SYSTEMY ROZMYTE

ZBIORY ROZMYTE

I

WNIOSKOWANIE PRZYBLIŻONE

1965 – Lotfi A. Zadeh: „Fuzzy sets”

Metoda reprezentacji wiedzy wyrażonej w języku naturalnym:

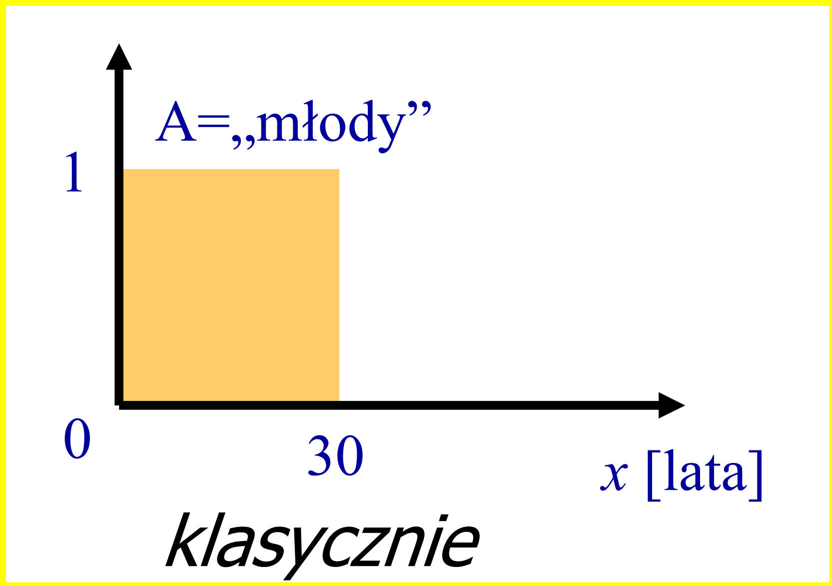
- „Temperatura wynosi 29^{o}C” – informacja liczbowa - naturalna dla systemów komputerowych.
- „Jest dość ciepło” – informacja opisowa - naturalna dla człowieka.

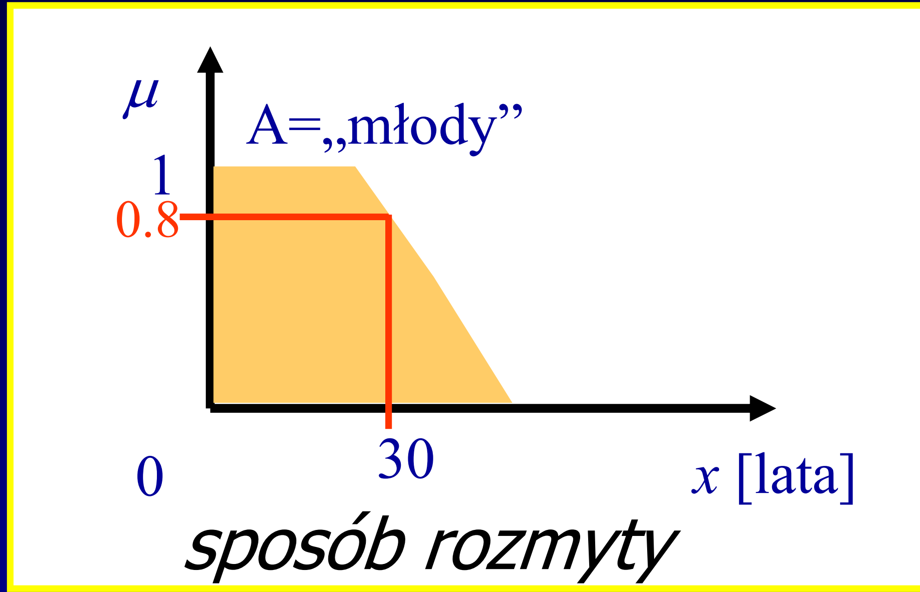
Klasyczna teoria zbiorów: dowolny element należy lub nie należy do danego zbioru.

Teoria zbiorów rozmytych: element może częściowo należeć do pewnego zbioru.

Zamiast dwóch wartości logicznych (prawda i fałsz) nieskończenie wiele wartości [0,1].

Np.: „młody człowiek”:





Umożliwiają formalne określenie pojęć nieprecyzyjnych i wieloznacznych:

- „wysoki hałas”,
- „małe zarobki”,
- „niskie zużycie paliwa”.

Obszar rozważań $\mathbf{X}$ (*the universe of discourse*) - zbiór nierozmyty (np. płaca w Niemczech i w Polsce).

Zbiór rozmyty w pewnej przestrzeni (niepustej) $\mathbf{X}$ - zbiór par :

$$\boxed{A = \left\{ (x, \mu_A(x)); x \in \mathbf{X} \right\} \bigwedge_x}$$

$\mu_A(x)$ – funkcja przynależności zbioru rozmytego A.

Funkcja przynależności – przypisuje każdemu elementowi $x \in \mathbf{X}$ stopień jego przynależności do zbioru rozmytego A

- $\mu_A(x) = 1$ – pełna przynależność elementu x do zbioru rozmytego A;
- $\mu_A(x) = 0$ – brak przynależności x do zbioru rozmytego A;
- $0 \le \mu_A(x) \le 1$ – częściowa przynależność x do zbioru rozmytego A.

Symboliczny zapis zbioru rozmytego o skończonej liczbie elementów:

$$A = \boxed{\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}} \boxed{+} \boxed{\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}} \boxed{+} \ldots \boxed{+} \boxed{\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}} \boxed{\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}}$$

suma mnogościowa przyporządkowanie

Np. „Ciepła woda na basenie":

- Obszar rozważań: $\mathbf{X} = [20, 21, ..., 29]$
- Zbiór rozmyty A (subiektywnie!):

