Katedra Wytrzymałości Materiałów
i Metod Komputerowych Mechaniki

Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska

LABORATORIUM
WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Doświadczalne sprawdzenie twierdzeń Bettiego i Maxwella

1. CEL ĆWICZENIA

- Zaznajomienie się z teorią układów liniowosprężystych.
- Doświadczalne wyznaczenie macierzy podatności i potwierdzenie jej symetryczności.
- Doświadczalne sprawdzenie twierdzenia Bettiego o wzajemności prac.
- Doświadczalne sprawdzenie twierdzenia Maxwella o wzajemności pomieszczeń.

2. WPROWADZENIE

Układy liniowosprężyste (układy Clapeyrona) stanowią idealizację układów rzeczywistych, jednak w wielu praktycznych przypadkach takie przybliżenie daje wystarczająco dokładne rezultaty. Większość materiałów konstrukcyjnych (stal i większość metali, niektóre tworzywa) w zakresie obciążeń eksploatacyjnych zachowuje się jak ciało liniowosprężyste i może być modelowana układem Clapeyrona. Liniowa zależność przemieszczeń od obciążeń pozwala sformułować i udowodnić wiele twierdzeń i zasad, które wykorzystuje się do rozwiązywania licznych zagadnień teorii sprężystości.

Zasada wzajemności prac Bettiego i zasada wzajemności przemieszczeń Maxwella należą do podstawowych twierdzeń teorii sprężystości. Z zasady wzajemności prac korzysta się przy wyprowadzeniach wielu skomplikowanych twierdzeń nie tylko w teorii sprężystości. Doświadczalne sprawdzenie tej zasady można zrealizować w prosty sposób przy jednoczesnej obserwacji podstawowych zależności występujących w układach liniowosprężystych.

3. PODSTAWY TEORETYCZNE

3.1 Układy liniowosprężyste

Układ nazywamy *układem liniowosprężystym* (układem Clapeyrona), jeżeli przemieszczenie Δ dowolnego punktu układu wywołane zrównoważonym działaniem sił zewnętrznych P_1, P_2, ..., P_n można wyrazić jako liniową funkcję tych sił:

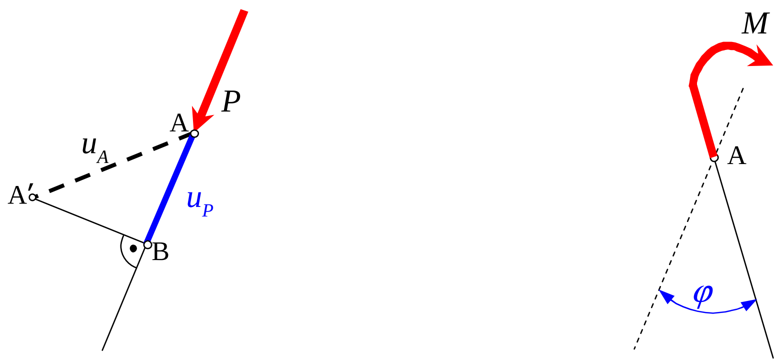
$$\Delta = \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \ ... + \delta_n P_n, \tag{1}$$

gdzie: δ_1, δ_2, ..., δ_n - liczby wpływowe przemieszczeń sprężystych.

Liczby wpływowe określają wpływ, jaki wywiera odpowiednia siła na przemieszczenie sprężyste Δ. Wartości ich są zależne od kształtu i rozmiarów układu, od miejsca działania sił oraz od własności sprężystych materiału, lecz nie zależą od wartości sił.

Mówiąc o sile, wprowadzimy tutaj termin „*siła uogólniona*” – jest to, oprócz siły skupionej, także siła rozłożona powierzchniowo, liniowo w sposób ciągły lub para sił określana jako moment. Jest to więc siła lub grupa sił określająca wyczerpująco obciążenie ciała pozostającego w równowadze.

