



**Katedra Wytrzymałości Materiałów
i Metod Komputerowych Mechaniki**

Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska

**LABORATORIUM
WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW**

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW PRĘTOWYCH

1. CEL ĆWICZENIA

- ♦ Zapoznanie się z metodą elementów skończonych w aspekcie zastosowania do rozwiązywania układów prętowych.
- ♦ Zapoznanie się z pakietem metody elementów skończonych (PROZC, KRATA, BELKA, RAMA2D, PRO-MES, ABC, PATRAN lub podobne) i jego obsługą w przypadku zagadnień prętowych.
- ♦ Wyznaczenie rozkładu przemieszczeń i naprężeń w ramach i kratownicach statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych.

2. WPROWADZENIE

Metoda elementów skończonych (MES) jest jedną z najczęściej stosowanych metod komputerowych (numerycznych) służących do rozwiązywania tzw. zagadnień brzegowych mechaniki. Istota metody sprowadza się do zastąpienia modelu ciągłego układu mechanicznego modelem dyskretnym. Model dyskretny przyjmuje w rezultacie postać układu równań algebraicznych.

W niniejszym rozdziale przedstawiono zastosowanie MES do rozwiązywania układów prętowych, w tym prętów rozciąganych (ściskanych), belek, kratownic i ram.

Podstawy teoretyczne metody elementów skończonych dla układów prętowych przedstawiono w literaturze zamieszczonej na końcu rozdziału. W niniejszym rozdziale przedstawiono metodę elementów skończonych wykorzystując koncepcję całki ważonej oraz tzw. sformułowanie słabe, które szczegółowo przedstawiono w [2]. Inne, alternatywne sformułowanie, równoważne niniejszemu, można wyprowadzić z warunku minimalizacji energii potencjalnej.

3. PODSTAWY TEORETYCZNE

3.1 Metoda elementów skończonych dla prętów rozciąganych (ściskanych) i kratownic

Rozważany jest pręt prosty o zmiennym przekroju $A(x)$ i długości L , wykonany z materiału o module Younga E , obciążony obciążeniem ciągłym $q(x)$ rozłożonym wzdłuż długości pręta i siłą Q_0 na końcu (rys. 1a, b).

Pole przemieszczeń osiowych spełnia następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x) = 0 \quad \text{dla } 0 < x < L, \quad (1)$$

które należy uzupełnić warunkami brzegowymi w postaci:

$$u(0) = u_0, \quad \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = Q_0, \quad (2)$$

gdzie:

$a = a(x) = A(x)E$ – sztywność na rozciąganie.

Aby rozwiązać równanie (1), tzn. znaleźć pole przemieszczeń $u(x)$ przy warunkach brzegowych (2), dzieli się obszar pręta $\Omega(x)$ na N odcinków o długości h_e , $e = 1, 2, \dots, N$, które nazywa się *elementami skończonymi* (rys. 1c).

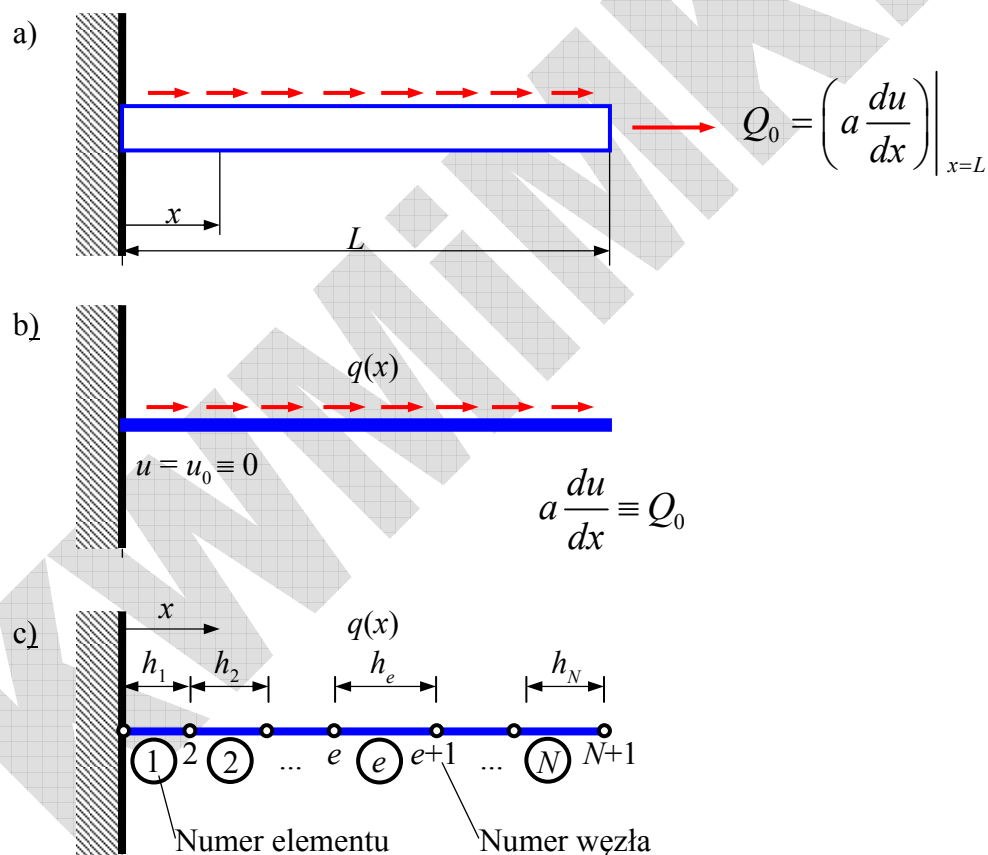
Rozważmy typowy element skończony $\Omega^e = (x_A, x_B) = (x_e, x_{e+1})$, którego końce mają współrzędne $x = x_A$ i $x = x_B$ (rys. 2a).

