



**Katedra Wytrzymałości Materiałów
i Metod Komputerowych Mechaniki**

Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska

**LABORATORIUM
WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW**

**Wyznaczanie środka ścinania w prętach
o przekrojach niesymetrycznych**

KWIM/TKM

1. CEL ĆWICZENIA

Ćwiczenie ma na celu doświadczalną weryfikację teoretycznego sposobu wyznaczania środka ścinania (obliczenia analityczne na podstawie wyprowadzonych zależności) oraz sprawdzenie położenia środka ścinania w stosunku do położenia środka ciężkości w przekrojach niesymetrycznych.

2. WPROWADZENIE

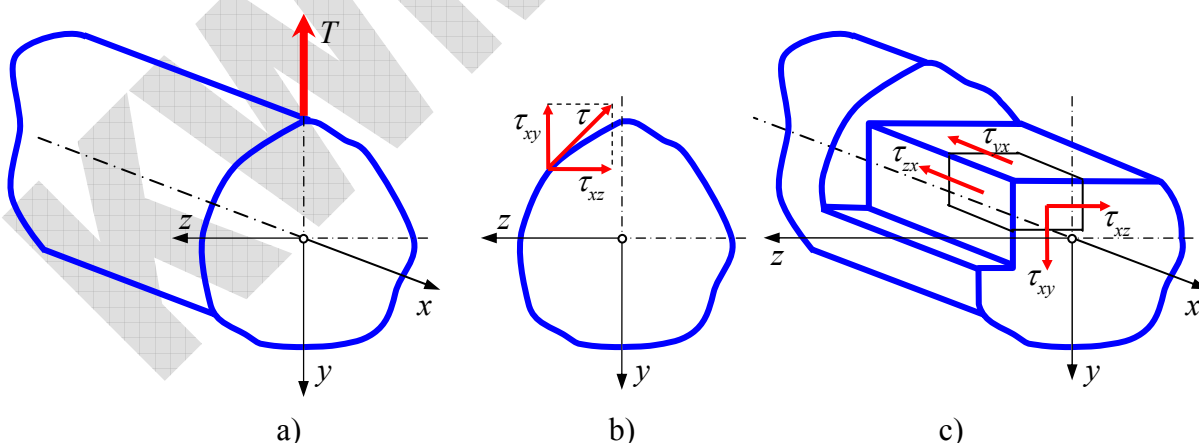
W wielu praktycznych przypadkach obciążenia pręta siłą poprzeczną przechodzącą np. przez środek ciężkości pręta powoduje ona nie tylko zginanie i ścinanie, ale również skręcanie pręta. Sytuacja taka ma miejsce wówczas, gdy pręt nie jest symetryczny względem osi równoległej do osi działania siły (np. ceownik obciążony jak na rys. 2). Nieuwzględnienie tego faktu w obliczeniach było w przeszłości przyczyną wielu katastrofalnych w swych skutkach uszkodzeń.

W celu uniknięcia wystąpienia skręcania należy przesunąć linię działania siły do odpowiedniego położenia, w którym nie występuje skręcanie (miejsce to zwane jest środkiem ścinania).

3. PODSTAWY TEORETYCZNE

3.1 Środek ścinania

Rozważmy pręt obciążony siłą poprzeczną T (rys. 1a). Działanie takiej siły jest zrównoważone w przekroju poprzecznym układem elementarnych sił stycznych τdA . Wiedząc, że na konturze przekroju naprężenia styczne mają kierunek styczny do tego konturu (rys. 1b) stwierdzamy, że w przekroju występują składowe naprężenia stycznych τ_{xy} i τ_{xz} .



Rys. 1. Pręt obciążony siłą poprzeczną i rozkład naprężeń stycznych

Zgodnie z twierdzeniem o równowartości odpowiadających sobie naprężeń stycznych w przekrojach podłużnych pręta pojawia się naprężenie τ_{yx} i τ_{zx} (rys. 1c):

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \tau_{xy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}\end{aligned}\quad (1)$$

Tak więc w przekroju poprzecznym pręta pojawiają się siły wewnętrzne $\tau_{xy}dA$, $\tau_{xz}dA$ oraz siła poprzeczna T , które muszą spełniać ogólne warunki równowagi:

$$\begin{aligned}\sum P_{iy} &= 0 & \int_A \tau_{xy} dA &= T \\ \sum P_{iz} &= 0 & \int_A \tau_{xz} dA &= 0 \\ \sum M_{io} &= 0 & \int_A (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dA &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