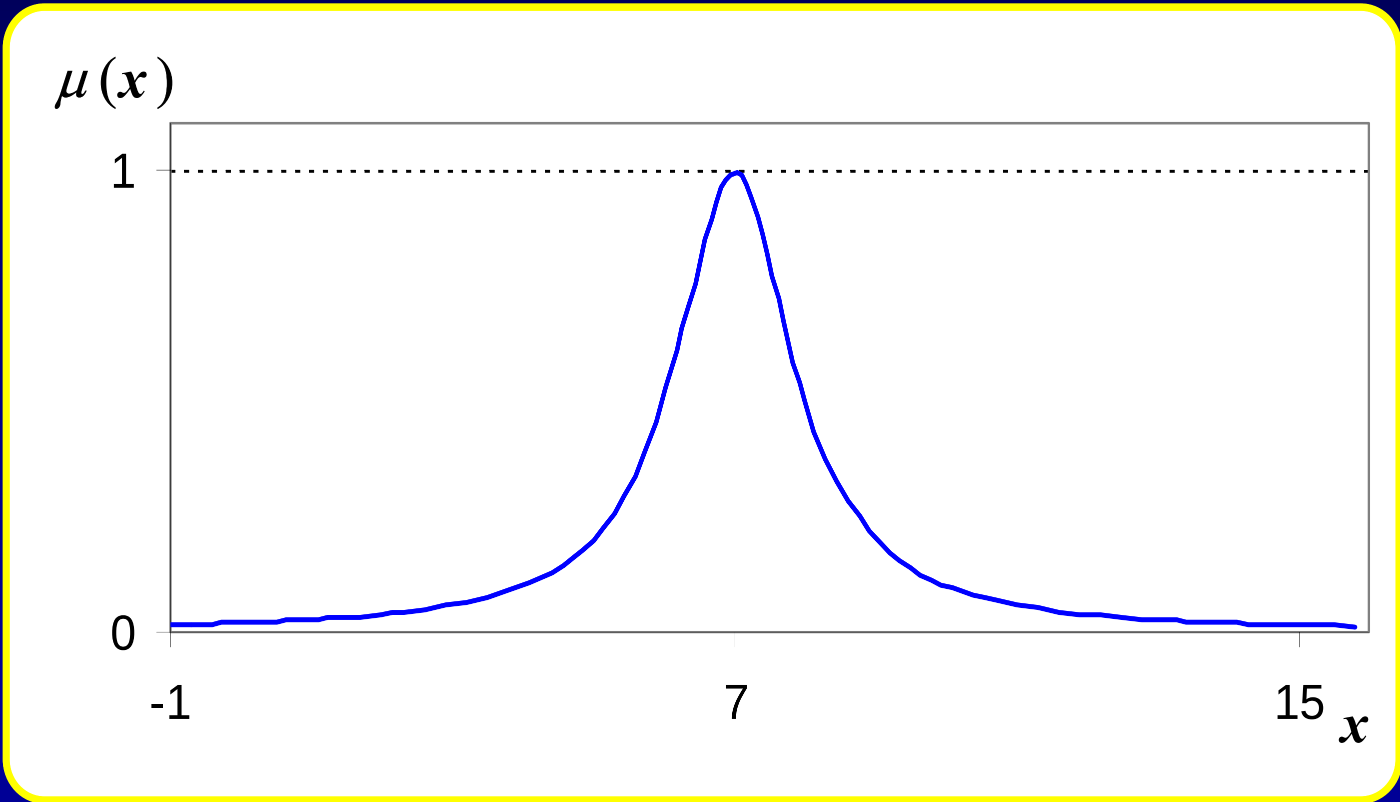
$$\boxed{A = \frac{0.1}{20} + \frac{0.3}{21} + \frac{0.4}{22} + \frac{0.6}{23} + \frac{0.8}{24} + \frac{1}{25} + \frac{0.9}{26} + \frac{0.8}{27} + \frac{0.75}{28} + \frac{0.7}{29}}$$

Jeśli $\mathbf{X}$ - przestrzeń o nieskończonej liczbie elementów, to zapis symboliczny:

$$\boxed{A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x}}$$

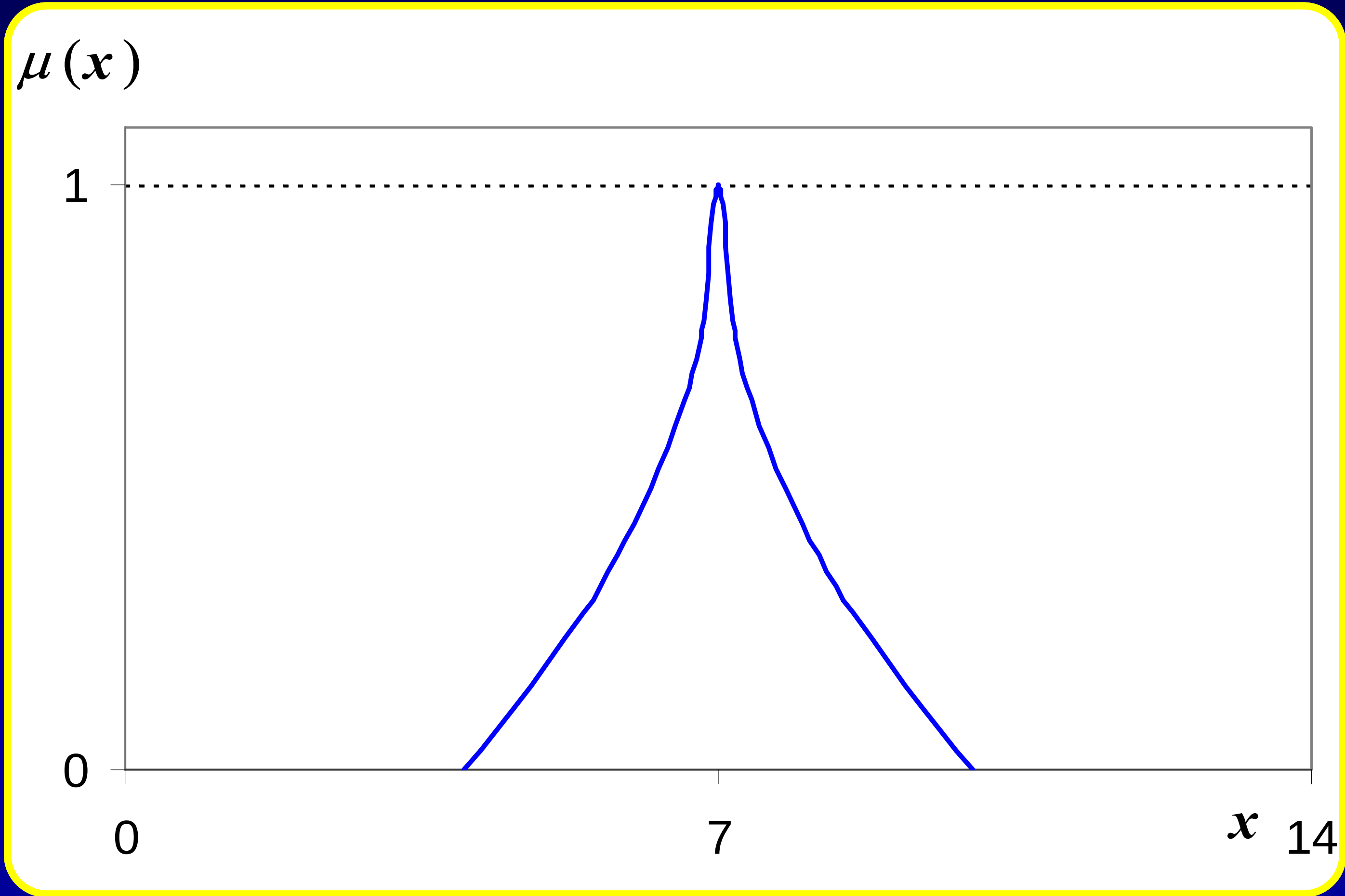
Np. „Zbiór liczb bliskich liczbie 7”:

a) $$\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-7)^2} \quad \Rightarrow \quad A = \int_x \frac{\left[1+(x-7)^2\right]^{-1}}{x}$$



