



---

**Katedra Wytrzymałości Materiałów  
i Metod Komputerowych Mechaniki**

Wydział Mechaniczny Technologiczny  
Politechnika Śląska

**LABORATORIUM  
WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW**

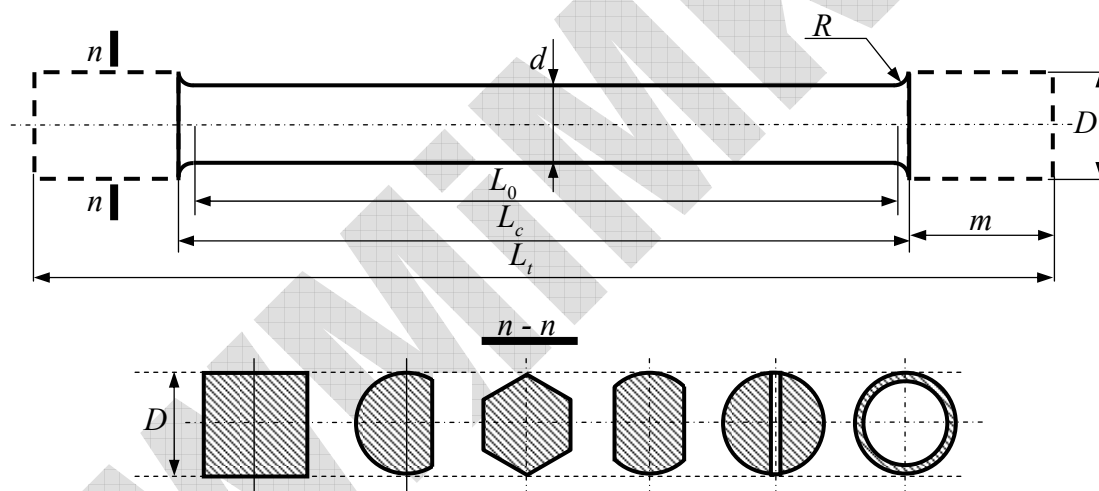
## **Statyczna próba skręcania metali (wyznaczanie modułu sprężystości poprzecznej)**

## CEL ĆWICZENIA

- ♦ Zaznajomienie się z próbą statycznego skręcania i maszynami skręcającymi.
- ♦ Pokazanie zachowania się materiału podczas próby.
- ♦ Wyznaczenie pewnych wielkości charakteryzujących własności materiału (w tym przypadku w zakresie odkształceń sprężystych).
- ♦ Sprawdzenie liniowej zależności kąta skręcenia  $\varphi$  od momentu skręcającego  $M_s$ .
- ♦ **Wyznaczenie modułu sprężystości poprzecznej  $G$**  (określenie materiału, z jakiego wykonana jest badana próbka).
- ♦ Statystyczne opracowanie wyników.

## WPROWADZENIE

Próbkę skręcania przeprowadza się zwykle na prętach o stałym przekroju kołowym, dla których proste jest określenie stanu naprężenia. Próbki o innym niż kołowy przekroju stosowane są w szczególnych przypadkach.



Rys. 1 Próbki stosowane do prób skręcania

Wymiary próbek zwykle wynoszą:

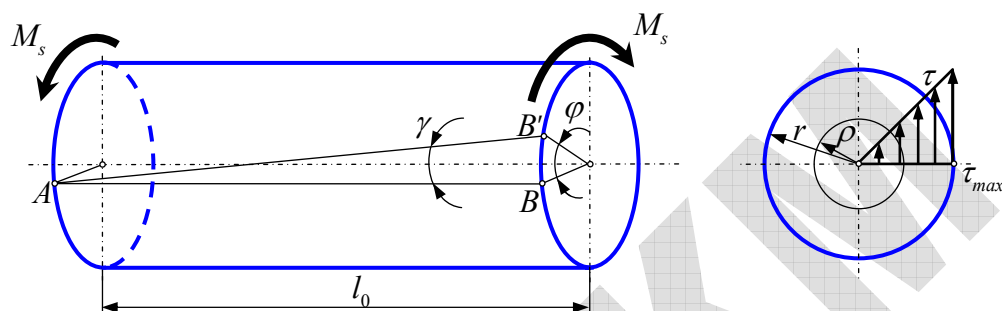
- $d = 10 \div 30$  mm;
- $L_0 = (5 \div 20)d$ , (najczęściej  $L_0 = 10d$ )

W przypadku prętów cienkich i drutów można je mocować bezpośrednio w odpowiednich uchwytach. Typowe próbki mają głowy o przekroju kołowym, kwadratowym, n-krotnym i innych, mogą również posiadać nacięcia. Jednakże bez względu na kształt, muszą one spełniać wymóg osiowego ustawienia próbki i umożliwić obrót głowy wewnątrz uchwytów. Najczęściej w związku z tym stosuje się próbki z głowami o przekroju kwadratowym.