W przypadku gdy przekrój poprzeczny posiada osie symetrii, zaś siła poprzeczna przechodzi przez punkt ich przecięcia, warunki równowagi (2) są spełnione. W przekrojach niesymetrycznych nie zostaje spełnione równanie równowagi momentów. Efektem tego będzie nie tylko przesunięcie się przekrojów poprzecznych względem siebie, ale i ich obrót w swej płaszczyźnie. Tak więc oprócz ścicia wystąpi również skręcenie pręta wywołane momentem skręcającym o wartości:

$$M_s = - \int_A (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dA \quad (3)$$

Układ sił T i M_s można zredukować do siły wewnętrznej $P_w = T$, lecz przesuniętej względem środka przekroju o wartości k_1 .

$$k_1 = - \frac{\int_A (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dA}{T} \quad (4)$$

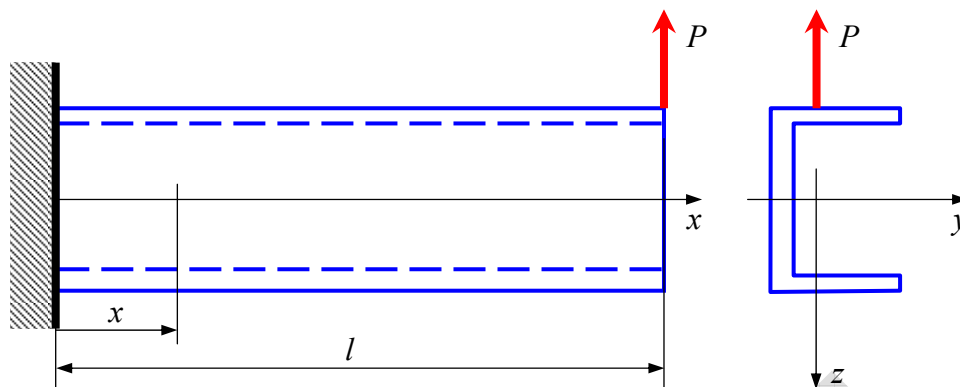
Podobnie można wyznaczyć wielkość k_2 przesunięcia siły poprzecznej w przypadku działania jej wzdłuż drugiej osi przekroju pręta. Tak więc:

Środkiem ścinania nazywamy taki punkt o współrzędnych k_1 i k_2 , leżący w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, przez który przechodząca siła poprzeczna wywołuje w pręcie jedynie ścinanie bez skręcania.

Gdy siła poprzeczna ma kierunek przechodzący przez środek ścinania, to w przekrojach pręta wstąpi wyłącznie ścinanie bez skręcania pręta. W przypadku przekroju symetrycznego środek ścinania leży zawsze na osi symetrii.

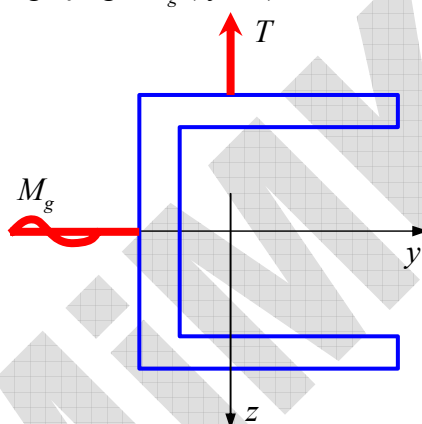
3.2 Współrzędne środka ścinania w pręcie o przekroju ceowym

Rozpatruje się działanie siły poprzecznej w pręcie o przekroju ceowym obciążonym na końcu siłą skupioną P (rys. 2).



Rys. 2. Ceownik obciążony siłą poprzeczną

W przekroju poprzecznym odległym o x ($0 \leq x \leq l$) od utwierdzenia siła P redukuje się do siły poprzecznej T oraz momentu gnącego M_g (rys. 3).