Np. „Zbiór liczb bliskich liczbie 7”:

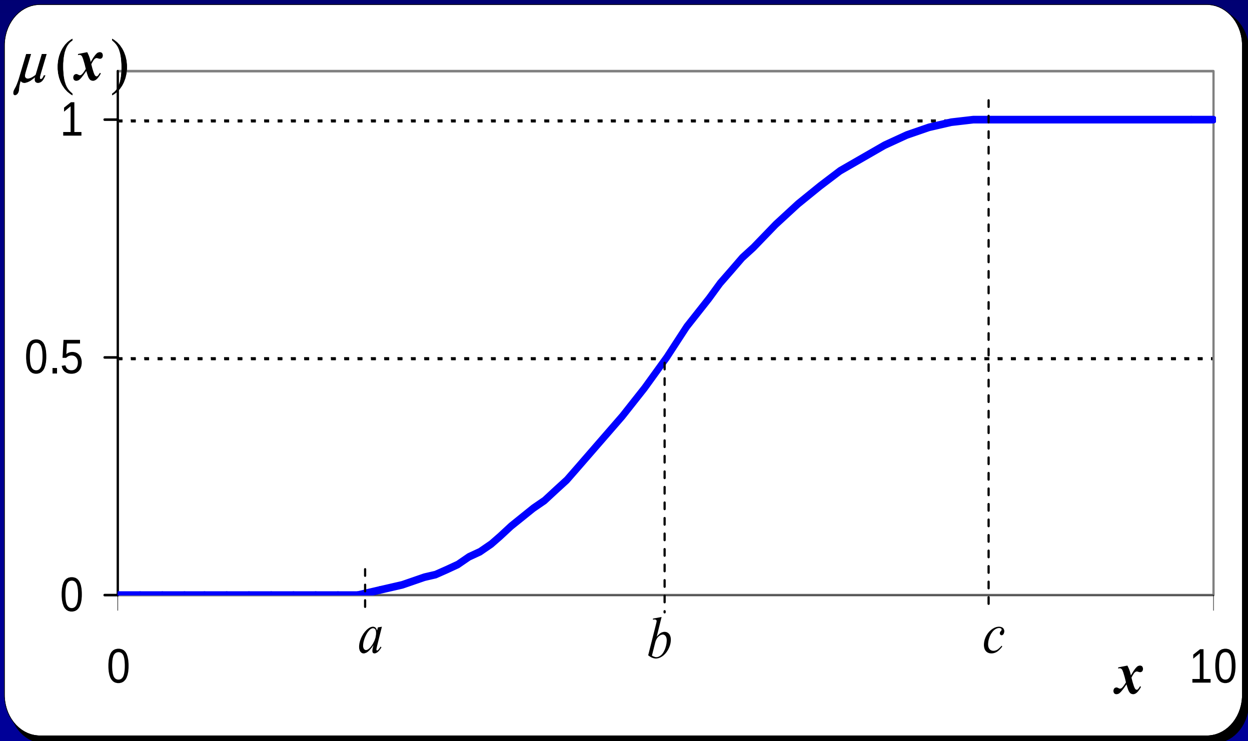
$$\mu_A(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{\dfrac{|x-7|}{3}} & \text{jeżeli} \quad 4 \le x \le 10 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$



STANDARDOWE FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI

F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY s

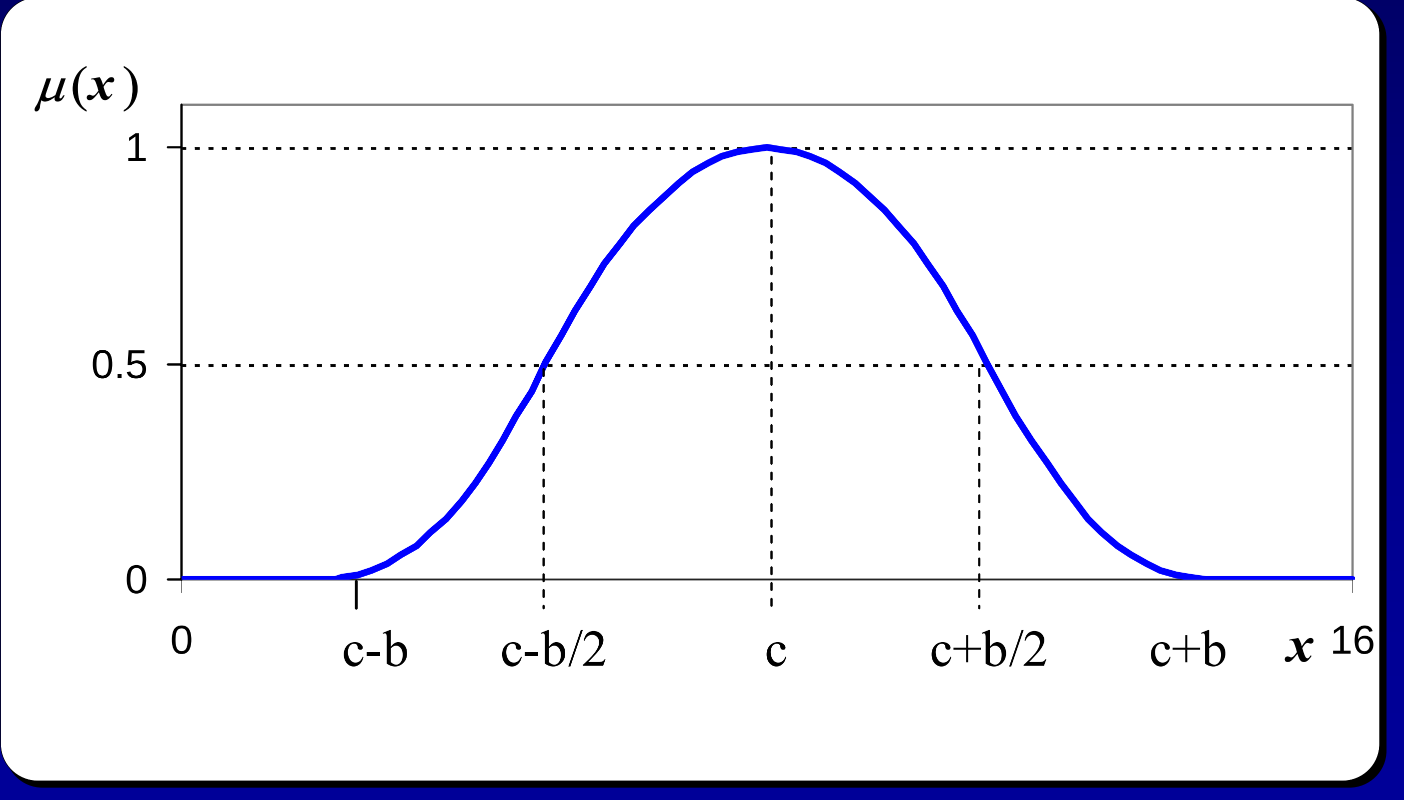
$$s(x;a,b,c)=\begin{cases}0 & \text{dla } x \le a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{dla } b \le x \le a \\ 1-2\left(\dfrac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{dla } b \le x \le c \\ 1 & \text{dla } x \ge c\end{cases}$$