## PODSTAWY TEORETYCZNE

## 1.1 Teoria skręcania prętów o przekroju kołowym

Jeśli pręt jak na rys. 2 obciążymy w płaszczyźnie prostopadłej do jego osi parą sił o momencie  $K$ , to siły wewnętrzne zredukują się do momentu  $M_s$ , którego kierunek jest zgodny z osią pręta. Moment  $M_s$  nazywamy *momentem skręcającym*.



Rys. 2. Kąt skręcenia ( $\varphi$ ), posunięcie ( $\gamma$ ) i rozkład naprężeń ( $\tau$ ) w pręcie skręcanym

Moment ten powoduje w poszczególnych przekrojach poprzecznych próbki płaski stan naprężenia i odpowiadający mu stan odkształcenia, który dla prętów o przekrojach kołowych w zakresie odkształceń sprężystych określają wzory:

$$\tau = \frac{M_s \rho}{I_0} \quad (1)$$

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_0} = \frac{16M_s}{\pi d_0^3}, \quad (2)$$

gdzie:

$\tau$  – naprężenie styczne;

$\tau_{max}$  – największe naprężenie styczne (na konturze przekroju);

$I_0$  – biegunowy moment bezwładności przekroju próbki;

$W_0 = \frac{I_0}{r}$  – wskaźnik wytrzymałości na skręcanie;

$\rho$  – odległość od środka przekroju;

$r$  – promień przekroju poprzecznego próbki;

$d_0$  – średnica próbki.

Kąt skręcenia pręta  $\varphi$  na długości pomiarowej  $l_0$  wynosi:

$$\varphi = \frac{M_s l_0}{GI_0} = \frac{32M_s l_0}{G\pi d_0^4}, \quad (3)$$

gdzie:

$G$  – moduł sprężystości poprzecznej (moduł Kirchhoffa);

$GI_0$  – sztywność na skręcanie.

Z kolei kąt odkształcenia postaciowego (posunięcie)  $\gamma$  wyraża się zależnością:

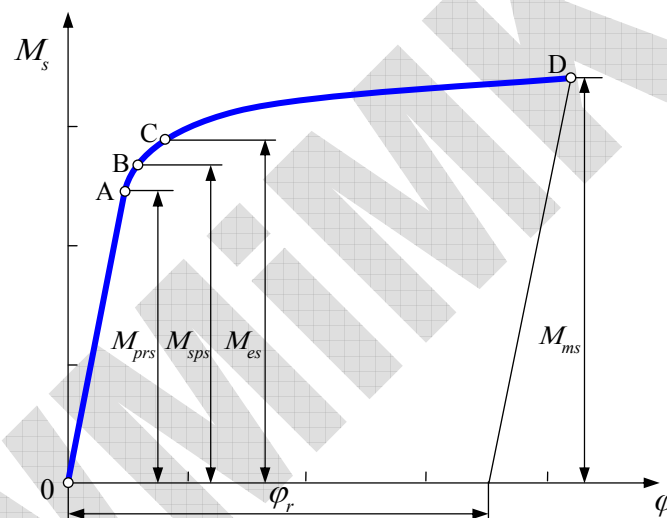
$$\gamma = \frac{\tau_{max}}{G} = \varphi \frac{d_0}{2l_0} \quad (4)$$

Typowy wykres próby skręcania (zależność kąta skręcenia  $\varphi$  od momentu skręcającego  $M_s$ ) dla materiału sprężysto-plastycznego przedstawiony jest na rys. 3. Dla takiego materiału początkowy fragment wykresu (odcinek OA) jest liniowy. Kąt  $\varphi_r$  określa skręcenie odcinka pomiarowego  $l_0$  po zerwaniu próbki.