Rys. 3. Siły wewnętrzne w przekroju ceownika odległym od końca

Zakłada się, że na grubości ścianki ceownika naprężenia styczne są stałe. Ich wartość można określić na podstawie wzoru Żurawskiego. I tak dla naprężeń stycznych występujących w półkach (rys. 8.4):

$$\tau_{xy} = \frac{TS_y(y_1)}{gI_y} \quad (5)$$

Dla środnika zaś:

$$\tau_{xz} = \frac{TS_y(z_1)}{bI_y}, \quad (6)$$

gdzie:

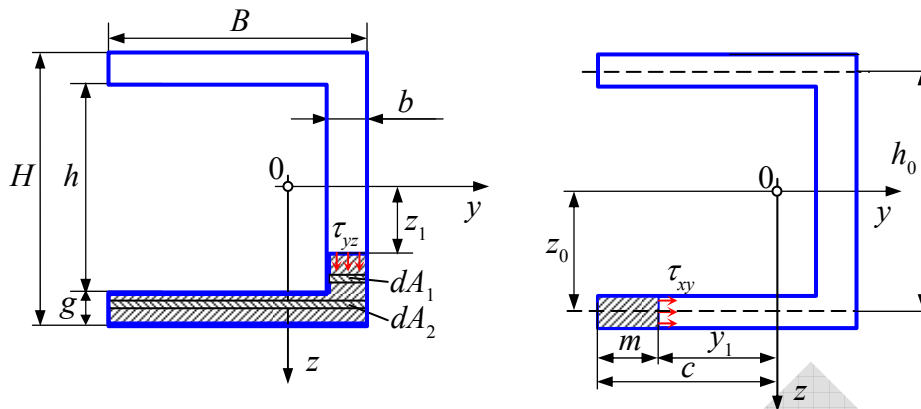
$S_y(y_1)$ – moment statyczny względem osi obojętnej y odciętej części przekroju półek przez oś y_1 ;

$S_y(z_1)$ – moment statyczny względem osi obojętnej y odciętej części przekroju środnika przez oś z_1 ;

b – grubość środnika;

g – grubość półki;

I_y – moment bezwładności przekroju względem osi y .



Rys. 4. Określanie momentów statycznych

Momenty statyczne wynoszą odpowiednio:

$$S_y(z_1) = \int_{A_1} z dA_1 + \int_{A_2} z_1 dA_2$$

$$dA_1 = B dz_1;$$

$$dA_2 = b dz_1$$

$$S_y(z_1) = B \int_{h/2}^{H/2} z_1 dz_1 + b \int_{z_1}^{h/2} z_1 dz_1$$

$$S_y(z_1) = B \left(\frac{H^2}{8} - \frac{h^2}{8} \right) + b \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z_1^2}{2} \right) \quad (7)$$

oraz

$$S_y(y_1) = gmz_0, \quad (8)$$

gdzie:

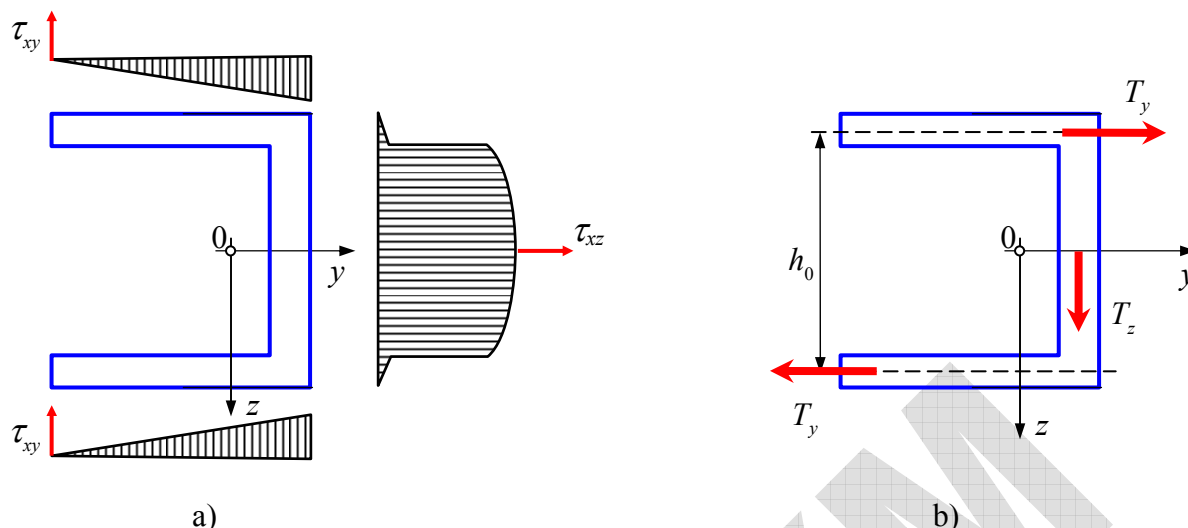
$$z_0 = \frac{1}{2} h_0; \quad h_0 = \frac{1}{2} (H + h) \quad (9)$$

Wykorzystując zależności na momenty statyczne (7) i (8) we wzorach na naprężenia styczne (5) i (6) otrzymuje się:

$$\tau_{xy} = \frac{T}{2I_y} h_0 m \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = \frac{T}{8bI_y} \left[b(h^2 - 4z^2) + B(H^2 - h^2) \right] \quad (11)$$

Wykresy tych naprężeń uwidoczniono na rys. 5a.