F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY π

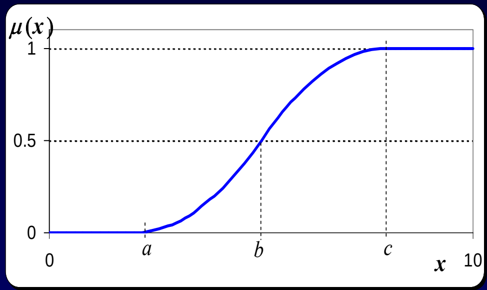
(zdef. poprzez klasę s)

$$\pi(x;b,c)=\begin{cases} s(x;c-b,c-b/2,c) & \text{dla } x\le a \\ 1-s(x;c,c+b/2,c+b) & \text{dla } x\ge c \end{cases}$$

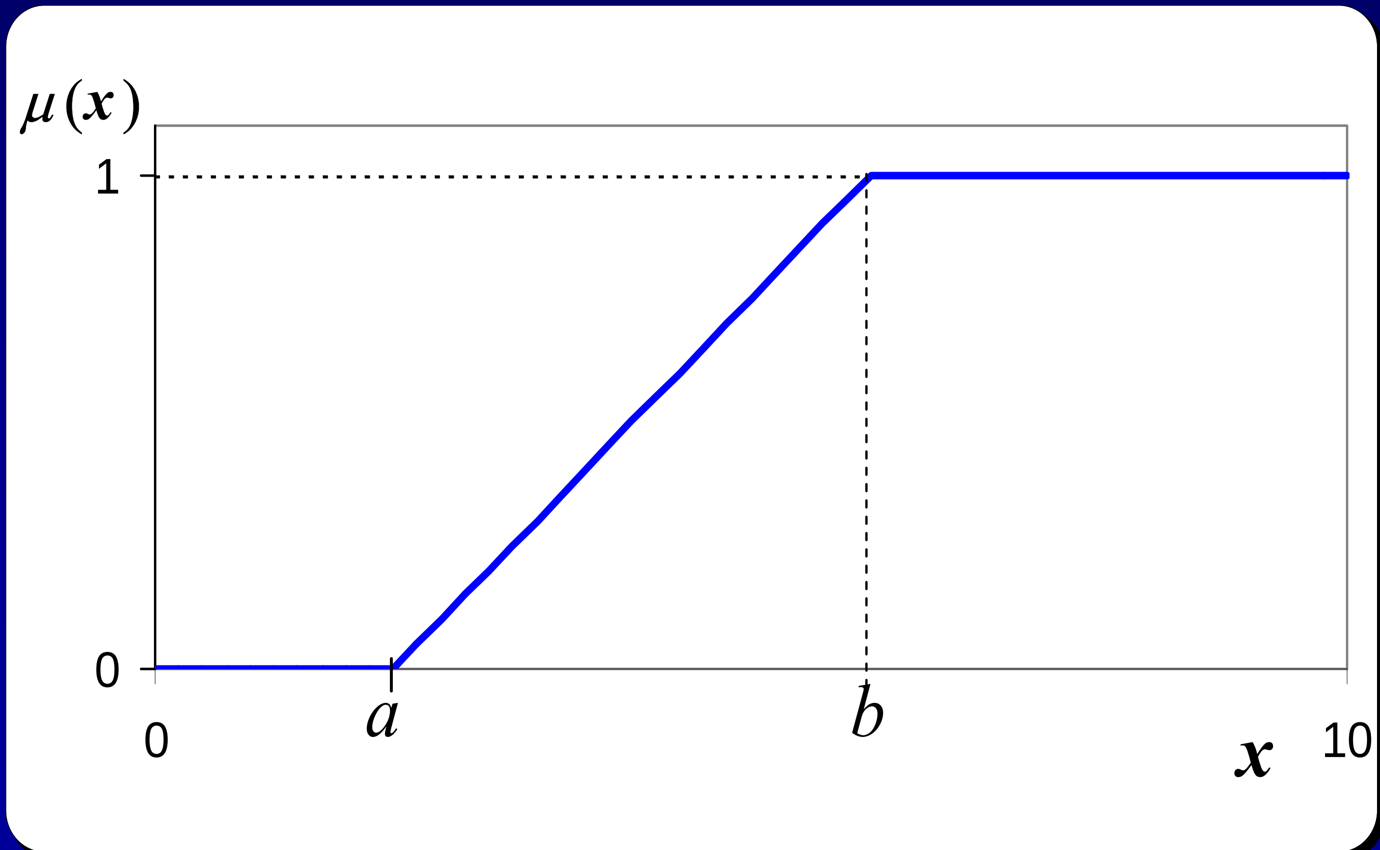


F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY γ

(alternatywa dla s)

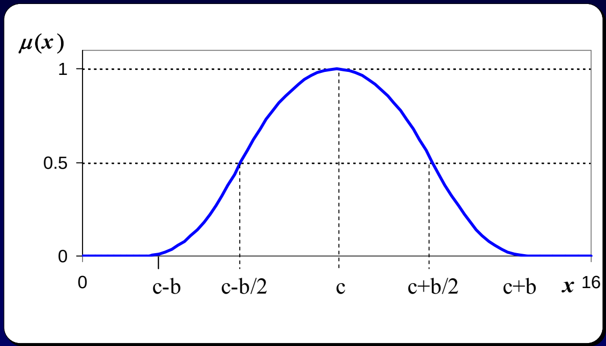


$$\gamma(x;a,b) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \le x \le b \\ 1 & \text{dla } x \ge b \end{cases}$$

