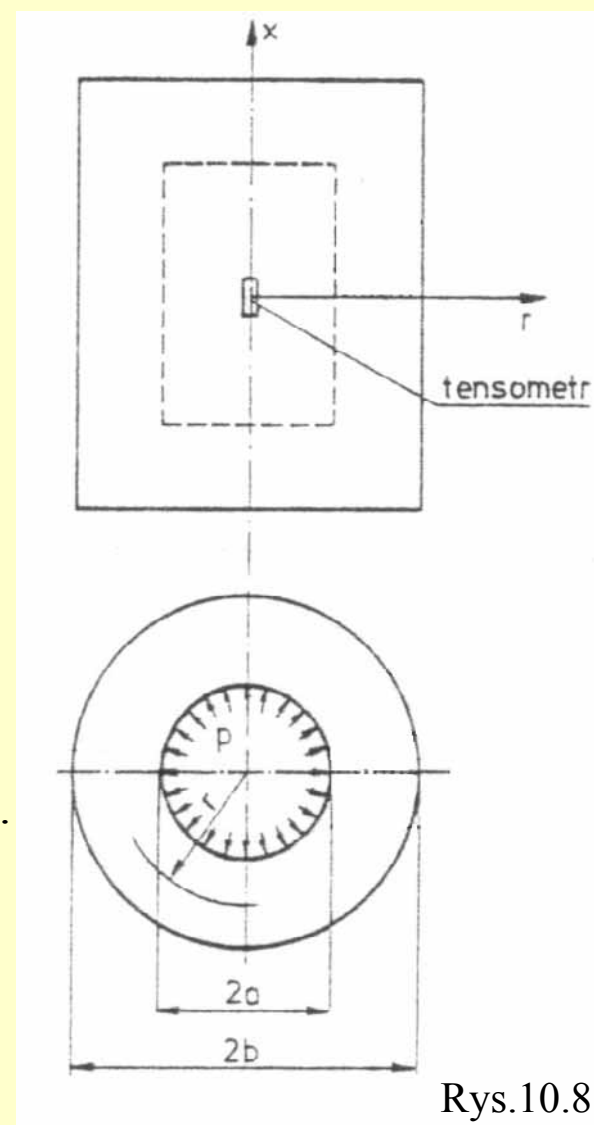
rozważanego krążka zmienia się we wszystkich jego miejscach jednakowo i dlatego rurę grubościenną można traktować jako zbiór płaskich tarcz.

[Przykład 10.2. >>>](#)

PRZYKŁAD 10.2

Zbiornik wysokociśnieniowy stanowi długa rura grubościenna (rys. 10.8) o wymiarach $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $l = 100 \text{ cm}$.

1. Wyznaczyć nadciśnienie p panujące wewnątrz zbiornika, jeśli wiadomo, że wywołuje ono na zewnątrz powierzchni cylindra odkształcenie względne w kierunku tworzącej $\varepsilon_x = 10^{-4}$. Moduł sprężystości $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, a współczynnik Poissona $\nu = 0,3$.
2. Narysować wykresy σ_r , σ_t , σ_x .
3. Obliczyć wg hipotezy maksymalnych naprężeń stycznych maksymalne naprężenie zredukowane w ścianach zbiornika.



[Rozwiązanie >>>](#)

[Naprężenia i przemieszczenie w krążkach wirujących >>>](#)

Stan naprężenia w rurze grubościennej z dnem jest określony następującymi wzorami:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (10.58)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (10.59)$$

$$\sigma_x = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p \quad (10.60)$$

To ostatnie wyrażenie otrzymuje się z warunku, że suma rzutów na oś x sił działających na część zbiornika, odcięta dowolną płaszczyzną prostopadłą do tej osi, musi być równa zero.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu \sigma_t]$$

naprężenie normalne w przekroju
prostopadłym do osi x.