Wartości momentów  $M_{prs}$ ,  $M_{sps}$ ,  $M_{es}$  i  $M_{ms}$  zaznaczone na wykresie mogą posłużyć do wyznaczenia wartości granicznych naprężeń (podobnie jak przy rozciąganiu), tj. odpowiednio: granicy proporcjonalności, sprężystości, plastyczności oraz wytrzymałości przy skręcaniu.

Zaznaczyć tu należy, że próba skręcania lepiej obrazuje własności plastyczne materiału niż próba rozciągania. Wynika to z niezmienności (w zasadzie) wymiarów przekroju i długości próbki podczas skręcania aż do jej zniszczenia, co pozwala na określenie naprężeń w przekroju poprzecznym próbki nawet przy znacznych odkształceniach. W próbie rozciągania było to niemożliwe ze względu na tworzenie się tzw. szyjki.

Z kolei ujemną stroną próby skręcania jest nierównomierność rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym próbki, co znacznie komplikuje ujęcie zjawiska powyżej granicy sprężystości w formę matematyczną (nierównomierności rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym próbki można uniknąć stosując pręty cienkościenne).



Rys. 3. Wykres skręcania dla materiału sprężysto - plastycznego

## 1.2 Określenie wielkości charakterystycznych w obszarze sprężystym i plastycznym

### a. Wyznaczenie modułu sprężystości poprzecznej $G$

Moduł sprężystości poprzecznej  $G$  możemy wyznaczyć z równania:

$$G = \frac{32M_s l_0}{\pi d_0^4 \varphi} = C \frac{M_s}{\varphi}, \quad (5)$$

gdzie:

$$C = \frac{32l_0}{\pi d_0^4} \quad (6)$$

W przypadku  $n$  prób (dla wielu momentów skręcających  $M_s$  i odpowiadających im kątów skręcenia  $\varphi$ ) należy wyznaczyć wartość średnią:

$$G_{sr} = \frac{\sum G_i}{n} \quad (7)$$

W celu dokładniejszego określenia wartości  $G$  należy do obliczeń zastosować jedną z metod statystycznych, np. metodę najmniejszych kwadratów (metoda ta została omówiona w dodatku na końcu niniejszej instrukcji).

### b. Określenie i sposób wyznaczania $R_{pr}$ , $R_{sp}$ i $R_e$ przy skręcaniu

Przyjmuje się, że umowna granica proporcjonalności  $R_{prs}$  jest to naprężenie, przy którym stosunek naprężenia do odpowiadającego mu odkształcenia stanowi  $2/3$  modułu sprężystości poprzecznej.

Zakres sprężysty w praktyce ogranicza się od góry umowną granicą sprężystości (punkt B na rys. 2.3):

$$R_{sps} = \frac{M_{sps}}{W_0} \quad (8)$$

Natomiast za podstawę do określenia umownej granicy proporcjonalności  $R_{prs}$  i plastyczności  $R_{es}$  przyjmuje się umowną wartość trwałego odkształcenia postaciowego  $\gamma$  dla włókien skrajnych.

W celu wyznaczenia wymienionych wielkości porównywalnych z podobnymi wielkościami wyznaczanymi w próbie rozciągania umowną wartość  $\gamma$  wylicza się z odpowiednich zależności między odkształceniem postaciowym a wydłużeniem jednostkowym. Dla małych odkształceń w przypadku rozciągania zachodzi zależność:

$$\gamma_{\max} = 1.5\varepsilon_1 \quad (9)$$

Wartość  $\varepsilon_1$  dla wyznaczenia umownej granicy sprężystości wynosi 0.05%, zaś dla umownej granicy plastyczności 0.2% długości pomiarowej.

Tak więc (przy pewnym uproszczeniu) przyjmuje się:

- dla umownej granicy sprężystości przy skręcaniu:

$$\gamma = 1.5\varepsilon_1 = 1.5 \cdot 0.05 = 0.075\% \quad (10)$$

- dla umownej granicy plastyczności:

$$\gamma = 1.5\varepsilon_1 = 1.5 \cdot 0.2 = 0.3\% \quad (11)$$

Odpowiednikami  $R_{0.05}$  i  $R_{0.2}$  przy rozciąganiu będą więc  $R_{0.075}$  i  $R_{0.3}$  przy skręcaniu.