Rys. 5. (a) Wykresy naprężeń stycznych oraz (b) wynik redukcji sił w przekroju

Zwraca uwagę przeciwny znak naprężeń τ_{xy} w górnej i dolnej płycie ceownika. W wyniku redukcji w przekroju otrzymujemy siły T_y i T_z (rys. 5b):

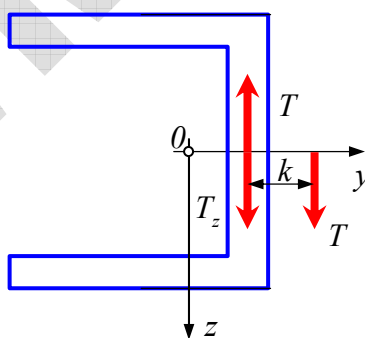
$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA = \int_0^{B-b} \frac{T}{2I_y} h_0 m g d m = \frac{T}{4I_y} h_0 g (B-b)^2 \quad (12)$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} dA \cong T \quad (13)$$

Siły T_y tworzą parę sił o momencie M

$$M = T_y h_0 \quad (14)$$

Parę sił T_y można przemieścić w swej płaszczyźnie i zastąpić nową parą sił T (rys. 6).



Rys. 6. Ceownik z zaznaczoną współrzędną k

Pary tych sił dają równoważne momenty:

$$M = T_y h_0 = T k ; \quad k = \frac{T_y}{T} h_0 \quad (15)$$

Ostatecznie

$$k = \frac{g h_0^2}{4I_y} (B-b)^2 \quad (16)$$

Współrzędna k wyznacza położenie środka ścinania w przekroju ceowym względem osi środkowej.

4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Ćwiczenie demonstruje skręcanie pręta cienkościennego o niesymetrycznym przekroju poprzecznym przy obciążeniu go siłą poprzeczną i doświadczalne określenie współrzędnych środka ścinania. Po teoretycznym i doświadczalnym określeniu współrzędnych środka ścinania należy porównać wyniki i przeprowadzić ich dyskusję.

Pomiaru dokonuje się na pręcie cienkościennym jednostronnie utwierdzonym i obciążonym na drugim końcu siłą poprzeczną. Pręt posiada przekrój poprzeczny otwarty (ceowy). Długość pręta jest tak dobrana, by przy niewielkich obciążeniach swobodnego końca uzyskać dostatecznie duże odkształcenia. Na swobodnym końcu pręta znajduje się ramka z przesuwaną szalką, na której zawieszają się ciężarki. Szalka przesuwa się po wyskalowanym w milimetrach pręcie. Przy przesuwaniu szalki z ciężarkami wzdłuż ramki od środka ścinania przekroju do środka ścinania przekroju pręta kierunek działania siły poprzecznej przenosi się z głównej osi bezwładności na linię do niej równoległą.

Do obserwacji efektu skręcania przekroju poprzecznego pręta służy czujnik zegarowy zamocowany na statywie. W przypadku przejścia kierunku siły poprzecznej przez środek ścinania przekrój pręta nie ulegnie skręceniu – wszystkie punkty przekroju poprzecznego przesuną się tylko w kierunku działania siły. Wskazówka czujnika wówczas nie wychyli się. Natomiast każdemu innemu położeniu siły towarzyszy również obrót przekroju, co sygnalizuje wskazówka czujnika.

Przed przystąpieniem do ćwiczenia należy wyznaczyć wartość dopuszczalnego obciążenia, które można przyłożyć do pręta ($\sigma_{dop} = 60\text{MPa}$). W tym celu należy zmierzyć długość pręta l oraz wymiary przekroju poprzecznego: B , H , g oraz b (rys. 4). Wyniki należy zamieścić w tab. 1.

Korzystając z zależności na wartość maksymalnych naprężeń przy zginaniu należy porównać je z naprężeniami dopuszczalnymi – tym sposobem można wyznaczyć obciążenie dopuszczalne. Obliczenia te można przeprowadzić po zakończonym ćwiczeniu w celu sprawdzenia poprawności przyjętego obciążenia.