Przemieszczenia odpowiadające sile skupionej P oraz parze sił o momencie M są przedstawione na rys. 1.



a) b)

Rys. 1. Przemieszczenie odpowiadające: a) sile skupionej P; b) momentowi M

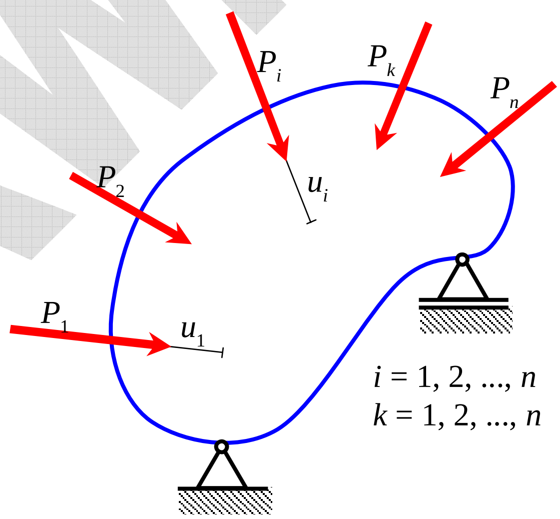
Jeżeli punkt A przyłożenia siły P (rys. 1a) przesunął się (pod wpływem działania wszystkich sił w układzie) w nowe położenie A′, to do obliczenia pracy tej siły należy jej wartość pomnożyć przez u_P, tj. rzut całkowitego przemieszczenia (u_A) na kierunek działania siły. Rzut ten (u_P) nazywa się *przemieszczeniem odpowiadającym sile skupionej P*.

Jeżeli siłą uogólnioną jest para sił o momencie M, to uogólnionym odpowiadającym przemieszczeniem jest obrót punktu przyłożenia momentu M o kąt φ względem osi o kierunku wektora momentu (rys. 1b).

Układ rzeczywisty można uważać za liniowosprężysty, jeżeli spełnione są następujące warunki:

a) materiał jest liniowosprężysty;
b) układ jest w równowadze;
c) brak jest tarcia (lub pomijalnie małe) na powierzchniach styku wzajemnie ruchomych części układu;
d) przemieszczenia są na tyle małe, że nie wpływają w sposób istotny na skutki działania sił.

Najczęściej interesują nas przemieszczenia odpowiadające określonym siłom (rys. 2).



Rys. 2. Ciało liniowosprężyste i przemieszczenia odpowiadające danym siłom skupionym

Przemieszczenie u_i dowolnego punktu można wyrazić w następujący sposób:

$$\begin{gathered} u_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \ldots + \delta_{1k}P_k + \ldots + \delta_{1n}P_n \\ u_2 = \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \ldots + \delta_{2k}P_k + \ldots + \delta_{2n}P_n \\ \ldots \\ u_i = \delta_{i1}P_1 + \delta_{i2}P_2 + \ldots + \delta_{ik}P_k + \ldots + \delta_{in}P_n \\ \ldots \\ u_n = \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \ldots + \delta_{nk}P_k + \ldots + \delta_{nn}P_n \end{gathered} \tag{2}$$

Ogólnie:

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} P_k \tag{3}$$

lub stosując zapis skrócony:

$$u_i = \delta_{ik} P_k \tag{4}$$

W tym przypadku pierwszy indeks przy liczbie wpływowej odnosi się do przemieszczenia, drugi zaś do siły powodującej to przemieszczenie.

Liczby wpływowe δ można uważać za przemieszczenie wywołane odpowiednimi siłami o wartości jeden:

$$\delta = \frac{\text{uogólnione przemieszczenie}}{\text{uogólniona siła}}$$

Pisząc zależności (2) dla wszystkich wybranych przemieszczeń otrzymamy układ równań, który może być przedstawiony w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{DP}, \tag{5}$$

gdzie: $\boldsymbol{U} = \{u_i\}$ – jednokolumnowa macierz przemieszczeń,
$\boldsymbol{P} = \{P_k\}$ – jednokolumnowa macierz sił,
$\boldsymbol{D} = \{\delta_{ik}\}$ – macierz podatności układu.

Liniową zależność między obciążeniem a przemieszczeniem można ująć inaczej, jeżeli za zmienne niezależne przyjmiemy przemieszczenia:

$$P_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k \tag{6}$$

Zależność między siłami i przemieszczeniami zapisana w postaci macierzowej ma formę:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{AU}, \tag{7}$$

gdzie: $\boldsymbol{A} = \{a_{ik}\} = \boldsymbol{D}^{-1}$ – macierz sztywności układu.