Kątowi skręcenia  $\varphi$  (rys. 2.2) odpowiada kąt  $\gamma_\rho$  taki, że:

$$\operatorname{tg} \gamma_\rho = \frac{\rho \varphi}{l_0} \quad (12)$$

Stąd:

$$\gamma_\rho = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\rho \varphi}{l_0} \quad (13)$$

Oczywiście, na powierzchni próbki (gdy  $\rho = r$ ,  $\gamma_\rho = \gamma$ ):

$$\gamma_\rho = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r \varphi}{l_0} \quad (14)$$

Dla niewielkich kątów skręcenia wzór (14) można przybliżyć zależnością:

$$\gamma = \frac{r \varphi}{l_0} \quad (15)$$

Ostatecznie otrzymujemy wyrażenie na dopuszczalny kąt skręcenia w postaci:

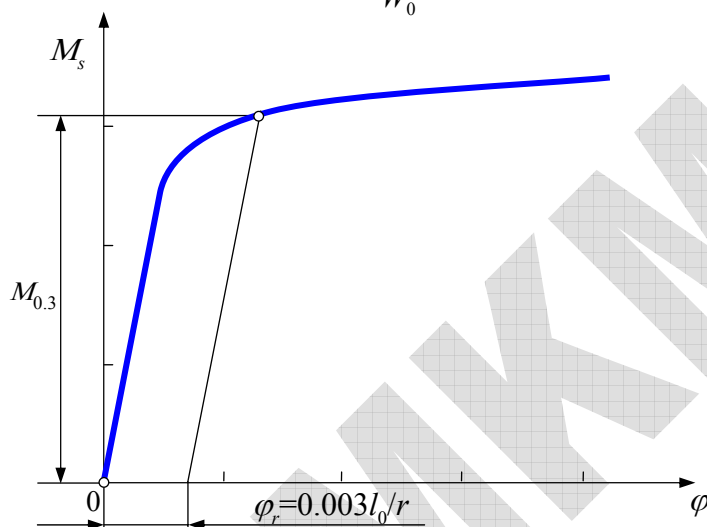
$$\varphi_r = \gamma \frac{l_0}{r} = \frac{1.5\varepsilon_1 l_0}{r} \quad (16)$$

Jest to wartość kąta skręcenia odpowiadającego umownej granicy wartości  $\gamma$ , którą można zaznaczyć na wykresie (rys. 4).

Odczytując z wykresu  $M_{0,075}$  i  $M_{0,3}$  wylicza się  $R_{sp}$  i  $R_{es}$  ze wzorów:

$$R_{sp\ 0,075} = \frac{M_{0,075}}{W_0}, \tag{17}$$

$$R_{e\ 0,3} = \frac{M_{0,3}}{W_0} \tag{18}$$

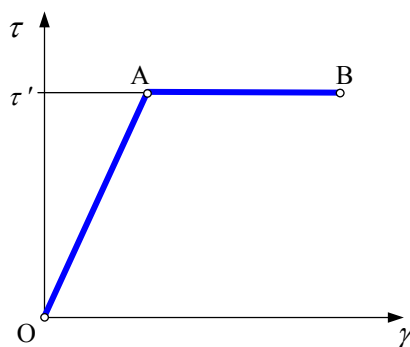


Rys. 4. Wykreślny sposób określania  $M_{0,3}$

**c. Rozkład naprężeń po przekroczeniu granicy proporcjonalności  $R_{pr}$**

Wzory (1-3) są prawdziwe jedynie w zakresie własności sprężystych materiału, czyli do takiej wartości  $M_s$ , przy którym na konturze przekroju wystąpią naprężenia  $\tau'$  odpowiadające granicy plastyczności przy czystym ścinaniu.