Dla pomierzonych wielkości przekroju poprzecznego należy wyznaczyć położenie środka ciężkości, moment bezwładności I_y i wskaźnik wytrzymałości na zginanie W_y . Z warunku dopuszczalnych naprężeń należy obliczyć wartość dopuszczalnego obciążenia P_{dop} uwzględniając ciężary:

- a) ramki $P_1 = 9.7\text{N}$;
- b) szalki $P_2 = 4.6\text{N}$.

Wykonując ćwiczenie należy w pierwszej kolejności zdemontować ramkę wraz z szalką z ceownika (ceownik nieobciążony) i wyzerować czujnik zegarowy.

Następnie, po ponownym zamontowaniu ramki z szalką i przyjmując środek ciężkości jako punkt początkowy pomiarów, należy ustawić na jego wysokości szalkę i obciążyć po kolei ciężarkami:

$$P_i = 0 \text{ (brak ciężarków), } P_3, P_4, P_5,$$

przy czym:

$$P_1 + P_2 + P_i < P_{dop}$$

Dla każdego z obciążeń należy znaleźć takie położenie szalki z obciążnikami, dla którego wychylenie czujnika zegarowego wynosi 0. Wyniki należy zestawić w tab. 2.

Tabela 1

Wymiary geometryczne pręta	[mm]	Wielkości wyliczone	
Długość pręta (l)		Współrzędna y_s środka ciężkości [mm]	
Wysokość przekroju (H)		Współrzędna z_s środka ciężkości [mm]	
Szerokość półki (B)		Moment bezwładności I_y [mm ⁴]	
Szerokość środka (b)		Wskaźnik wytrzymałości W_y [mm ³]	
Wysokość półki (g)			

Tabela 2

Siła [kG]	P_1+P_2	P_3		P_4		P_5	
Siła [N]	P_1+P_2	P_3		P_4		P_5	
Położenie szalki względem osi środka przy braku skręcania k [mm]							

5. OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTYCZNE DO SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać:

- I. Cel ćwiczenia
- II. Wstęp teoretyczny
- III. Rysunek i opis stanowiska pomiarowego
- IV. Część obliczeniową, w której należy:
 1. Uzupelnąć tab. 1 i tab. 2.
 2. Wyznaczyć położenie środka ciężkości przekroju.
 3. Wyznaczyć na podstawie zależności teoretycznych położenie środka ścinania.
 4. Wyznaczyć dopuszczalną wartość siły obciążającej P_{dop} .
 5. Wyznaczyć położenie środka ścinania z wszystkich pomiarów rozpatrując wypadkową równoległego układu sił (P_1 oraz $P_2 + P_i$).
 6. Sporządzić w skali 2:1 (np. na papierze milimetrowym) rysunek przekroju i zaznaczyć na nim:
 - położenie środka ciężkości;
 - główne centralne osie bezwładności y i z ;
 - położenie środka ścinania wyznaczone z zależności teoretycznych oraz wyznaczone doświadczalnie.
- V. Wnioski z ćwiczenia.

6. PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Podać definicję środka ścinania.
2. Omówić sposób wyznaczania naprężeń stycznych wywołanych siłą poprzeczną.
3. Wyznaczyć rozkład naprężeń stycznych w przekroju teowym ścinanym siłą T .
4. Gdzie znajduje się środek ścinania w przypadku pręta o przekroju symetrycznym?
5. Czy położenie środka ścinania zależy od wartości siły poprzecznej?
6. Jak położona jest linia łącząca środki ścinania poszczególnych przekrojów poprzecznych w stosunku do osi pręta prostego o stałym przekroju?
7. Czy środek ścinania może leżeć poza przekrojem poprzecznym?
8. Czy środek ścinania pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju?

7. LITERATURA

1. Beluch W., Burczyński T., Fedeliński P., John A., Kokot G., Kuś W.: *Laboratorium z wytrzymałości materiałów*. Wyd. Politechniki Śląskiej, Skrypt nr 2285, Gliwice, 2002.
2. Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.
3. Boruszak A., Sygulski R., Wrześniowski K.: *Wytrzymałość materiałów. Doświadczalne metody badań*, PWN, Warszawa-Poznań 1984.
4. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*, t. I-II, WNT, Warszawa 1996-97.
5. *Ćwiczenia z wytrzymałości materiałów. Laboratorium*, Praca zbior. pod red. Lambera T., Skrypty uczelniane Pol. Śl., nr 1527, Gliwice 1990.