$$\sigma_{x(r=b)} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p,$$

$$\sigma_{t(r=b)} = \frac{2a^2 p}{b^2 - a^2}$$

$$E\varepsilon_x = \frac{a^2 p - 2a^2 \nu p}{b^2 - a^2}$$

$$E\varepsilon_x (b^2 - a^2) = a^2 p (1 - 2\nu)$$

$$p = \frac{E\varepsilon_x (b^2 - a^2)}{a^2 (1 - 2\nu)} = 62,5 \text{ MPa}$$

nadciśnienie panujące wew. zbiornika

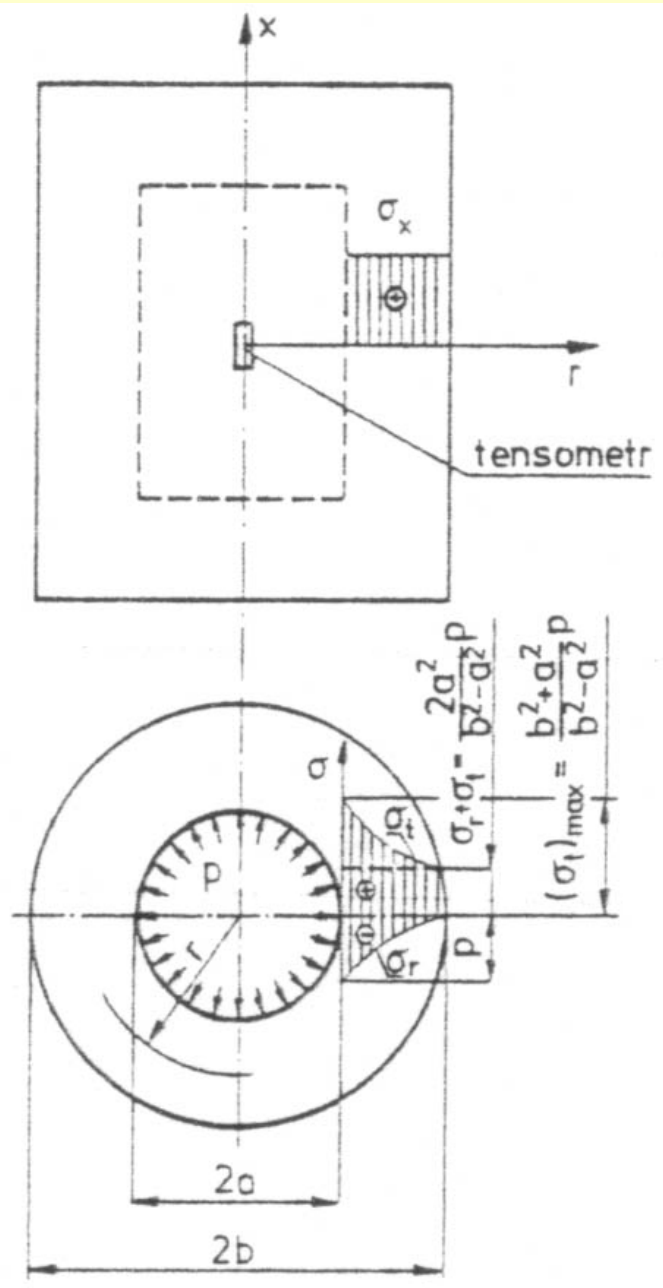
$$\sigma_{r(r=a)} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} = -p = -62,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t(r=a)} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \frac{(b^2 + a^2)}{a^2} = \frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} = 162,5 \text{ MPa}$$