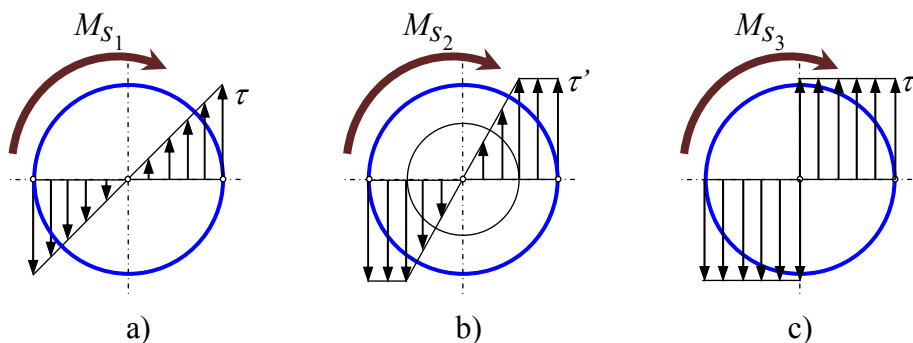
Dla materiałów sprężysto - plastycznych przy ścinaniu (stan naprężenia w przypadku skręcania jest ścinaniem) pomiędzy odkształceniem a naprężeniem zachodzi związek jak na rys. 5.



Rys. 5. Zależność między odkształceniem i naprężeniem przy ścinaniu dla materiałów idealnie sprężysto - plastycznych (bez wzmocnienia)

Wzrostowi  $M_s$  odpowiada wzrost posunięcia  $\gamma$  (a więc zgodnie z prawem Hooke'a wzrost naprężeń). Po osiągnięciu wartości naprężeń  $\tau'$  (punkt A) dalsze skręcanie i zwiększanie się przemieszczeń następuje przy stałej wartości naprężeń  $\tau'$  (odcinek AB).

Na rys. 2.6 przedstawiono rozkłady naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym pręta wykonanego z materiału sprężysto - plastycznego dla wznrastającej wielkości  $M_s$ .

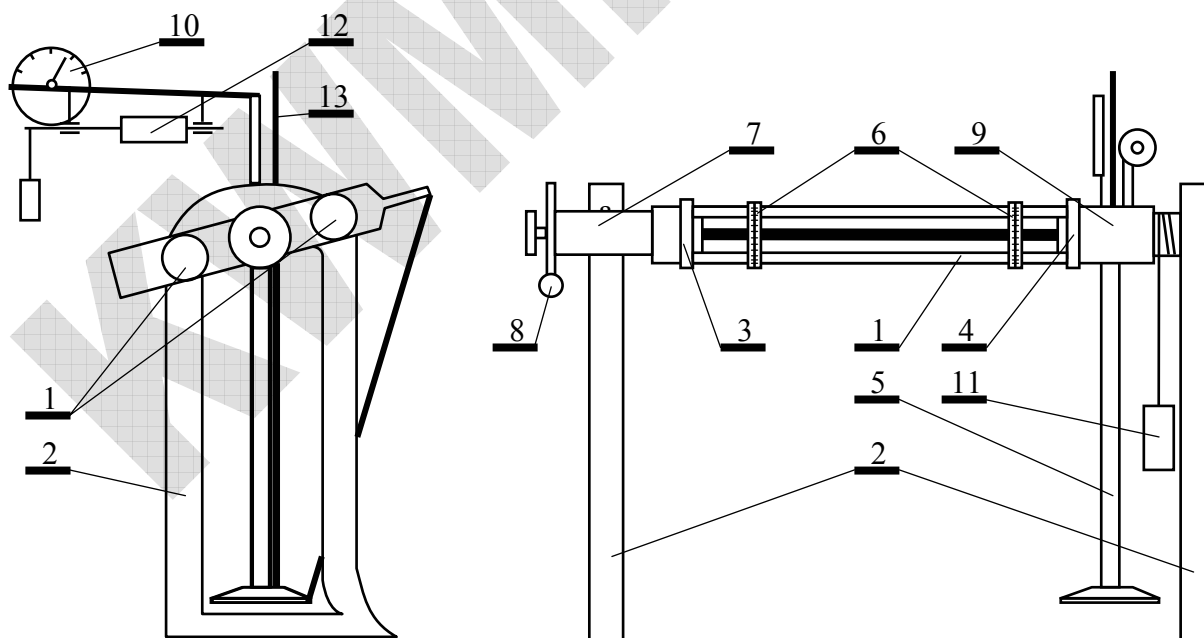


Rys. 6. Rozkład naprężeń stycznych w obszarach:  
 a) sprężystym, b) sprężysto-plastycznym, c) plastycznym

Rysunek 6a odpowiada skręcaniu wyłącznie sprężystemu. Wykres naprężeń na rys. 6b odpowiada skręcaniu w przypadku, gdy w części przekroju (tj. w zewnętrznej warstwie przekroju) zostaje przekroczona granica plastyczności. Przy dalszym wzroście  $M_s$  rozkład naprężeń coraz bardziej zbliża się do rozkładu przedstawionego na rys. 6c, tj. do stanu, jaki wytworzy się przy skręcaniu idealnie plastycznym, w którym naprężenia w całym przekroju osiągnęłyby stałą wartość równą  $\tau'$  – w praktyce wcześniej następuje zerwanie próbki.