Przemieszczenia i odkształcenia układu liniowosprężystego podlegają *prawu superpozycji*. Skutki działania kilku sił równe są sumie każdej z sił osobno działających. Końcowy efekt jest niezależny od kolejności obciążania.

3.2 Energia sprężysta układu Clapeyrona

Dla ciała sprężystego, pozostającego pod działaniem sił zewnętrznych, energia sprężysta jest równa pracy tych sił. W celu obliczenia pracy należy założyć, że praca obciążenia odbywa się quasi-statycznie.

Jeżeli zależność pomiędzy obciążeniem a odpowiadającym mu przemieszczeniem jest liniowa, wówczas praca jednej z sił obciążających P_i wyraża się zależnością:

$$L_i = \frac{1}{2} P_i u_i \tag{8}$$

Praca wszystkich sił obciążających wynosi więc:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P_i u_i \tag{9}$$

Energia sprężysta układu liniowosprężystego będącego w równowadze jest równa połowie sumy iloczynów sił zewnętrznych i odpowiadających im przemieszczeń.

W celu wyrażenia energii sprężystej przez siły korzystamy dodatkowo z zależności (3). Wówczas:

$$V = L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} P_k P_i \tag{10}$$

Energia sprężysta może być wyrażona jako jednorodna kwadratowa funkcja obciążeń. W celu wyrażenia energii sprężystej przez przemieszczenia korzystamy z zależności (6).Wówczas:

$$V = L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k u_i \tag{11}$$

Energia sprężysta jest więc również jednorodną kwadratową funkcją przemieszczeń.

Ponieważ energia sprężysta jest kwadratową funkcją obciążeń, to w zasadzie nie można stosować zasady superpozycji przy obliczaniu energii (praca kilku sił zewnętrznych nie jest równa sumie prac sił działających oddzielnie).

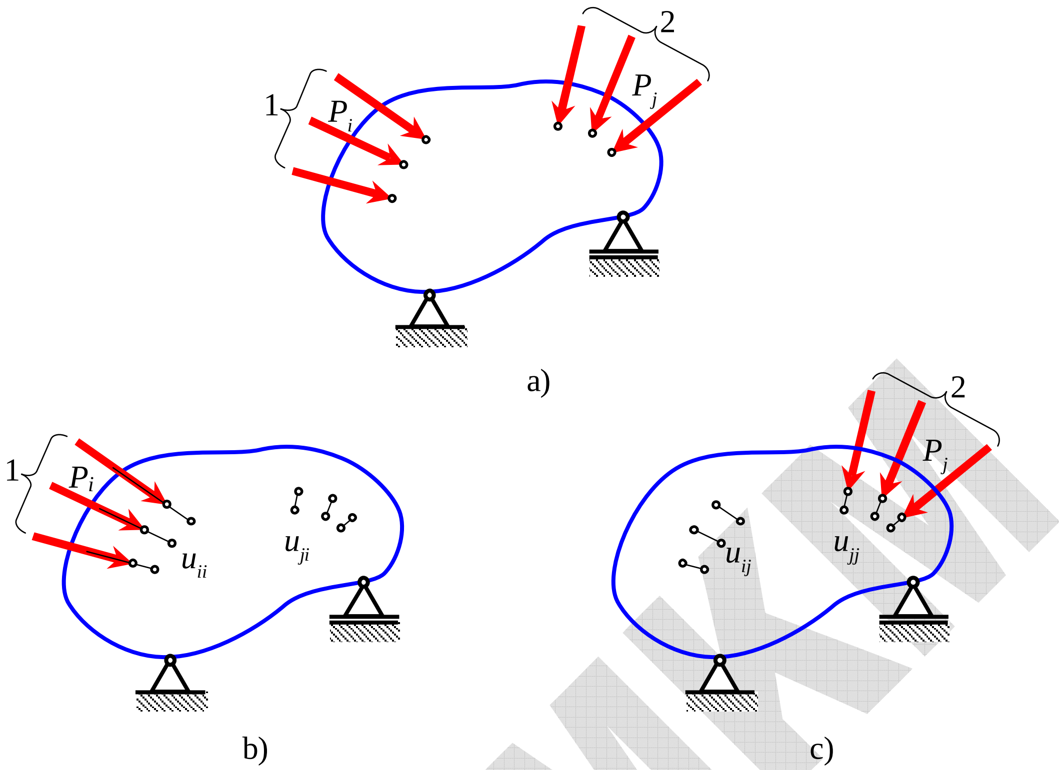
3.3 Twierdzenia o wzajemności prac i przemieszczeń