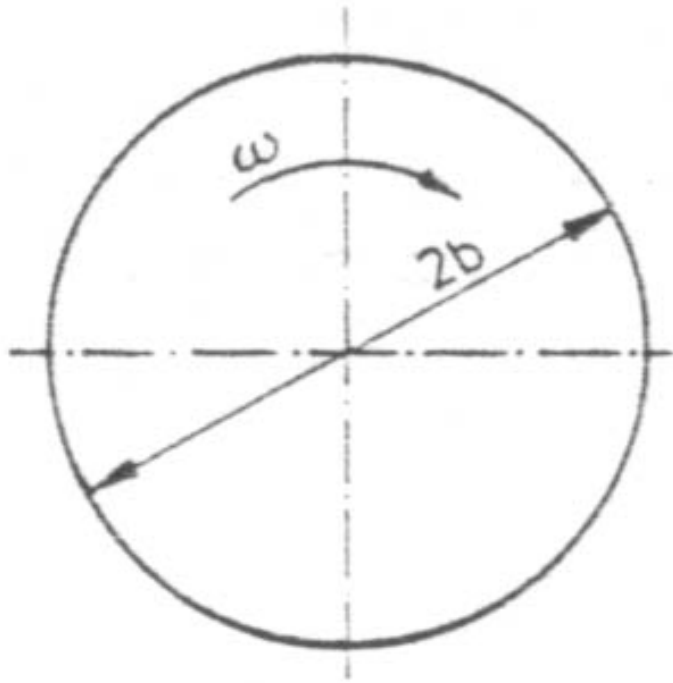
$$\sigma_x = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p = 50 \text{ MPa}$$

max. naprężenie zredukowane
w ścianach zbiornika

$$\sigma_{red} = \sigma_t - \sigma_r = 225 \text{ MPa}$$



[<<< powrót](#)



Rys. 10.9

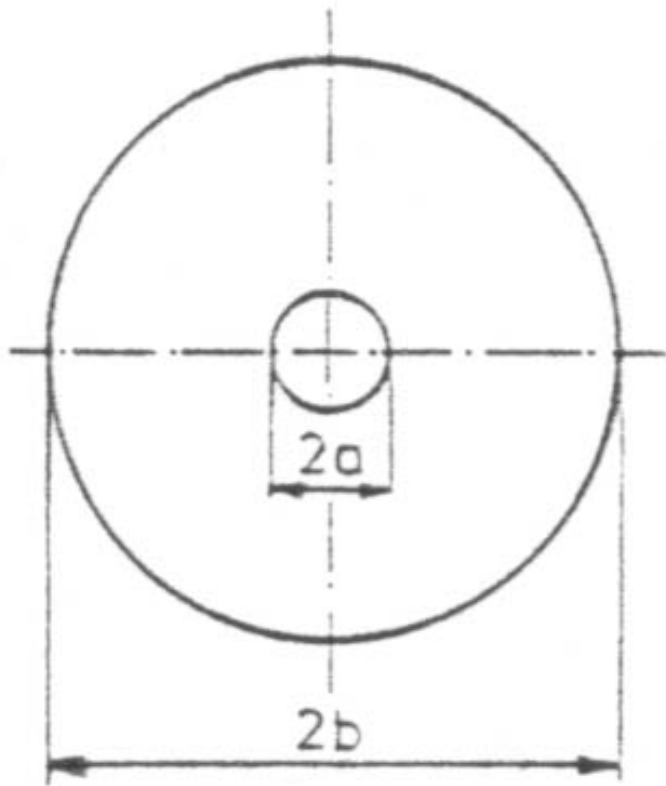
W przypadku krążka wirującego bez otworu (rys 10.9) $a = 0$, $p_a = 0$, $p_b = 0$, a warunki brzegowe sformułować można następująco: dla $r = 0$ $u = 0$, dla $r = b$ $\sigma_r = 0$. Pierwszy warunek brzegowy może być spełniony tylko wówczas, gdy $C_2 = 0$, w przeciwnym bowiem razie ostatni człon wyrażenia (10.54) będzie równy nieskończoności dla $r = 0$. Po wyliczeniu C_1 i wstawieniu stałych do wzorów (10.55) i (10.54) otrzymujemy :

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)(b^2 - r^2) \quad (10.61)$$

$$\sigma_t = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)\left(b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) \quad (10.62)$$