### PRZEBIEG ĆWICZENIA

Rysunek 7 przedstawia schemat skrecarki firmy Amsler o zakresie  $M_s$  do 1500 Nm. Ma ona możliwość nastawienia na cztery zakresy: 300, 500, 1000 oraz 1500 Nm. Może służyć do skręcania próbek płaskich i okrągłych, jak również do skręcania gotowych części konstrukcyjnych (wały, sprzęgła, itp.).



Rys.7. Schemat skrecarki firmy Amsler

Maszyna składa się z dwóch poziomych prowadnic **1** tworzących ramę, zamocowanych na obydwu końcach w stojakach **2**. Badaną próbkę mocuje się w głowicach **3** i **4**. Głowica **4** wraz z wahadłem **5** oraz urządzeniem pomiarowym i rejestrującym **12** może być przesuwana wzdłuż prowadnic **1**. Położenie to ustala się w zależności od długości próbek.

Głowica **3** jest osadzona w nieprzesuwным łożysku **7**. Skręcanie próbki następuje przez obrót głowicy **3** za pośrednictwem przekładni ślimakowej **8** za pomocą silnika lub ręcznie. Prawy koniec próbki po sztywnym jej zamocowaniu w uchwycie głowicy **4** stanowi całość z tą głowicą oraz z wahadłem **5** i może się wraz z nimi obracać w łożysku **9**. Przyłożony do próbki w uchwycie głowicy **3** moment skręcający jest równoważony momentem w uchwycie głowicy **4** poprzez wychylenie wahadła. W momencie zniszczenia próbki łagodny powrót wahadła jest zapewniany przez hamulec linowy **11**.

Wychylenie wahadła, będące miarą momentu, przenoszone jest za pomocą układu dźwigni na wskazówkę tarczy **10**. Tarcza ta jest wyskalowana tak, że odczytuje się z niej bezpośrednio wartość  $M_s$ . Wskazówka może wykonać dwa obroty, dlatego też tarcza ma dwie skale, przy czym skala zewnętrzna odnosi się do drugiego obrotu. Zakres maszyny ustala się poprzez wydłużenie lub skrócenie ramienia wahadła **5**. Odczytuje się go na pręcie **13**.

Na prowadnicach **1** umieszczone są dwa przyrządy **6** do pomiaru kąta skręcenia. Odległość między przyrządami określa długość pomiarową  $l_0$ . Każdy z przyrządów składa się z dwóch ruchomych względem siebie pierścieni i może być przesuwany wzdłuż osi próbki. Jeden z pierścieni jest sztywno połączony z obudową, drugi zaś (za pomocą śrub dociskowych zakończonych ostrzem) jest osiowo przytwierdzany do próbki. Oba pierścienie posiadają podziałkę umożliwiającą odczyt kąta skręcenia próbki w danym przekroju (jako zmianę położenia jednego pierścienia względem drugiego). Kąt skręcenia  $\varphi$  pomiędzy oboma przyrządami jest różnicą odczytanych kątów ( $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ).

W przypadku przeprowadzania próby niszczącej obrotu głowicy **3** dokonuje się za pomocą silnika. Jednocześnie układ rejestrujący samoczynnie kreśli wykres skręcania. Gdy próba jest prowadzona w zakresie odkształceń sprężystych, zwykle głowicę **3** obraca się ręcznie i co określoną wartość  $M_s$  dokonuje się odczytu kąta skręcenia.