Oznaczmy przemieszczenia węzłowe u_i^e i siły normalne Q_i^e , $i = 1, 2$, zdefiniowane na rys. 2b. Poszukiwane pole przemieszczeń na elemencie Ω^e aproksymować będziemy za pomocą pewnego wielomianu potęgowego $u(x) \approx U^e = \sum_{j=1}^n u_j^e N_j(x)$, gdzie u_j^e są nieznanymi wartościami węzłowymi przemieszczeń, natomiast $N_j^e(x)$ są funkcjami interpolacyjnymi zwanymi także *funkcjami kształtu*.

Wówczas równanie różniczkowe (1) spełnione jest na elemencie Ω^e tylko w sposób przybliżony. W celu obliczenia nieznanymi wartości przemieszczeń węzłowych u_j^e żądamy, aby równanie różniczkowe (1) spełnione było przez przybliżenie U^e w sensie tzw. całki ważonej, która określona jest następująco:

$$\int_{x_A}^{x_B} w(x) \left[\frac{d}{dx} a \frac{du}{dx} + q \right] dx = 0, \quad (3)$$

gdzie $w(x)$ – tzw. *funkcja ważona*.



Rys. 1. a) Pręt rozciągany; b) idealizacja matematyczna;
c) dyskretyzacja elementami skończonymi

Całkując równanie (3) przez części otrzymuje się:

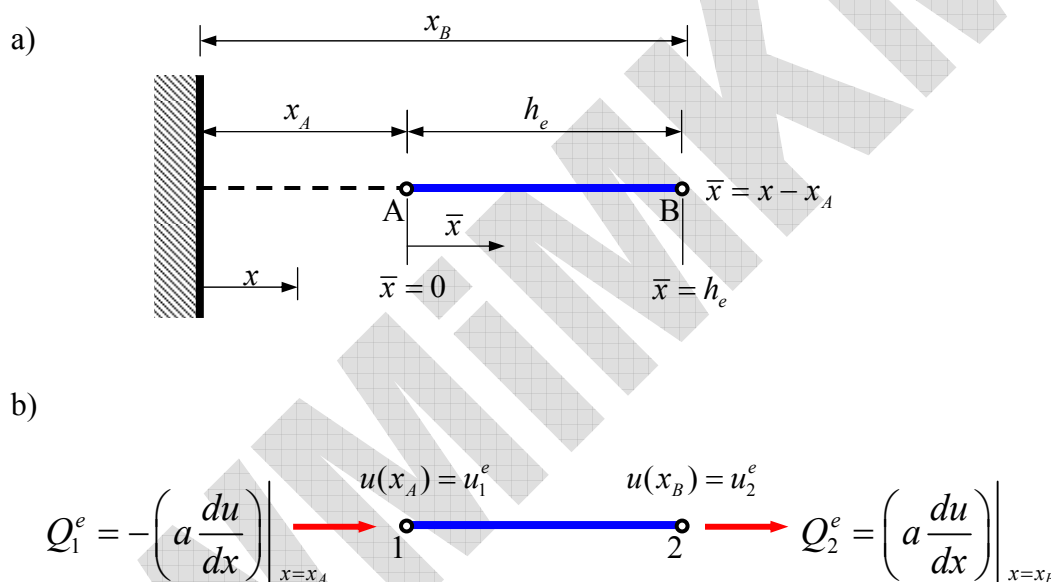
$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - w(x_A)Q_A - w(x_B)Q_B, \quad (4)$$

gdzie:

$$-Q_A = \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_A}, \quad -Q_B = \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_B} \quad (5)$$

są siłami normalnymi w węzłach elementu.

Równanie (4) nazywa się *sformułowaniem słabym* zagadnienia brzegowego opisanego równaniem różniczkowym (1) z warunkami brzegowymi (2). Termin „sformułowanie słabe” pochodzi od tego, że w równaniu (4) „słabsze” są wymagania dotyczące różniczkowości pola przemieszczeń $u(x)$.