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\rho\omega^2 r}{8} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu}b^2 - r^2\right) \quad (10.63)$$

naprężenia i przemieszczenia
w krążkach wirujących



Rys.10.10

Jeśli krążek ma otwór (rys .10.10), warunki brzegowe są następujące: dla $r = a$ $\sigma_r = 0$ i dla $r = b$ $\sigma_r = 0$. Wzory na naprężenia i przemieszczenia przybierają wtedy formę:

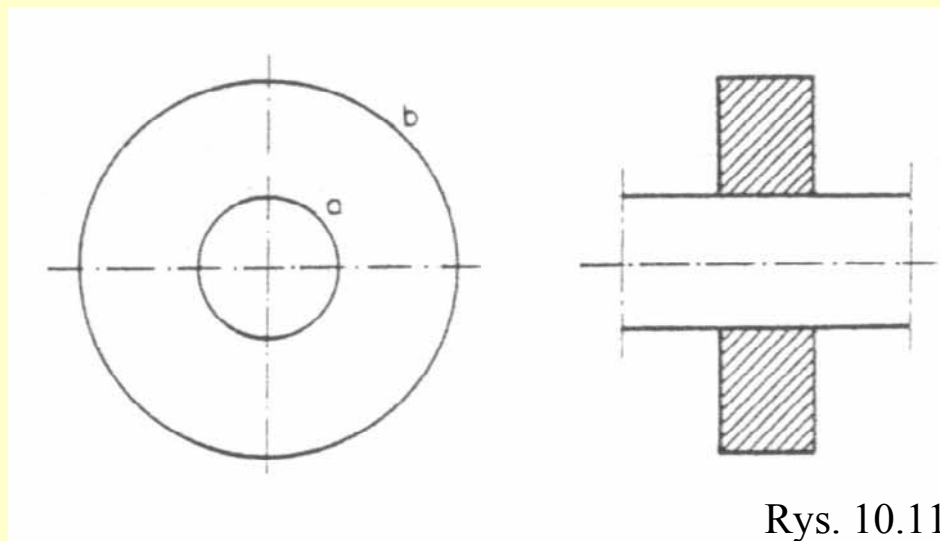
$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)\left(b^2 + a^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right) \quad (10.64)$$

$$\sigma_t = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)\left(b^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) \quad (10.65)$$

$$u = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8E}\left[-\frac{(1-\nu^2)r^3}{3+\nu} + (1-\nu)(b^2 + a^2)r + (1+\nu)\frac{a^2b^2}{r}\right] \quad (10.66)$$

PRZYKŁAD 10.3

Na stalowy wał jest nasadzony krążek o stałej grubości. Różnica promieni wału i otworu $\delta = 0,005$ mm (rys. 10.11). Obliczyć liczbę obrotów na minutę, przy której wzajemny nacisk wałka i krążka na powierzchni styku zmaleje do zera. Dane : $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,28$, $a = 5$ cm, $b = 40$ cm, $\rho = 800$ kg/m³.



Rys. 10.11

Wzajemny nacisk na powierzchni styku zmaleje do zera, jeśli różnica przemieszczeń punktów leżących na powierzchni otworu i na powierzchni wałka osiągnie wartość:

$$(u_k)_{r=a} - (u_w)_{r=a} = \delta \quad (10.67)$$

Wał traktujemy jako krążek bez otworu.