Rozpatrujemy układ liniowosprężysty, na który działają dwa układy sił, oznaczone kolejno numerami 1 i 2 (rys. 3a). Obciążenie układu realizuje się na dwa sposoby. W pierwszym przypadku do nieobciążonego układu jako pierwsze przykłada się obciążenie 1 (rys. 3b), następnie (już podczas działania sił 1) obciążenie 2. W drugim przypadku jako pierwsze przykładane jest obciążenie 2 (rys. 3c). Ponadto zakłada się, iż siły są przykładane na tyle wolno, iż ciało w każdej chwili obciążania znajduje się w stanie równowagi.

Obciążając układ jak w przypadku pierwszym na pracę wykonaną przez siły składają się: praca L_{11} sił układu 1 na przesunięciach ich punktów przyłożenia wywołanych siłami układu 1, praca L_{22} sił układu 2 na przesunięciach ich punktów przyłożenia wywołanych siłami układu 2 oraz praca L_{12} sił układu 1 na przemieszczeniach ich punktów przyłożenia, lecz wywołanych działaniem sił układu 2.

Analogicznie, obciążając układ jak w przypadku drugim, na pracę wykonaną przez siły składają się: praca L_{22} sił układu 2 na przesunięciach ich punktów przyłożenia wywołanych siłami układu 2, praca L_{11} sił układu 1 na przesunięciach ich punktów przyłożenia wywołanych siłami układu 1 oraz praca L_{21} sił układu 2 na przemieszczeniach ich punktów przyłożenia, lecz wywołanych działaniem sił układu 1.

W obydwu przypadkach po zakończeniu obciążania zmagazynowana w układzie energia sprężysta jest jednakowa, jednakowy jest również kształt odkształconego ciała.



Rys. 3. Ciało liniowosprężyste obciążone dwoma układami sił

Suma prac wykonanych przez siły 1 i 2 w pierwszym przypadku wynosi:

$$V = L_{11} + L_{22} + L_{12} \tag{12}$$

Zaś w drugim przypadku:

$$V = L_{11} + L_{22} + L_{21} \tag{13}$$

Po przyrównaniu prawych stron powyższych równań otrzymuje się:

$$L_{12} = L_{21} \tag{14}$$

Związek ten wyraża twierdzenie o wzajemności prac (**tw. Bettiego**):

Suma prac sił układu pierwszego (1) na odpowiadających im przemieszczeniach wywołanych siłami układu drugiego (2) jest równa sumie prac sił układu drugiego (2) na odpowiadających im przemieszczeniach wywołanych siłami układu pierwszego (1).

Gdy dodatkowo obciążenie stanowią tylko dwie pojedyncze siły P_1 i P_2, wówczas:

$$P_1 u_{12} = P_2 u_{21} \tag{15}$$

Jeżeli ponadto $P_1 = P_2$, wówczas:

$$u_{12} = u_{21} \tag{16}$$

Równanie powyższe wyraża twierdzenie o wzajemności przemieszczeń (**tw. Maxwella**):

Jeżeli na układ liniowosprężysty działają dwie równe co do modułu uogólnione siły, to przemieszczenie odpowiadające pierwszej, lecz wywołane przez drugą równe jest przemieszczeniu odpowiadającemu drugiej, lecz spowodowanemu pierwszą siłą.

Dla dwu dowolnych sił P_i i P_k można zapisać:

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \delta_{ik} P_k \\ u_{ki} &= \delta_{ki} P_i \end{aligned} \tag{17}$$

Podstawiając powyższe zależności do wzoru (14) otrzymujemy:

$$P_i P_k \delta_{ik} = P_k P_i \delta_{ki} \tag{18}$$

Wynika stąd, że:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \tag{19}$$

oraz analogicznie, wyrażając siły przez przemieszczenia:

$$a_{ik} = a_{ki} \tag{20}$$

Z powyższych równań wynika, że macierze podatności i sztywności są symetryczne.