Rys. 2. a) Typowy element skończony; b) definicja przemieszczeń i sił węzłowych

W równaniu różniczkowym (1) $u(x)$ musi być funkcją dwukrotnie różniczkowalną, natomiast w sformułowaniu słabym (4) wymaganie różniczkowości obniżone jest o jeden rząd i funkcja U^e , aproksymująca pole przemieszczeń $u(x)$ na elemencie skończonym Ω^e , może być funkcją liniową i przyjmuje postać:

$$U^e(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e = \sum_{j=1}^2 N_j^e(x)u_j^e, \quad (6)$$

gdzie funkcje kształtu (funkcje interpolacyjne) wyrażają się wzorami:

$$N_1^e(x) = \frac{x_B - x}{x_B - x_A}, \quad N_2^e(x) = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \quad (7)$$

W metodzie elementów skończonych podstawowe równania metody wyprowadzić można korzystając ze sformułowania słabego (4) przyjmując, że pole przemieszczeń aproksymowane jest przybliżeniem (6), a funkcja wagowa wyrażona jest przez funkcję kształtu, tzn. $w(x) = N_1^e(x)$ i $w(x) = N_2^e(x)$. Otrzymuje się wówczas dwa równania, które w postaci macierzowej przyjmują postać:

$$[K^e]\{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}; \quad (8)$$

gdzie:

$[K^e] = [K_{ij}^e]$ – kwadratowa macierz sztywności elementu zdefiniowana następująco:

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(a_e \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} \right) dx = \int_0^{h_e} \left(a_e \frac{dN_i^e}{d\bar{x}} \frac{dN_j^e}{d\bar{x}} \right) d\bar{x} \quad (9)$$

$\{f^e\} = \{f_i^e\}$ – macierz kolumnowa sił określona zależnością:

$$f_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} q_e N_i^e dx = \int_0^{h_e} q_e N_i^e d\bar{x} \quad (10)$$

oraz:

$$\sum_{j=1}^2 N_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e, \quad (11)$$

przy czym $h_e = x_B - x_A = x_{e+1} - x_e$ jest długością e -tego elementu skończonego.

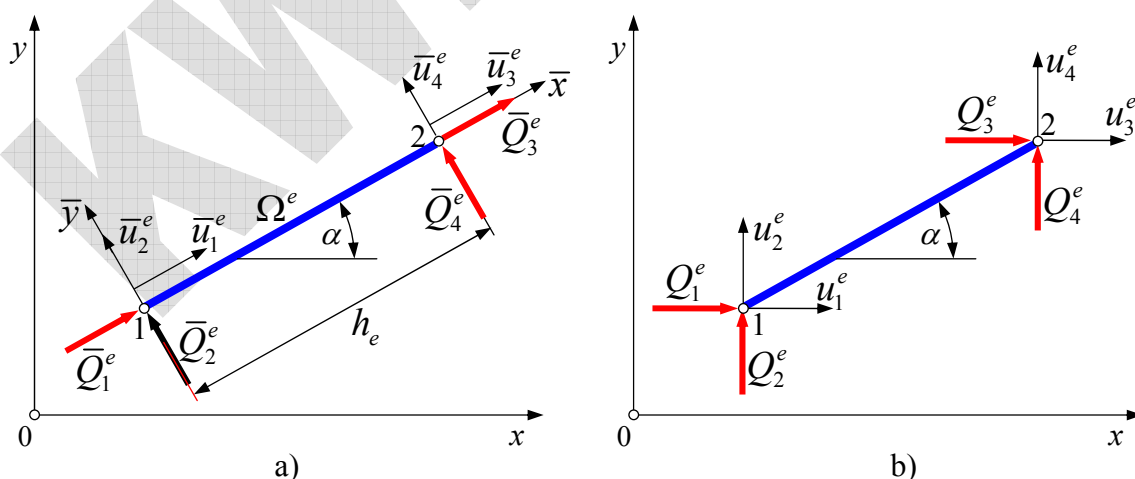
Macierze $[K^e]$ i $\{f^e\}$ dla liniowych funkcji kształtu (7) mają postać:

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\{f^e\} = \frac{q_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Macierz sztywności elementu (12) jest macierzą symetryczną. W równaniach (9), (10), (12) i (13) przyjęto, że a_e i q_e przyjmują stałe wartości na Ω^e .

W przypadku kratownicy (układu prętowego wykonanego z prętów połączonych przegubowo i przenoszących tylko rozciąganie bądź ściskanie) przemieszczenia węzłowe i siły węzłowe wygodnie jest przedstawić w każdym węźle za pomocą dwóch składowych w układzie lokalnym (rys. 3a) jak i globalnym (rys. 3b).



Rys. 3. Element skończony kratownicy:
a) w układzie lokalnym; b) w układzie globalnym

Zależność między przemieszczeniami węzłowymi i siłami węzłowymi w układzie lokalnym (rys. 3a) ma postać:

$$[\bar{K}^e]\{\bar{u}^e\} = \{\bar{Q}^e\} \quad (14)$$

Macierz sztywności elementu kratownicy w układzie lokalnym $[\bar{K}^e]$ jest wyrażona następująco:

$$[\bar{K}^e] = \frac{E_e A_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

gdzie:

$E_e A_e$ – sztywność na rozciąganie (ściskanie) e -tego elementu kratownicy;
 h_e – długość e -tego elementu kratownicy.

W układzie globalnym (rys. 3b) macierzowe równanie dla e -tego elementu ma postać:

$$[K^e] \{u^e\} = \{Q^e\}, \quad (16)$$

gdzie macierz sztywności elementu:

$$[K^e] = [T^e]^T [\bar{K}^e] [T^e] \quad (17)$$

Macierz transformacji $[T^e]$ ma postać:

$$[T^e] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (18)$$

Szczegółowy opis metody elementów skończonych dla pręta rozciąganego (ściskanego) i płaskiej kratownicy można znaleźć w pracy [2]. Edukacyjne programy MES do obydwu zagadnień (odpowiednio PROZC i KRATA) znajdują się na stronach internetowych:

<http://dydaktyka.polsl.pl/mes>.