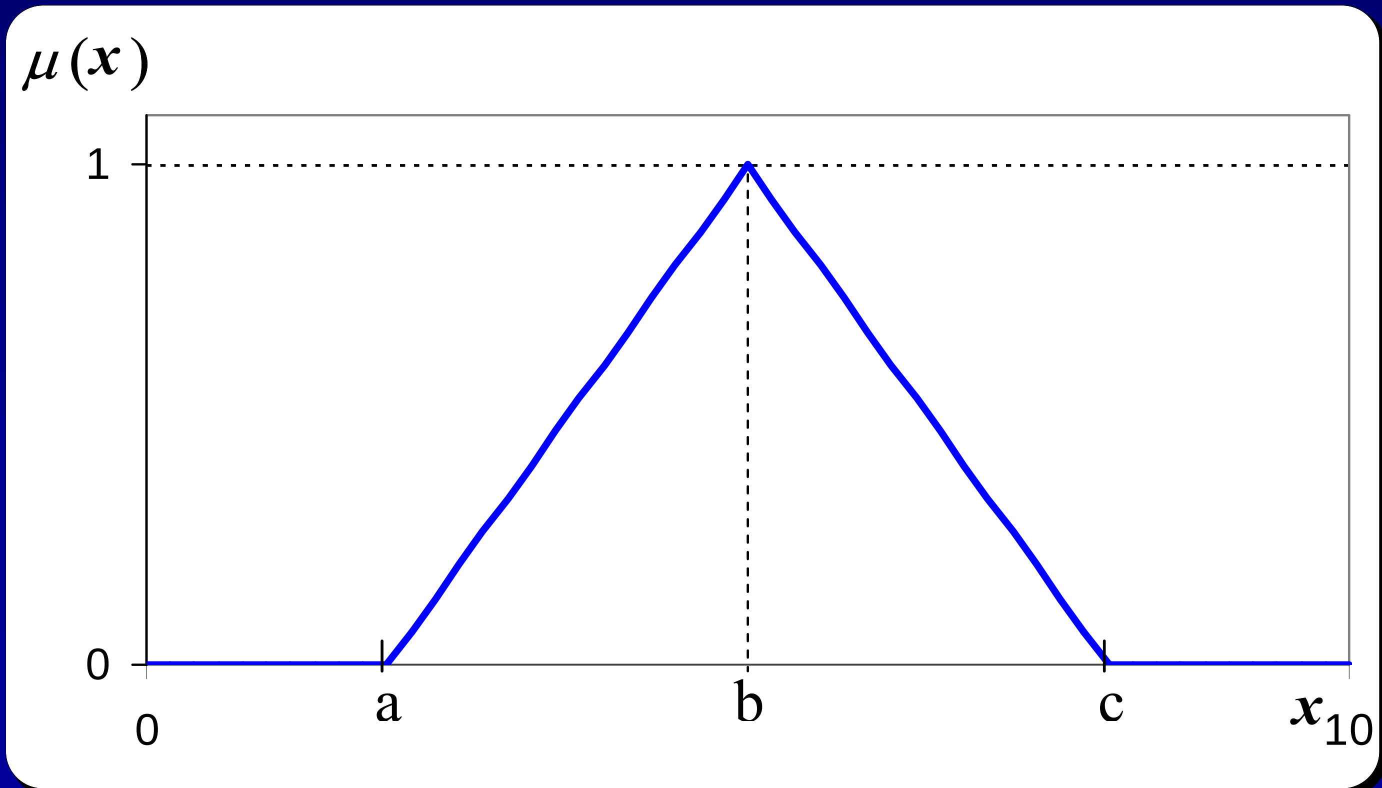


F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY t

(alternatywa dla π)

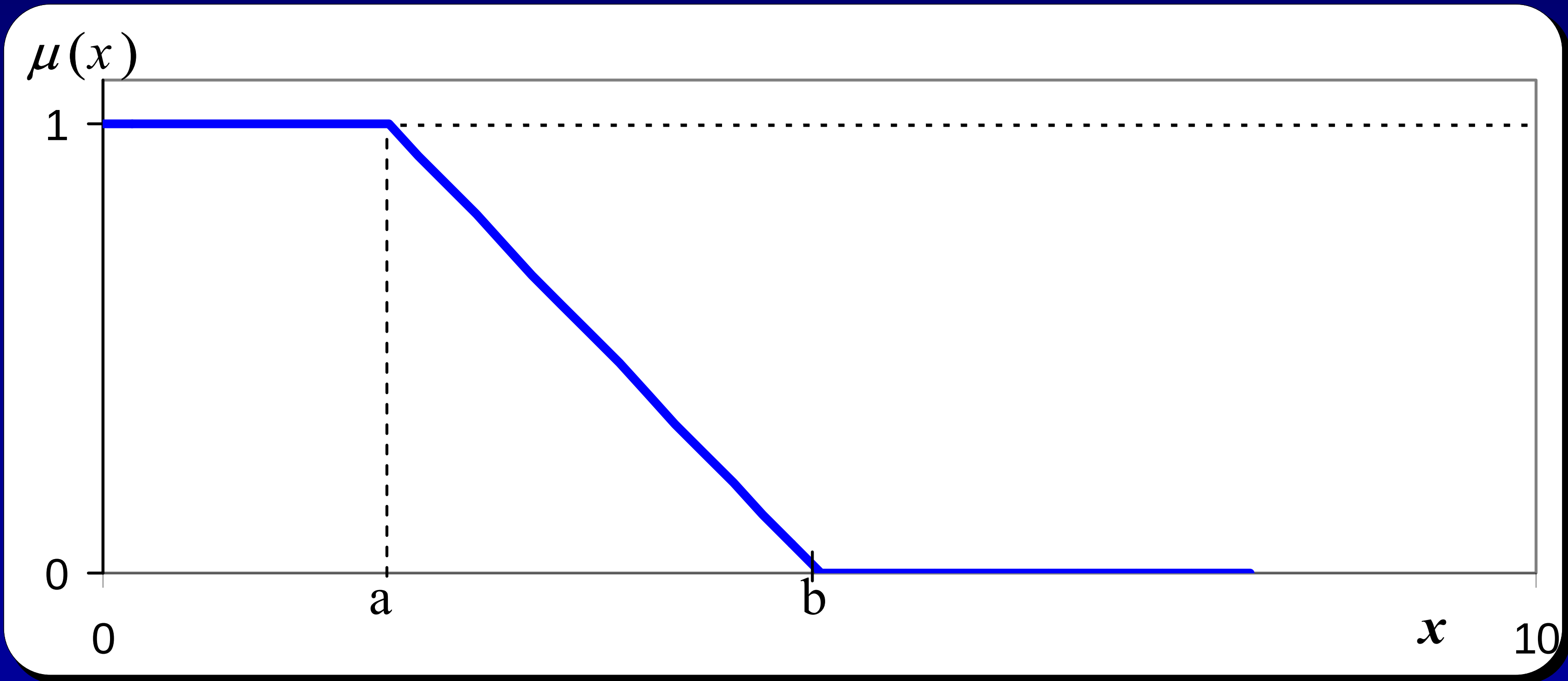


$$t(x;a,b,c)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla } a\le x\le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{dla } b\le x\le c \\ 1 & \text{dla } x\ge c \end{cases}$$