Dla wirującego nieobciążonego krążka o średnicy $2b$ z otworem o średnicy $2a$, przy $r = a$, otrzymamy:

$$u_k = \frac{(3 + \nu)\omega^2\rho}{8E} \left[(1 - \nu)(a^2 + b^2)a + (1 + \nu)\frac{a^2b^2}{a} - \frac{1 - \nu^2}{3 + \nu}a^3 \right] \quad (10.68)$$

Dla wirującego nieobciążonego krążka o średnicy $2a$ (w formule (10.63) oznaczone $2b$) bez otworu i $r = a$

$$u_w = \frac{(1 - \nu^2)a\omega^2\rho}{8E} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu}a^2 - a^2 \right) \quad (10.69)$$

Po wstawieniu zależności (10.68) i (10.69) do (10.67) otrzymuje się równanie, z którego można wyliczyć ω

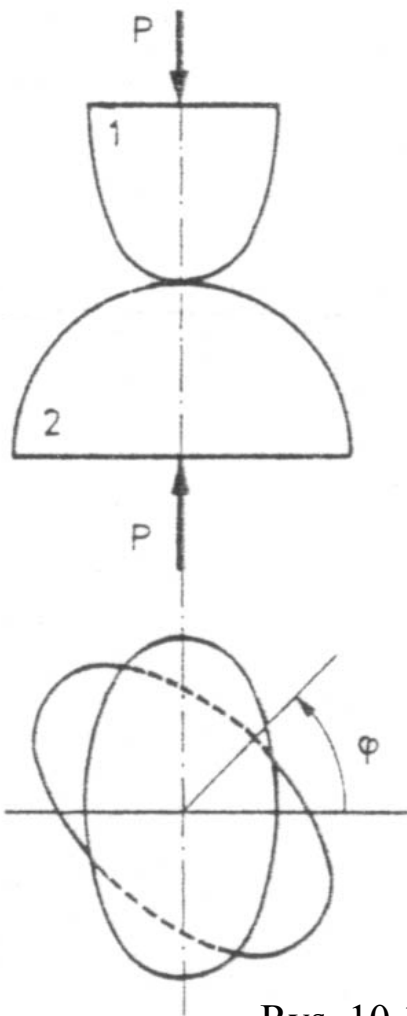
$$\frac{(3 + \nu)\omega^2\rho}{8E} \left[(1 - \nu)(a^2 + b^2)a + (1 + \nu)\frac{a^2b^2}{a} - \frac{1 - \nu^2}{3 + \nu}a^3 \right] - \frac{(1 - \nu^2)\omega^2\rho}{8E} a \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu}a^2 - a^2 \right) = \delta$$

czyli
$$\frac{(3 + \nu)\omega^2ab^2\rho}{4E} = \delta$$

stąd
$$\omega = \frac{2}{b} \sqrt{\frac{E\delta}{\rho(3 + \nu)a}} = 437 \text{ s}^{-1}$$

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = 4171 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$$

NAPRĘŻENIA KONTAKTOWE



Rys. 10.12

Teorię naprężeń stykowych, czyli kontaktowych opracował Hertz. Jest to zagadnienie geometrycznie nieliniowe. Na rysunku 10.12 pokazano dwa stykające się ciała. Mają one wspólną normalną, wspólną płaszczyznę styczną w punkcie styku i są wzajemnie dociskane siłami P . Dla ciała 1 min i max promień krzywizny wynosi r_1 i r_1' , a stałe sprężyste E_1 i ν_1 . Dla ciała 2 odpowiednie wielkości wynoszą r_2 i r_2' , a stałe sprężyste E_2 i ν_2 . Kąt między płaszczyznami największych krzywizn (czyli minimalnych promieni krzywizn, r_1 i r_2) jest równy φ .

Przyjmuje się następujące założenia:

1. Stykające się ciała są jednorodne, izotropowe i liniowosprężyste
2. Powierzchnie zewnętrzne ciał w otoczeniu punktu styku są gładkie o regularnej krzywiznie.
3. Odkształcenia ciał są niewielkie.
4. Powierzchnia styku w stosunku do powierzchni ciał jest mała.
5. Na powierzchni styku nie ma naprężeń stycznych, a jedynie normalne.