3.2 Metoda elementów skończonych dla prętów zginanych i ram

Rozważany jest pręt prosty (belka) o zmiennej sztywności $b(x)=EI(x)$ (E – moduł Younga, I – moment bezwładności) i długości L , obciążony obciążeniem ciągłym o intensywności $q(x)$ oraz siłą F_0 i momentem M_0 na końcu (rys. 4a).

Pole przemieszczeń poprzecznych (ugięć) $v = v(x)$ spełnia równanie różniczkowe:

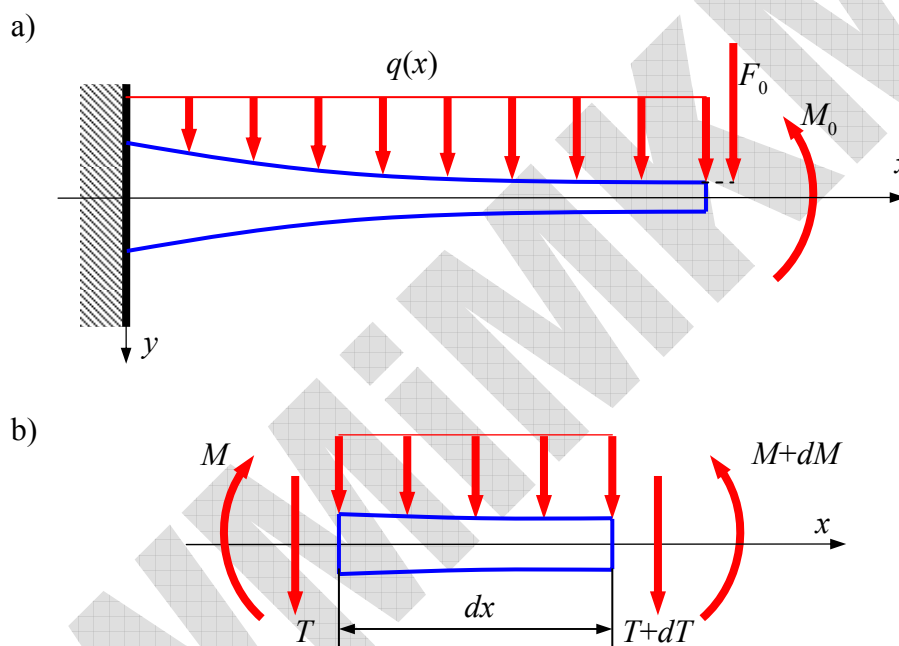
$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) = q(x) \quad \text{dla } 0 < x < L \quad (19)$$

Równanie (19) należy uzupełnić warunkami brzegowym:

$$\left. \begin{aligned} v(0) = v_0, & \quad \vartheta = \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = \vartheta_0 \\ -b \frac{d^2v}{dx^2} \Big|_{x=L} = M_0, & \quad -b \frac{d^3v}{dx^3} \Big|_{x=L} = F_0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Między momentami gnącymi M , siłami poprzecznymi T i obciążeniami ciągłymi $q(x)$ zachodzą następujące relacje (rys. 11.4b):

$$M = -b \frac{d^2v}{dx^2}, \quad T = \frac{dM}{dx}, \quad \frac{dT}{dx} = -q \quad (21)$$



Rys. 4. a) Belka zginana; b) siły wewnętrzne w belce

Aby rozwiązać równanie (19), tzn. znaleźć pole ugięć $v(x)$ przy warunkach brzegowych (20), dzielimy obszar pręta $\Omega(0, L)$ na N elementów skończonych (rys. 5a).

Rozważmy typowy element skończony $\Omega^e(x_e, x_{e+1})$ ze zdefiniowanymi na rys. 5b przemieszczeniami uogólnionymi (v, ϑ) i siłami uogólnionymi (T, M).

Dla przyjętych zwrotów przemieszczeń i sił uogólnionych wprowadzono następującą notację:

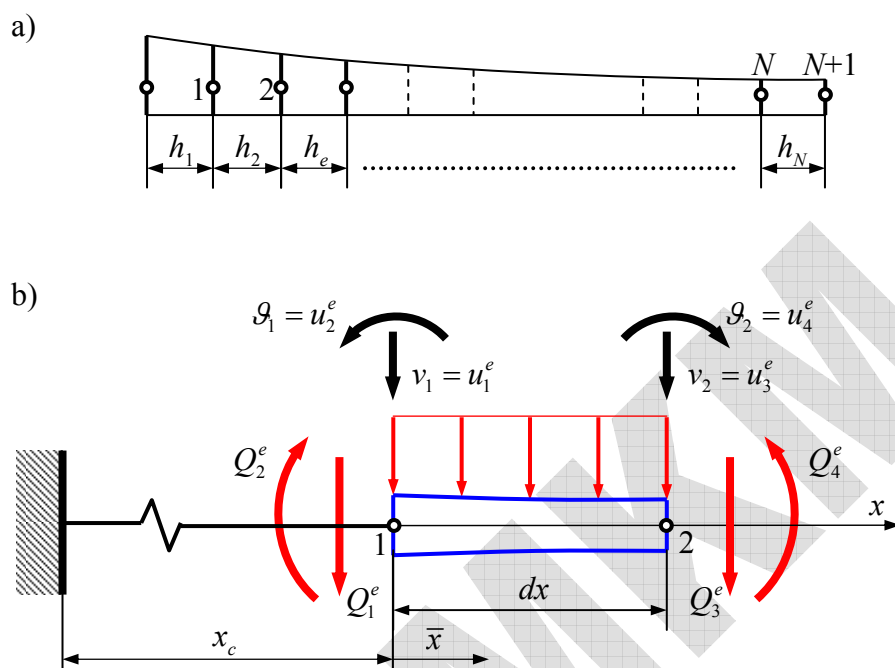
$$\vartheta = -\frac{dV}{dx} \quad (22)$$