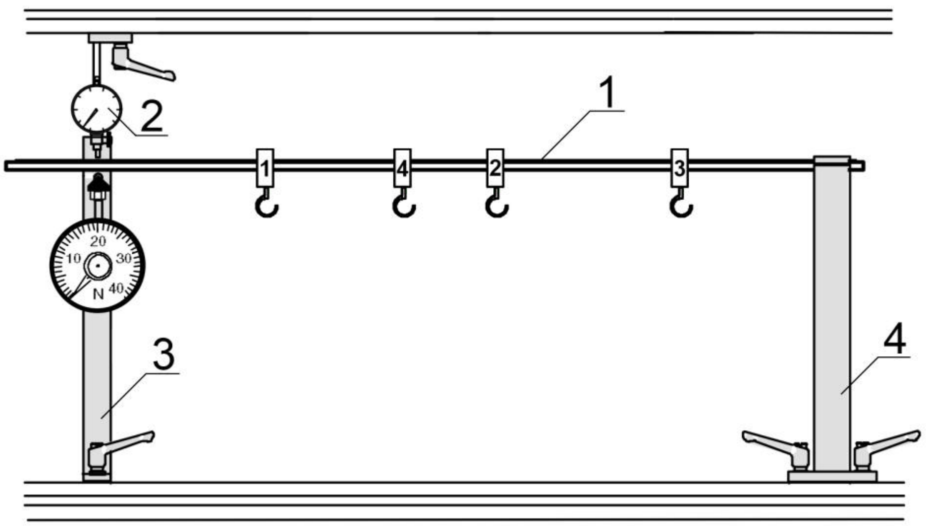
4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Ćwiczenie przeprowadzane jest z użyciem ramy przedstawionej na Rys. 4. Ma ona możliwość obciążania oraz pomiaru składowych pionowych przemieszczeń w różnych punktach.

W ramach ćwiczenia wykorzystane zostaną punkty oznaczone na Rys. 4 jako 1÷4. Pomiar przemieszczeń dokonywany jest za pomocą czujników zegarowych.

UWAGI:

1. Należy tak dobrać obciążenie i tak zamocować czujniki zegarowe, by nie został przekroczony zakres żadnego z czujników.
2. Podczas przeprowadzania doświadczenia należy każdorazowo dokonać kompensacji ugięcia podpory podatnej zgodnie z instrukcją w punkcie 4.1.
3. Wartość pojedynczej siły obciążającej nie może przekraczać 15 N ($P_{i\_max} \leq 15$ N).



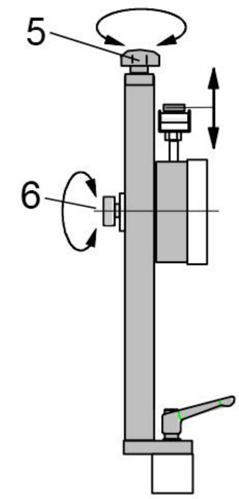
1 – belka
2 – czujnik zegarowy
3 – podpora
4 – utwierdzenie

Rys. 4. Schemat stanowiska pomiarowego

4.1 Kompensacja ugięcia podpory

Podpora (3) występująca w układzie nie jest sztywna – posiada możliwość ugięcia oraz pomiaru siły reakcji. Bezpośrednio nad podporą umieszczony jest czujnik zegarowy (2) służący do pomiaru ugięcia podpory. W celu uniknięcia błędów wynikających z przemieszczenia się podpory, należy przy każdym pomiarze przeprowadzić <u>kompensację ugięcia podpory</u>. W tym celu należy (Rys. 5):

1. Wyzerować czujnik zegarowy (2) znajdujący się nad podporą (3)
2. Obciążyć belkę.
3. Poluzować śrubę (6).
4. Regulować wysokość podpory z użyciem pokrętła (5) do momentu, w którym czujnik zegarowy (2) wskaże zero.
5. Dokręcić śrubę (6).
6. Odczytać wartości ugięć w pozostałych punktach pomiarowych.
7. Odciążyć belkę.
8. Poluzować śrubę (6).
9. Regulować wysokość podpory z użyciem pokrętła (5) do momentu, w którym czujnik zegarowy (2) wskaże zero.
10. Dokręcić śrubę (6).