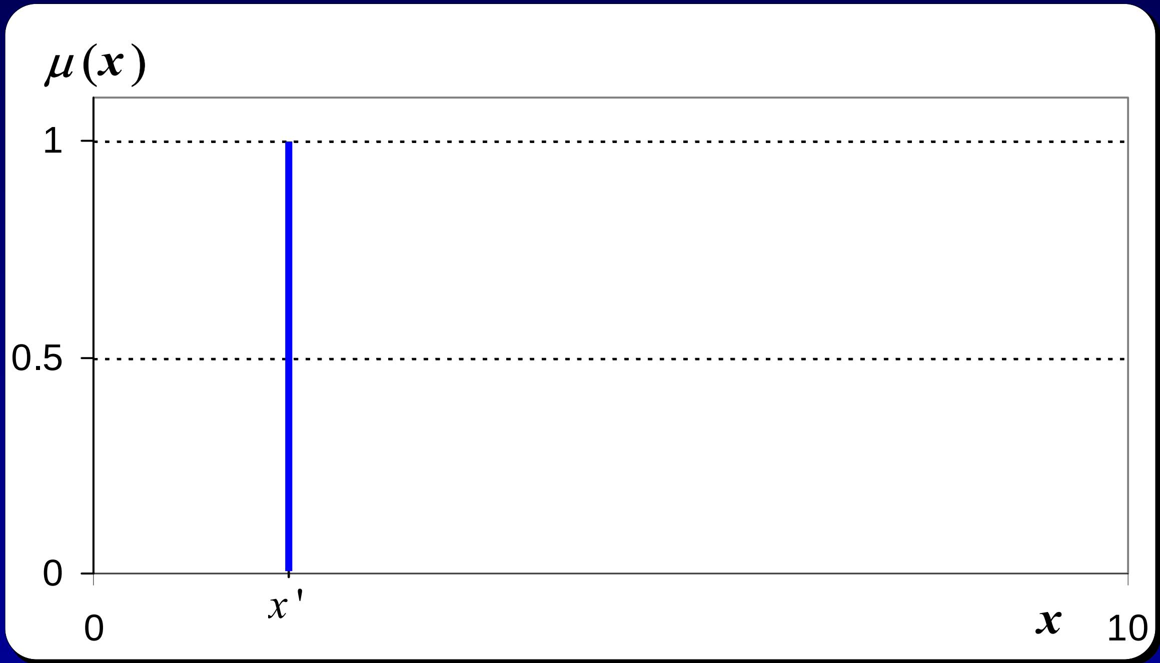
F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY L

$$L(x;a,b)=\begin{cases}1 & \text{dla } x \le a\\ \dfrac{b-x}{b-a} & \text{dla } a \le x \le b\\ 0 & \text{dla } x \ge b\end{cases}$$



F. PRZYNALEŻNOŚCI KLASY *singleton*

$$\mu_A(x) = \delta(x - \overline{x}) = \begin{cases} 1 \text{ jeżeli } x = \overline{x} \\ 0 \text{ jeżeli } x \neq \overline{x} \end{cases}$$

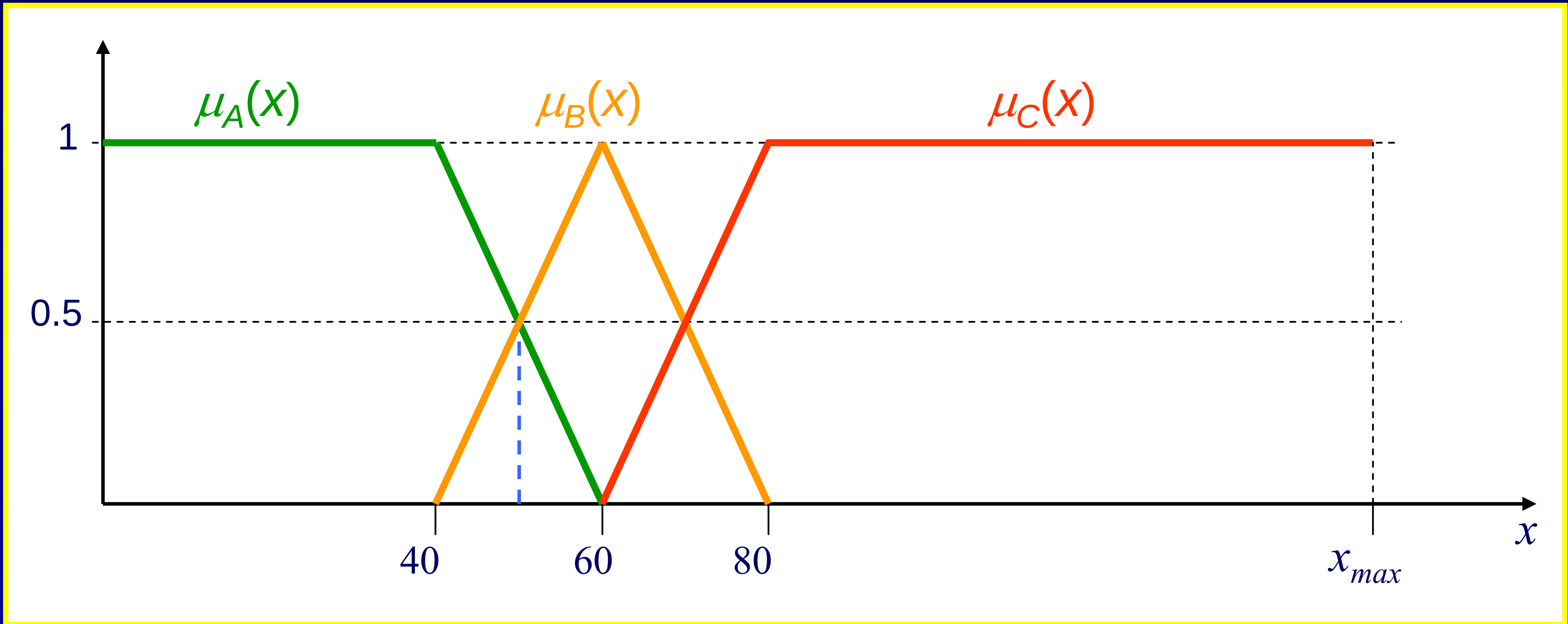


Singleton charakteryzuje jednoelementowy zbiór rozmyty.