Po odkształceniu ciał spowodowanym ich wzajemnym dociśnięciem powstaje obszar styku w postaci elipsy o osiach a i b ($a > b$), które można obliczyć ze wzorów

$$a = \alpha^3 \sqrt[3]{P \frac{m}{n}} \quad (10.70)$$

$$b = \beta^3 \sqrt[3]{P \frac{m}{n}}$$

gdzie:

$$m = \frac{4}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'}}, \quad n = \frac{8}{3} \frac{E_1 E_2}{E_2(1 - \nu_1^2) + E_1(1 - \nu_2^2)}$$

przy czym α i β - współczynniki zależne od B/A , przy:

$$A = \frac{2}{m}, \quad B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right)\cos 2\varphi}$$

podane w [tablicy >>>](#)

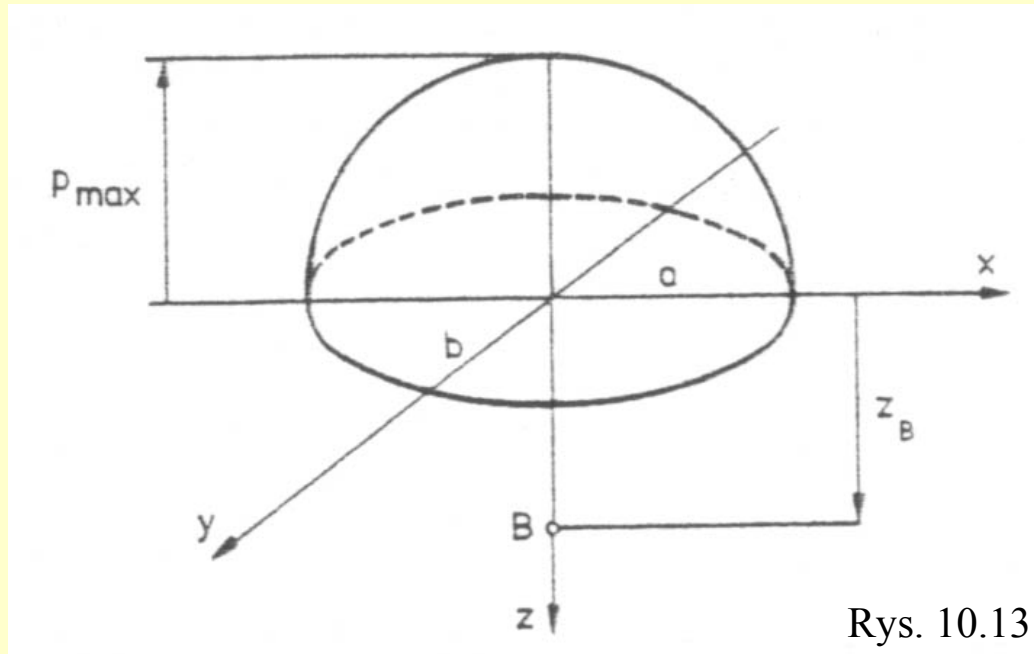
Tablica. Wartości α , β , B/A

B/A	α	β	B/A	α	β
0,0000	1,000	1,0000	0,8270	2,443	0,5247
0,0466	1,032	0,9696	0,8310	2,469	0,5217
0,1075	1,076	0,9318	0,8350	2,494	0,5186
0,1974	1,148	0,8791	0,8389	2,521	0,5155
0,2545	1,198	0,8472	0,8428	2,548	0,5124
0,3204	1,262	0,8114	0,8468	2,576	0,5093
0,3954	1,345	0,7717	0,8507	2,605	0,5061
0,4795	1,456	0,7218	0,8545	2,635	0,5029
0,5342	1,540	0,6992	0,8584	2,666	0,4996
0,5819	1,607	0,6791	0,8623	2,698	0,4963
0,6113	1,684	0,6580	0,8661	2,731	0,4930
0,6521	1,775	0,6359	0,8699	2,765	0,4897
0,6716	1,826	0,6245	0,8737	2,800	0,4863
0,6920	1,882	0,6127	0,8774	2,837	0,4828
0,7126	1,943	0,6006	0,8811	2,874	0,4794