W ramach ćwiczenia należy:

1. Zmierzyć 6-krotnie (w trzech przekrojach, w każdym z nich w prostopadłych do siebie kierunkach) średnicę próbki  $d_0$  z dokładnością do 0.1 mm.
2. Określić wstępnie rodzaj materiału i przypuszczalny  $\tau_{\max}$  oraz nastawić zakres maszyny.
3. Zamocować próbkę w szczękach maszyny.
4. Zamocować przyrząd pomiarowy i odczytać wstępne wartości kątów na poszczególnych pierścieniach przyrządu.
5. Zmierzyć długość pomiarową  $l_0$  z dokładnością do 1 mm.
6. Obciążyć momentem skręcającym  $M_s$  i odczytywać kąty skręcenia  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  (odpowiednio na przyrządzie lewym i prawym).
7. Powtarzać punkt 6 zwiększając obciążenie stopniowo aż do osiągnięcia założonej maksymalnej wartości  $M_s$ .
8. Odciążyć próbkę.

Wyniki należy zanotować tabeli 1.



Tabela 1

Długość pręta ( $l_0$ ) [m]			
Średnica pręta ( $d_0$ ) [mm]	1.	3.	5.
	2.	4.	6.
Lp.	$M_s$ [kGm]	$\varphi_1$ [°]	$\varphi_2$ [°]
0. (wartości początkowe)			
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			

**OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTYCZNE DO SPRAWOZDANIA**

*Sprawozdanie powinno zawierać:*

- I. Cel ćwiczenia
- II. Wstęp teoretyczny
- III. Część obliczeniową, w której należy:
  - 1. Uzupełnić tabelę (tab. 2) uwzględniając (odejmując) wartości początkowe  $M_s$  i  $\varphi$ . W efekcie obliczona zostanie średnia wartość modułu sprężystości poprzecznej ( $G_{sr}$ ).

Tabela 2

Lp	$M_s$ [kGm]	$M_s$ [Nm]	$\varphi_2$ [°]	$\varphi_1$ [°]	$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ [°]	$\varphi$ [rad]	$G_i$ [MPa]
1							
2							
...							
n							
						$G_{sr}$	

- 2. Wyliczyć wartość modułu sprężystości poprzecznej metodą najmniejszych kwadratów szukając współczynnika kierunkowego  $c_1$  prostej aproksymacyjnej w postaci:

$$f^*(x) = c_0 + c_1x, \tag{0.19}$$

gdzie:

$$f^*(x) = M_s,$$

$$x = \varphi$$

Przy czym:

$$c_1 = G \frac{I_0}{l_0} \tag{0.20}$$

Z równania (0.20) należy wyliczyć moduł sprężystości poprzecznej wyznaczony metodą statystyczną  $G_{stat}$  oraz wartość odchylenia standardowego  $S$ .

- IV. Określenie, z jakiego materiału wykonano próbkę (podać najbardziej zbliżoną wartość tablicową oraz źródło, z którego korzystano)
- V. Wykres skręcania w układzie  $M_s$  [Nm] -  $\varphi$  [rad]
- VI. Wnioski z ćwiczenia

### PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Podać podstawowe założenia i zależności teorii skręcania prętów kołowych.
2. Narysować i omówić wykres skręcania dla materiału sprężysto - plastycznego.
3. Jak wyznaczamy umowną granicę sprężystości i plastyczności? Przedstawić na wykresie.
4. Narysować i omówić rozkład naprężeń stycznych w kołowym przecię skręcanym w obszarze sprężystym, sprężysto - plastycznym i plastycznym.
5. Podać sposób wyznaczania modułu sprężystości poprzecznej. Omówić dwie metody opracowania wyników.
6. Jak zależy kąt skręcenia od momentu skręcającego w zakresie sprężystym?
7. Od czego zależy moduł sprężystości poprzecznej?

### LITERATURA

1. Beluch W., Burczyński T., Fedeliński P., John A., Kokot G., Kuś W.: *Laboratorium z wytrzymałości materiałów*. Wyd. Politechniki Śląskiej, Skrypt nr 2285, Gliwice, 2002.
1. Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.
2. Benjamin J.R., Cornell C.A.: *Rachunek prawdopodobieństwa statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1977.
3. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*, t. I-II, WNT, Warszawa 1996-97.
4. Fisz M.: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.
5. *Ćwiczenia z wytrzymałości materiałów. Laboratorium*, Praca zbiorowa pod red. Lambera T., Skrypty uczelniane Pol. Śl., nr 1527, Gliwice 1990.