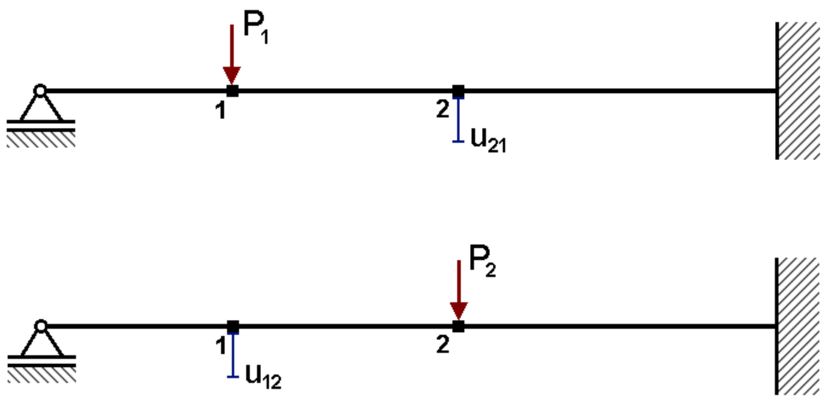


Rys. 5. Podpora podatna

4.2 Doświadczalna weryfikacja twierdzenia Maxwella (Rys. 6)

W celu doświadczalnego zweryfikowania twierdzenia Maxwella należy:

1. Przyjąć wartości równych co do modułu sił obciążających P_1 i P_2 ($P_1 = P_2$).
2. Obciążyć belkę siłą P_1 (Rys. 6a) i odczytać przemieszczenie u_{21} (przemieszczenie odpowiadające sile P_2, lecz spowodowane siłą P_1).
3. Obciążyć ramę siłą P_2 (Rys. 6b) i odczytać przemieszczenie u_{12} (przemieszczenie odpowiadające sile P_1, lecz spowodowane siłą P_2).
4. Wyniki zapisać w tab. 1.
5. Powtórzyć punkty 1÷4 dla innych wartości sił P_1 i P_2.



a)

b)

Rys. 6. Doświadczalna weryfikacja twierdzenia Maxwella

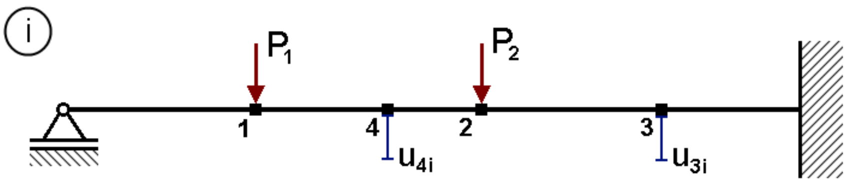
Tabela 1. Wyniki pomiarów dla weryfikacji twierdzenia Maxwella

Pomiar	1	2	3
Siła [N] ($P_1 = P_2$)			
u_{21} [mm]			
u_{12} [mm]			

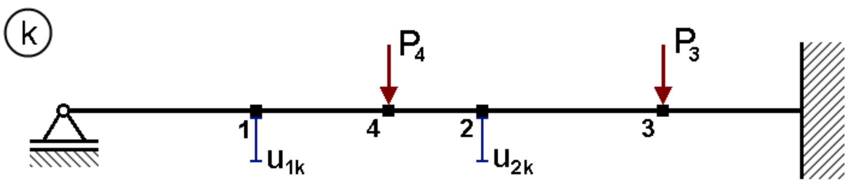
4.3 Doświadczalna weryfikacja twierdzenia Bettiego (Rys. 7)

W celu doświadczalnego zweryfikowania twierdzenia Maxwella należy:

1. Przyjąć dwa układy obciążeń: „*i*” (P_1 i P_2) oraz „*k*” (P_3 i P_4). Wskazane jest, by każda z czterech sił miała inną wartość.
2. Obciążyć belkę układem obciążeń „*i*” (Rys. 7a) i odczytać przemieszczenia u_{3i} oraz u_{4i} (przemieszczenia odpowiadające siłom P_3 i P_4, lecz spowodowane układem obciążeń „*i*”).
3. Obciążyć belkę układem obciążeń „*k*” (Rys. 7b) i odczytać przemieszczenia u_{1k} oraz u_{2k} (przemieszczenia odpowiadające siłom P_1 i P_2, lecz spowodowane układem obciążeń „*k*”).
4. Wyniki zapisać w tab. 2.



a)



b)