oraz

$$\begin{aligned} Q_1^e &\equiv \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2v}{dx^2} \right) \right] \Big|_{x_{e+1}}, & Q_2^e &\equiv \left(b \frac{d^2v}{dx^2} \right) \Big|_{x_e} \\ Q_3^e &\equiv \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2v}{dx^2} \right) \right] \Big|_{x_{e+1}}, & Q_4^e &\equiv \left(b \frac{d^2v}{dx^2} \right) \Big|_{x_e} \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:

Q_1^e, Q_3^e – siły poprzeczne;
 Q_2^e, Q_4^e – momenty gnące.



Rys. 5 a) Podział belki na elementy skończone;
 b) definicja przemieszczeń i sił uogólnionych

Ugięcie $v(x)$ będzie aproksymowane na elemencie Ω^e za pomocą pewnego wielomianu $V^e(x)$. Wówczas równanie różniczkowe (19) spełnione jest na elemencie Ω^e w sposób przybliżony. Żądamy, aby równanie (19) spełnione było przez V^e w sensie całki ważonej:

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} w(x) \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - q \right] dx \quad (24)$$

gdzie: $w(x)$ – funkcja ważona.

Całkując (24) przez części otrzymujemy następujące sformułowanie słabe dla belki:

$$0 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - wq \right) dx - w(x_e) Q_1^e - \left(\frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x_e} Q_2^e - w(x_{e+1}) Q_3^e - \left(\frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x_{e+1}} Q_4^e \quad (25)$$

Warto zwrócić uwagę, że rząd różniczkowości funkcji ugięcia $v(x)$ został obniżony z rzędu czwartego do rzędu drugiego. Ponieważ całkowita liczba warunków dotyczących przemieszczeń uogólnionych dla elementu belkowego wynosi cztery (po dwa w każdym węźle), więc wygodnie jest przyjąć czteroparametrowy wielomian aproksymujący dla $v(x)$:

$$v(x) \approx V^e(x) = u_1^e N_1^e + u_2^e N_2^e + u_3^e N_3^e + u_4^e N_4^e = \sum_{j=1}^4 u_j^e N_j^e, \quad (26)$$

gdzie funkcje kształtu N_j^e mają postać:

$$N_1^e = 1 - 3\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^3, \quad N_2^e = -(x-x_e)\left(1 - \frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 \quad (27)$$

$$N_3^e = 3\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^3, \quad N_4^e = -(x-x_e)\left[\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 - \frac{x-x_e}{h_e}\right]$$

W metodzie elementów skończonych podstawowe równania metody wyprowadzamy ze sformułowania słabego (25) przyjmując przybliżenie (26) oraz zakładając, że funkcja ważona $w(x)$ wyrażona jest przez funkcje kształtu, tzn. $w = N_1^e$, $w = N_2^e$, $w = N_3^e$ i $w = N_4^e$.

Otrzymujemy wówczas cztery równania, które w postaci macierzowej mają postać :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

gdzie:

$[K^e]$ –macierz sztywności elementu belkowego, której elementy określone są następująco:

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d^2 N_i^e}{dx^2} \frac{d^2 N_j^e}{dx^2} dx \quad (29)$$

$\{F^e\}$ –macierz kolumnowa sił:

$$F_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N_i^e q dx - Q_i^e \quad (30)$$

Współczynniki K_{ij}^e są symetryczne, tzn. $K_{ij}^e = K_{ji}^e$.