## METODA NAJMNIJSZYCH KWADRATÓW

- *Sformułowanie zadania aproksymacyjnego*

Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą, którą należy przybliżyć w przedziale  $(a, b)$  za pomocą kombinacji liniowej  $k + 1$  danych funkcji  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ :

$$f^*(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_k\varphi_k(x) \quad (D1)$$

Należy określić współczynniki  $c_0, c_1, \dots, c_k$  tak, by jak najmniejsze było wyrażenie:

a) w przypadku ciągłym (aproksymacja integralna):

$$\|f^* - f\|^2 = \int_a^b |f^*(x) - f(x)|^2 w(x) dx \quad (D2)$$

b) w przypadku dyskretnym (aproksymacja punktowa):

$$\|f^* - f\|^2 = \sum_{i=0}^n |f^*(x_i) - f(x_i)|^2 w_i \quad (D3)$$

Oznacza to wymaganie, by norma euklidesowa ważona lub seminorma ważona funkcji błędu  $f^* - f$  była jak najmniejsza, inaczej, by funkcja  $f^*(x)$  możliwie dokładnie odtwarzała przebieg funkcji  $f(x)$ .

Tak sformułowane zadanie nazywa się *zadaniem aproksymacji średniokwadratowej*, zaś najczęściej stosowaną metodę rozwiązania tego zadania nazywa się *metodą najmniejszych kwadratów*.

- *Rozwiązanie zadania aproksymacyjnego dla funkcji jednej zmiennej*

Niech dana będzie funkcja (ciągła bądź dyskretna) jednej zmiennej:

$$y = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (D4)$$

W dalszym ciągu zajmiemy się głównie zagadnieniem aproksymacji punktowej. Poszukuje się funkcji aproksymacyjnej w postaci (D1). Zależność ta dla funkcji jednej zmiennej może być przedstawiona jako:

$$f^*(x) = f^*(x, c_0, \dots, c_k) \quad (D5)$$

W metodzie najmniejszych kwadratów doboru współczynników funkcji  $f^*(x)$  dokonuje się tak, by zminimalizować poniższe wyrażenie:

$$\sum_{i=1}^n [f^*(x, c_0, \dots, c_n) - f(x)]^2 = \min \quad (D6)$$

Kryterium to należy do warunków „mocnych”, gdyż zawiera sumę kwadratów odchyłek, a więc liczb nieujemnych. W przypadku gdy rozwiązania poszukujemy w klasie wielomianów uogólnionych (D1), obliczenia minimum funkcji (D6) nie nastroją trudności.

Rozpatrujemy zbiór punktów  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , którego aproksymacją ma być funkcja liniowa w postaci:

$$f^*(x) = c_0 + c_1x \quad (D7)$$

Kryterium najmniejszych kwadratów przyjmuje postać:

$$\sum_{i=1}^n (c_0 + c_1x_i - y_i)^2 = \min \quad (D8)$$

Korzystając z warunku konieczności istnienia ekstremum funkcji dwu zmiennych otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial c_0} &= 2 \sum_{i=1}^n (c_0 + c_1 x_i - y_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c_1} &= 2 \sum_{i=1}^n (c_0 + c_1 x_i - y_i) x_i = 0\end{aligned}\tag{D9}$$

Powyższy układ równań można zapisać w postaci dogodnej do obliczenia współczynników  $c_0$  oraz  $c_1$ :

$$\begin{aligned}c_0 n + c_1 \sum_i x_i &= \sum_i y_i \\ c_0 \sum_i x_i + c_1 \sum_i x_i^2 &= \sum_i x_i y_i\end{aligned}\tag{D10}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_i x_i, \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_i y_i,\end{aligned}\tag{D11}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}, \\ c_0 &= \bar{y} - c_1 \bar{x}\end{aligned}\tag{D12}$$

W celu określenia dokładności pomiarów należy wyznaczyć wartość odchylenia standardowego:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},\tag{D13}$$

gdzie:

$n$  – liczba pomiarów;  
 $m$  – liczba parametrów (tu:  $m = 2$ ).

### Literatura

1. Dahlquist G., Björck Å.: *Metody numeryczne*. PWN, Warszawa 1983.
2. Fisz M.: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.
3. Majchrzak E., Mochnacki B.: *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne i algorytmy*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1998.