B/A	α	β	B/A	α	β
0,7332	2,011	0,5881	0,8849	2,914	0,4759
0,7538	2,087	0,5752	0,8885	2,954	0,4723
0,7579	2,103	0,5726	0,8922	2,996	0,4687
0,7620	2,119	0,5699	0,8958	3,040	0,4650
0,7661	2,136	0,5672	0,8994	3,085	0,4613
0,7702	2,153	0,5646	0,9030	3,132	0,4576
0,7743	2,171	0,5618	0,9065	3,181	0,438
0,7784	2,189	0,5591	0,9100	3,233	0,4499
0,7825	2,207	0,5564	0,9134	3,286	0,4460
0,7866	2,226	0,5536	0,9269	3,526	0,4297
0,7907	2,245	0,5508	0,9428	3,899	0,4076
0,7948	2,265	0,5480	0,9458	3,986	0,4029
0,7988	2,286	0,5452	0,9488	4,079	0,3981
0,8029	2,306	0,5423	0,9517	4,178	0,3932
0,8069	2,328	0,5395	0,9574	4,395	0,3830
0,8110	2,350	0,5366	0,9705	5,091	0,3551
0,8150	2,372	0,5336	0,9818	6,159	0,3223
0,8190	2,395	0,5307	0,9909	8,062	0,2814
0,8230	2,419	0,5277	0,9937	12,789	0,2232

Rozkład nacisków powierzchniowych na obszarze styku jest elipsoidą (rys. 10.13) o następującym równaniu:

$$p(x, y) = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (10.71)$$



Wartość p_{max} największego ciśnienia na powierzchni styku dla $x = 0$ i $y = 0$ wynosi:

$$p_{max} = \frac{3P}{2\pi ab} \quad (10.72)$$

Jeśli elementy dociskane są walcami o osiach równoległych, obszar styku jest prostokątem o szerokości $2b$, przy czym:

$$b = \sqrt{\frac{4kr_1r_2}{\pi(r_1+r_2)} P'} \quad (10.73)$$

$$k = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

Siła docisku na jednostkę
długości wspólnej tworzącej

Rozkład nacisków na obszarze styku jest walcem o przekroju półeliptycznym, a p_{\max} wynosi:

$$p_{\max} = \frac{2P'}{\pi b} \quad (10.74)$$

Największe napężenie zredukowane występuje w tak zwanym **punkcie Bielajewa**, którego położenie na osi symetrii określa współrzędna z_B . Według hipotezy maksymalnych napężeń stycznych przy $\nu = 0,3$ dla kołowego obszaru styku (ściskania kul) $z_B/b = 0,481$ i $\sigma_{red}/p_{max} = 0,620$, natomiast dla prostokątnego obszaru styku (ściskania walców) $z_B/b = 0,780$ i $\sigma_{red}/p_{max} = 0,608$. Według hipotezy energii odkształcenia postaciowego wielkości te zmieniają się odpowiednio w przedziale od $z_B/b = 0,481$ i $\sigma_{red}/p_{max} = 0,620$ do $z_B/b = 0,697$ i $\sigma_{red}/p_{max} = 0,567$. Wartości napężenia zredukowanego w punkcie Bielajewa przekraczają często R_e , a nawet R_m . Materiał wytrzymuje to, ponieważ panuje tam stan napężenia bliski przestrzennemu równomiernemu ściskaniu (dla takiego stanu napężenia obydwie hipotezy tracą sens).

Kryterium nacisku powierzchniowego można sformułować następująco:

$$p_{max} \leq k_{dH} \quad (10.75)$$

Wartości jednostkowe nacisku dopuszczalnego k_{dH} są znaczne, np. dla stali StOS wynoszą 440 MPa, a dla stali 18G2 nawet 880 MPa, ponieważ stany napężenia w obszarze styku są bliskie równomiernemu przestrzennemu ściskaniu.

LITERATURA

Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*. WNT, Warszawa 2000