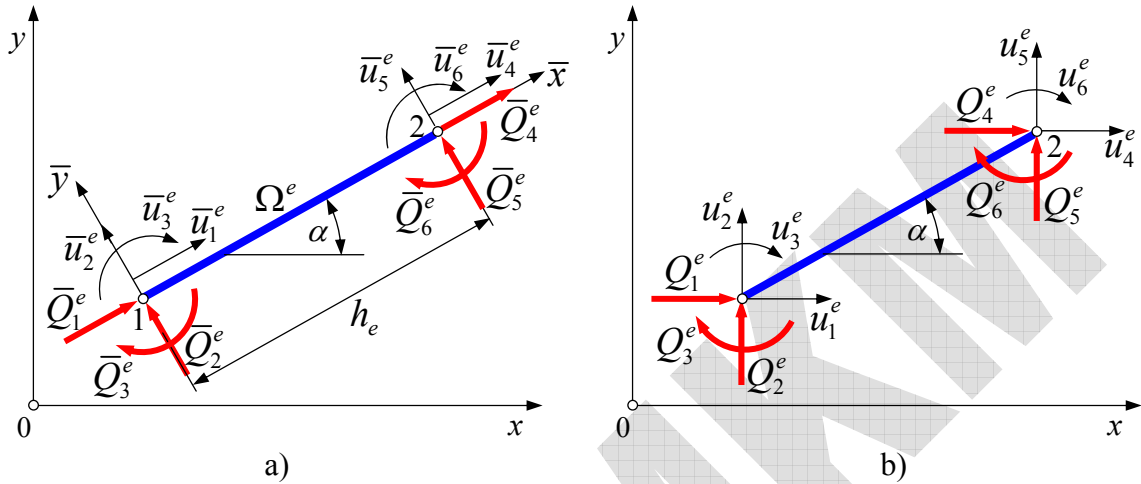
Przy przyjętej aproksymacji ugięć $v(x)$ za pomocą (26) macierze sztywności i sił przyjmują postać:

$$[K^e] = \frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -3 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}, \quad (b = EI = \text{const.}) \quad (31)$$

$$\{F^e\} = \frac{qh}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}, \quad (q = \text{const.})$$

Znając macierze sztywności i sił dla elementu belkowego można określić macierz sztywności i sił dla całej belki uwzględniając warunki zgodności uogólnionych przemieszczeń i warunki równowagi dla sił uogólnionych.

Rozważmy płaską ramę, którą dzielimy na elementy skończone Ω^e , $e = 1, 2, \dots, N$. Element skończony dla ramy jest złożeniem elementu prętowego o sztywności $E_e A_e$ i obciążeniu ciągłym q^R i elementu belkowego o sztywności $E_e I_e$ i obciążeniu ciągłym q^Z . W każdym węzle mamy po trzy uogólnione przemieszczenia węzłowe i odpowiadające im uogólnione siły węzłowe. Uogólnione przemieszczenia i siły węzłowe dla elementu skończonego ramy mogą być przedstawione w układzie lokalnym i globalnym (rys. 6).



Rys. 6. Element skończony ramy: a) w układzie lokalnym; b) w układzie globalnym

W układzie lokalnym element skończony dla ramy jest opisany równaniem:

$$[\bar{K}^e] \{\bar{u}^e\} = \{\bar{F}^e\} \quad (32)$$

W równaniu tym macierze kolumnowe uogólnionych przemieszczeń i sił węzłowych są równe:

$$\{\bar{u}^e\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{g}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{g}_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \\ \bar{u}_3^e \\ \bar{u}_4^e \\ \bar{u}_5^e \\ \bar{u}_6^e \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{F}^e\} = \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} 6q_e^R h_e \\ 6q_e^Z h_e \\ -q_e^Z h_e^2 \\ 6q_e^R h_e \\ -6q_e^Z h_e \\ q_e^Z h_e^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1^e \\ \bar{Q}_2^e \\ \bar{Q}_3^e \\ \bar{Q}_4^e \\ \bar{Q}_5^e \\ \bar{Q}_6^e \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Macierz sztywności elementu skończonego w układzie lokalnym ma postać:

$$[\bar{K}^e] = \frac{2E_e I_e}{h_e^3} \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3h_e & 0 & -6 & -3h_e \\ 0 & -3h_e & 2h_e^2 & 0 & 3h_e & h_e^2 \\ -c & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3h_e & 0 & 6 & 3h_e \\ 0 & -3h_e & h_e^2 & 0 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

gdzie:

$$c = \frac{A_e h_e^2}{2I_e}$$

Równanie macierzowe dla elementu skończonego ramy w układzie globalnym ma postać:

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\} \quad (35)$$

Macierz sztywności elementu skończonego ramy $[K^e]$ w powyższej zależności ma postać:

$$[K^e] = [H^e]^T [\bar{K}^e] [H^e], \quad (36)$$

gdzie $[H^e]$ – macierz transformacji w postaci:

$$[H^e] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Szczegółowy opis metody elementów skończonych dla belki i ramy można znaleźć w pracy [2]. Edukacyjne programy MES do obydwu zagadnień (odpowiednio BELKA i RAMA2D) znajdują się na stronach internetowych:

<http://dydaktyka.polsl.pl/mes>.

3.3 Przygotowanie zadania do rozwiązania metodą elementów skończonych

W celu rozwiązania konkretnego zadania brzegowego należy utworzyć model numeryczny rozpatrywanego układu. W rzeczywistym układzie mechanicznym wyodrębnia się części składowe, które modeluje się jako pręty (belki) lub elementy płaskie dwuwymiarowe (płytkowe, tarczowe, powłokowe). Niektóre fragmenty konstrukcji mogą być modelowane elementami przestrzennymi (trójwymiarowymi). W niniejszych rozwiązaniach ograniczono się do elementów jednowymiarowych - prętowych i belkowych.