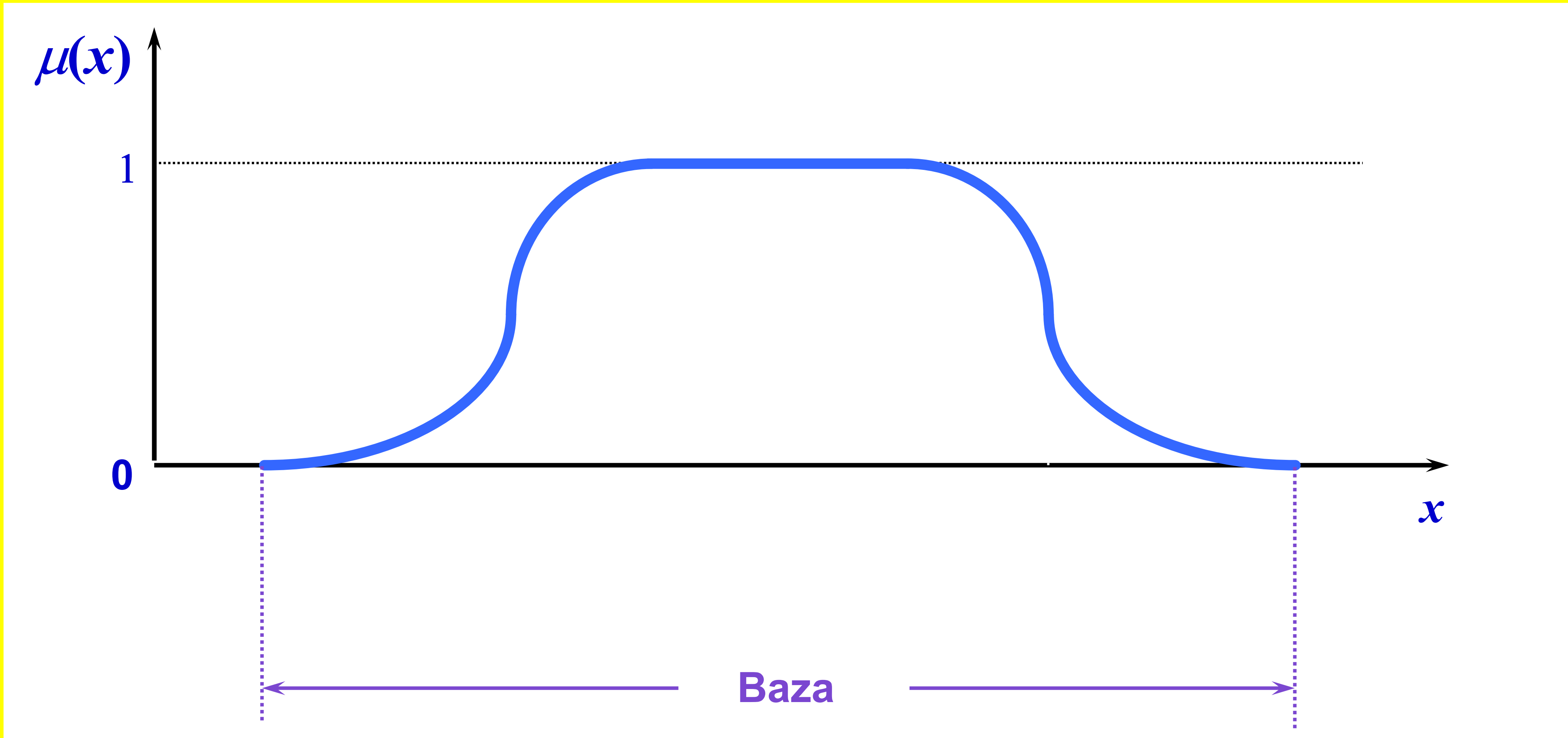
Funkcja ta jest wykorzystywana głównie do operacji rozmywania w systemach wnioskujących.

Np.: prędkość samochodu: $\mathbf{X}: [0, x_{max}]$

- Mała prędkość samochodu (A) – typ L
- Średnia prędkość samochodu (B) – typ t
- Duża prędkość samochodu (C) – typ γ



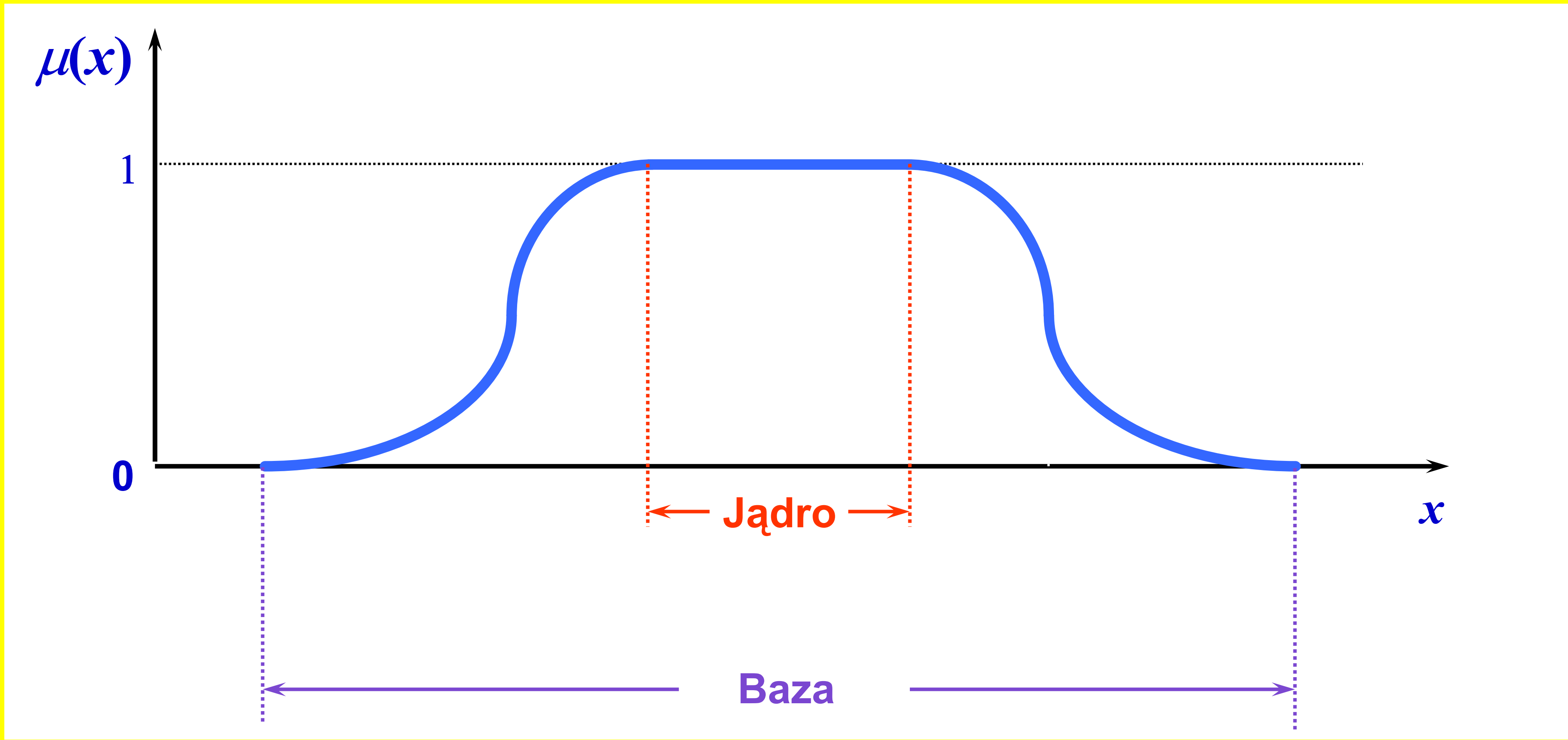
$$x=50 \Rightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)=0.5, \ \ \mu_C(x)=0$$