Rys. 7. Doświadczalna weryfikacja twierdzenia Bettiego

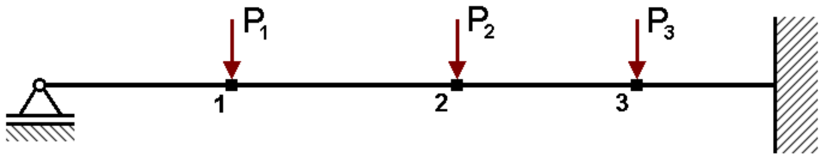
Tabela 2. Wyniki pomiarów dla weryfikacji twierdzenia Maxwella

Siły [N]	P_1		P_2		P_3		P_4	
Przemieszczenia [mm]	u_{3i}		u_{4i}		u_{1k}		u_{2k}	

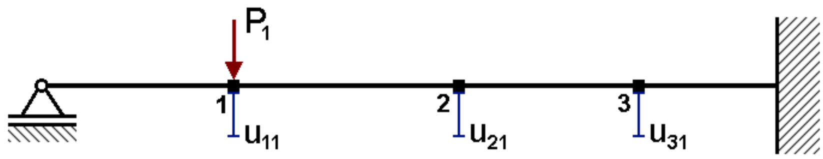
4.4 Wyznaczanie macierzy podatności (Rys. 8)

W celu doświadczalnego zweryfikowania symetrii macierzy podatności należy:

1. Przyjąć wartości równych co do modułu sił obciążających P_1, P_2 i P_3 ($P_1 = P_2 = P_3$).
2. Obciążyć belkę wyłącznie siłą P_1 (Rys. 8b) i odczytać przemieszczenia u_{11}, u_{21} i u_{31} (przemieszczenia odpowiadające siłom P_1, P_2 i P_3, lecz spowodowane siłą P_1).
3. Powtórzyć dwukrotnie punkt 2 obciążając belkę wyłącznie siłą P_2, a następnie wyłącznie siłą P_3, odczytując odpowiednie przemieszczenia.
4. Wyniki zapisać w tab. 3.



a)



b)

Rys. 8. Doświadczalna weryfikacja symetrii macierzy podatności

Tabela 3. Wyniki pomiarów dla weryfikacji symetrii macierzy podatności

Siła [N] ($P_1 = P_2 = P_3$)						
Przemieszczenia [mm]	u_{11}		u_{12}		u_{13}	
	u_{21}		u_{22}		u_{23}	
	u_{31}		u_{32}		u_{33}	

Należy zauważyć, że w ogólności (dla dowolnej wartości siły P) elementy tabeli 3 reprezentują macierz przemieszczeń a nie macierz podatności, którą należy dopiero wyznaczyć, korzystając z zależności (4).

5. OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTYCZNE DO SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać:

I. Cel ćwiczenia
II. Wstęp teoretyczny
III. Rysunek i opis stanowiska pomiarowego
IV. Wypełnione tabele
V. Część obliczeniową, w której należy:
   1. Przedstawić doświadczalną weryfikację twierdzenia Maxwella
   2. Przedstawić doświadczalną weryfikację twierdzenia Bettiego (sprawdzić, czy $P_1 u_{1k} + P_2 u_{2k} = P_3 u_{3i} + P_4 u_{4i}$)
   3. Wyznaczyć macierz podatności a na jej podstawie macierz sztywności i określić, czy macierze te są symetryczne
VI. Wnioski z ćwiczenia

6. PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Jakie układy nazywamy układami liniowosprężystymi (układami Clapeyrona)?
2. Energia sprężysta układów liniowosprężystych.
3. Podaj twierdzenie Bettiego.
4. Podaj twierdzenie Maxwella.
5. Jakie znasz inne twierdzenia dotyczące układów liniowosprężystych?
6. Co to jest macierz podatności i czym się charakteryzuje?

7. LITERATURA

1. Beluch W., Burczyński T., Fedeliński P., John A., Kokot G., Kuś W.: *Laboratorium z wytrzymałości materiałów*. Wyd. Politechniki Śląskiej, Skrypt nr 2285, Gliwice, 2002.
2. Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.
3. Brzoska Z.: *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1983.
4. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*, t. I-II, WNT, Warszawa 1996-97.
5. Instrukcja do stanowiska pomiarowego *WP950 Deformation of Straight Beams* firmy G.U.N.T