Pręty (belki) modelowane są jako dwa węzły połączone za sobą odcinkiem. Węzły reprezentują początek i koniec elementu prętowego, odcinek - dane geometryczne i własności materiałowe. W węzłach można przykładać siły skupione, momenty skupione lub przemieszczenia (liniowe lub kątowe). Wielkości te mogą być również wyznaczane w węzłach.

Podział na węzły i elementy musi uwzględniać rzeczywiste własności układu. Siły skupione i momenty skupione mogą być przykładane tylko w węzłach. W przypadku zastosowania elementów prętowych połączenia w węzłach nie przenoszą momentów. W przypadku stosowania elementów belkowych połączenia w węzłach przenoszą siły podłużne, siły poprzeczne oraz momenty gnące, a dla układów przestrzennych również momenty skręcające. Elementy prętowe stosowane są do modelowania kratownic, zaś elementy belkowe do modelowania ram.

Podczas tworzenia modelu numerycznego należy przestrzegać następujących zasad:

1. Elementy mogą łączyć się tylko w węzłach.
2. Siły skupione i momenty skupione mogą być zadawane tylko w węzłach.
3. Podpory mogą być umieszczane tylko w węzłach.
4. Obciążenia ciągłe należy zadać zgodnie z wytycznymi programu komputerowego lub zastąpić obciążeniami skupionymi.
5. Momenty ciągłe rozłożone należy zadać zgodnie z wytycznymi programu komputerowego lub zastąpić momentami skupionymi.
6. Podparcie ciągłe należy zastąpić podporami w węzłach.

7. Odległości pomiędzy węzłami (długości elementów) powinny być w miarę równomierne.
8. Różnica pomiędzy numerami węzłów w elemencie powinna być jak najmniejsza (pasmo minimalne).
9. Układ musi mieć tak narzucone więzy (punkty podparcia), aby nie tworzył mechanizmu.

4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Dla wybranych układów prętowych lub belkowych przeprowadzić obliczenia (wyznaczenie przemieszczeń, naprężeń i reakcji podporowych) przy użyciu programu metody elementów skończonych wskazanego przez prowadzącego.

4.1 Przykładowe zadania

Zadanie 1

Dla pręta stopniowanego podpartego i obciążonego jak na rys. 7 wyznaczyć przemieszczenia punktów B , C oraz rozkład naprężeń. Do obliczeń przyjąć różne warianty obciążeń.

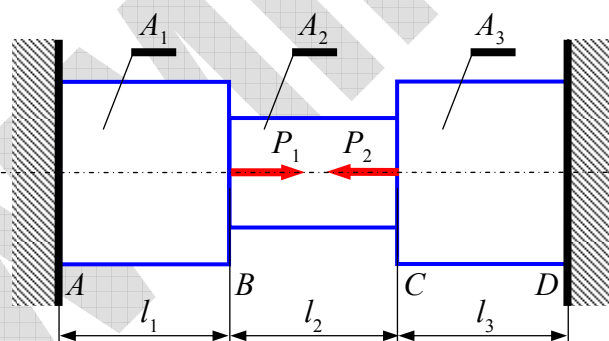
Przykładowe dane:

$$A_1 = 0.01 \text{ m}^2; A_2 = 0.005 \text{ m}^2; A_3 = 0.008 \text{ m}^2;$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0.5 \text{ m};$$

$$P_1 = 5 \text{ kN}; P_2 = 2 \text{ kN};$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa (stal)}.$$



Rys. 7. Pręt rozciągany – schemat statyczny

Zadanie 2

Dla kratownicy płaskiej podpartej i obciążonej jak na rys. 8 wyznaczyć przemieszczenia punktów B , D oraz naprężenia w prętach. Do obliczeń przyjąć różne warianty obciążeń.

Przykładowe dane:

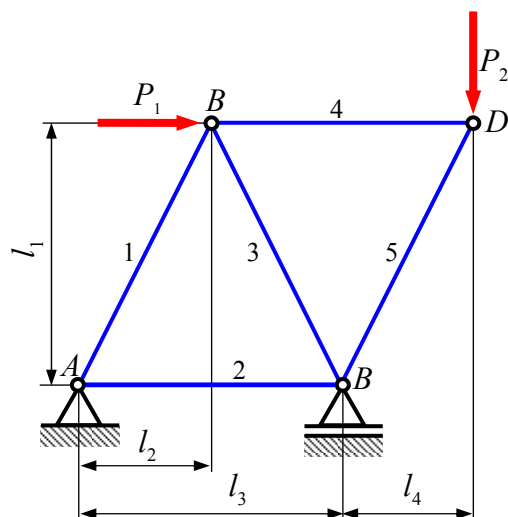
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0.01 \text{ m}^2;$$

$$l_1 = l_3 = 1.0 \text{ m};$$

$$l_2 = l_4 = 0.5 \text{ m};$$

$$P_1 = 4 \text{ kN}; P_2 = 1 \text{ kN}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa (stal)}.$$



Rys. 8. Kratownica – schemat statyczny

Zadanie 3

Dla belki podpartej i obciążonej jak na rys. 9 wyznaczyć położenie osi ugiętej oraz rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym wzdłuż osi belki. Wyznaczyć analitycznie przemieszczenia końca swobodnego belki dla wskazanego wariantu obciążenia i porównać z wynikami otrzymanymi numerycznie. Do obliczeń przyjąć różne warianty obciążenia.

Przykładowe dane:

$$l_1 = l_2 = 0.5 \text{ m};$$

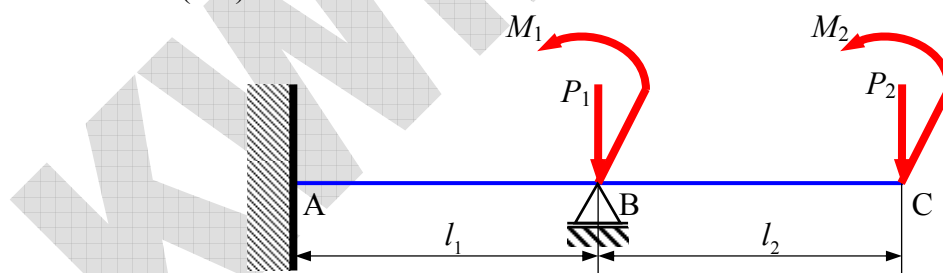
$$I_1 = I_2 = 8.33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4;$$

$$W_1 = W_2 = 1.66 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3;$$

$$P_1 = 7 \text{ kN}; P_2 = 3 \text{ kN};$$

$$M_1 = 4 \text{ kNm}; M_2 = 2 \text{ kNm}.$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa (stal)}.$$



Rys. 9. Belka wspornikowa – schemat statyczny

Zadanie 4

Dla ramy podpartej i obciążonej jak na rys. 10 wyznaczyć położenie osi ugiętej oraz rozkład naprężeń. Wyznaczyć analitycznie przemieszczenia końca swobodnego D ramy dla wskazanego wariantu obciążenia i porównać z wynikami otrzymanymi numerycznie. Do obliczeń przyjąć różne warianty obciążenia.

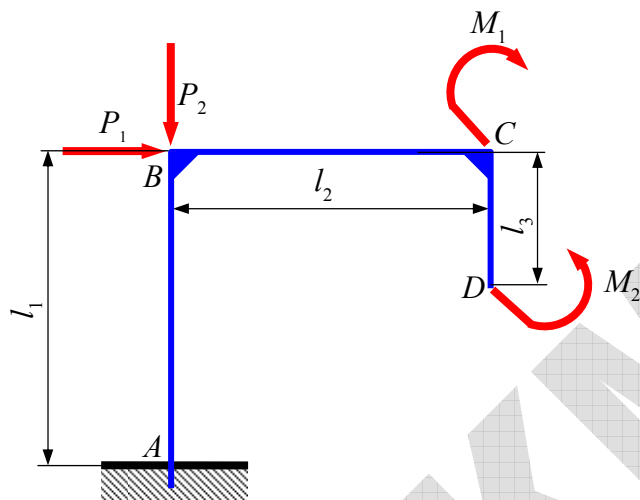
Przykładowe dane:

$$l_1 = l_2 = 1.0 \text{ m}; l_3 = 0.5 \text{ m}$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = 42.19 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4;$$

$$W_1 = W_2 = W_3 = 5.63 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3;$$

$P_1 = 8 \text{ kN}$; $P_2 = 4 \text{ kN}$;
 $M_1 = 5 \text{ kNm}$; $M_2 = 3 \text{ kNm}$.
 $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ (stal).



Rys. 10. Belka statycznie niewyznaczalna – schemat statyczny

5. OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTYCZNE DO SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać:

- I. Cel ćwiczenia
- II. Krótkie omówienie podstaw MES-u i zasad modelowania w MES-ie
- III. Opis rozwiązywanego zagadnienia i modelu numerycznego (z rysunkami)
- IV. Wyniki obliczeń w formie wydruków sporządzonych na drukarce. Wyniki powinny zawierać:
 1. Rysunki ugięć dla różnych wariantów obciążenia
 2. Wykresy naprężeń dla wykonanych wariantów
- V. Analizę wyników
- VI. Wnioski

6. PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Do czego służy metoda elementów skończonych?
2. Jakie są istotne cechy metody elementów skończonych?
3. Co to jest macierz sztywności i w jakim wzorze występuje?
4. Co to są funkcje kształtu?
5. Co to są elementy skończone, jakie rodzaje elementów modelują dany przypadek wytrzymałościowy?
6. Jakich zasad należy przestrzegać w przypadku rozwiązywania zagadnienia metodą elementów skończonych?

7. LITERATURA

1. Beluch W., Burczyński T., Fedeliński P., John A., Kokot G., Kuś W.: *Laboratorium z wytrzymałości materiałów*. Wyd. Politechniki Śląskiej, Skrypt nr 2285, Gliwice, 2002.
2. Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.
3. Jaworski A.: *Metoda elementów skończonych w wytrzymałości konstrukcji*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1981.
4. Kruszewski J.: *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, PWN, Warszawa 1981.
5. Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K.: *Macierzowa analiza konstrukcji*, PWN, Warszawa-Poznań 1979.
6. Szmelter J.: *Metoda elementów skończonych w mechanice*, PWN, Warszawa 1980.
7. Szmelter J.: *Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1979.
8. Szmelter J.: *Metody komputerowe w mechanice*, PWN, Warszawa 1980.
9. Zienkiewicz O.C.: *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.