Nośnik (baza) zbioru rozmytego A:

zbiór elementów ZR, dla których $\mu(x) > 0$

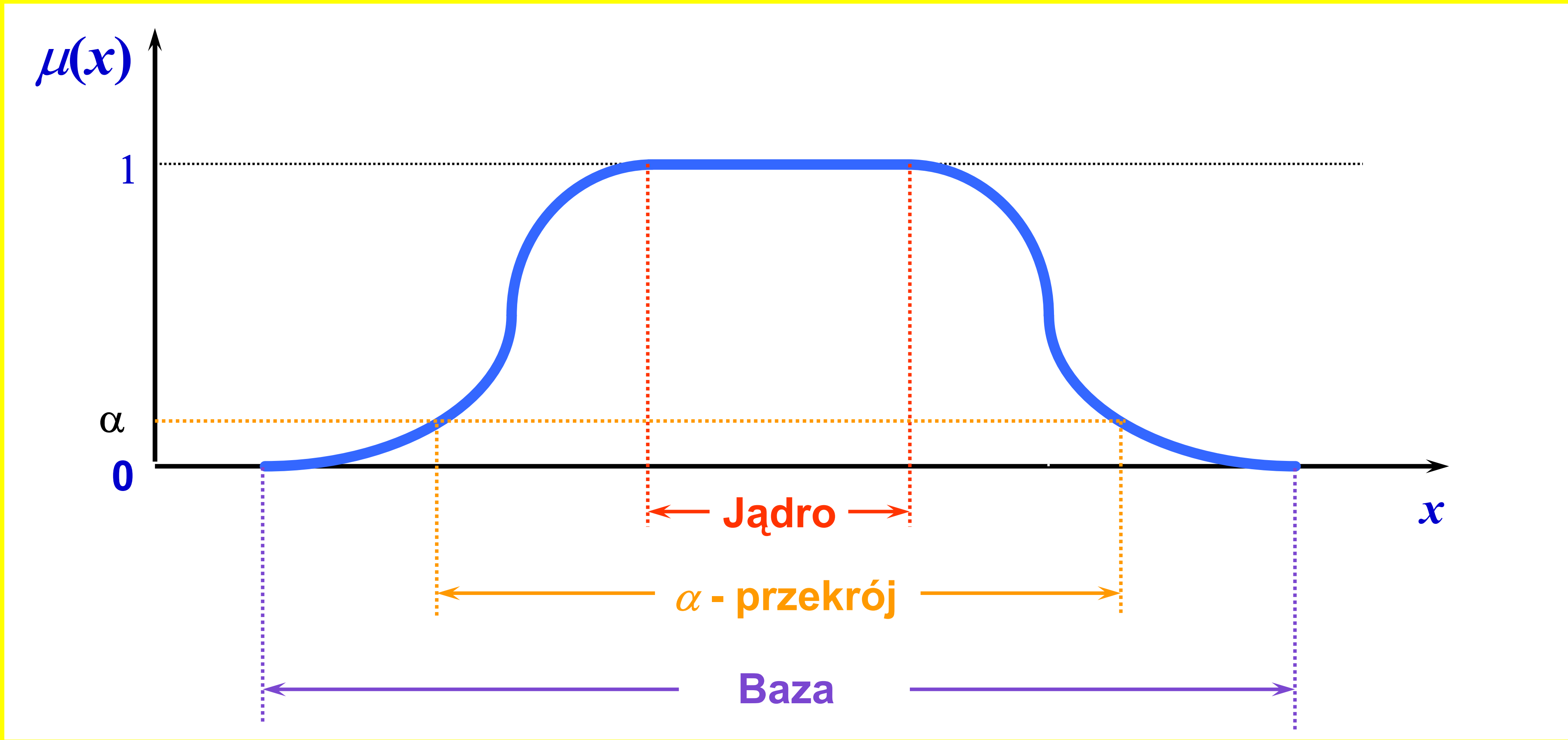
$$\boxed{\operatorname{supp} A = \{x \in \mathbf{X}; \mu_A(x) > 0\}}$$



Jądro zbioru rozmytego A:

zbiór elementów ZR, dla których $\mu(x) = 1$

$$\boxed{core(A) \;=\; \{\, x \in X : \mu_A(x) = 1 \,\}}$$



α **-przekrój** zbioru rozmytego A:
zbiór nierozmyty taki, że:

$$A_\alpha = \{x \in \mathbf{X} : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \forall(\alpha \in [0,1]$$

Np.:

$$A = \frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.6}{8} + \frac{0.3}{10}$$

$$X = \{1, \ldots, 10\}$$

$$A_0 = X = \{1, \ldots, 10\},$$

$$A_{0.1} = \{2, 4, 5, 8, 10\},$$

$$A_{0.3} = \{4, 5, 8, 10\},$$

$$A_{0.6} = \{5, 8\},$$

$$A_{0.7} = \{5\}.$$

Wysokość zbioru rozmytego A**:**

$$h(A) = \sup_{x \in A} \mu_A(x)$$

Zbiór normalny: $h(A) = 1$

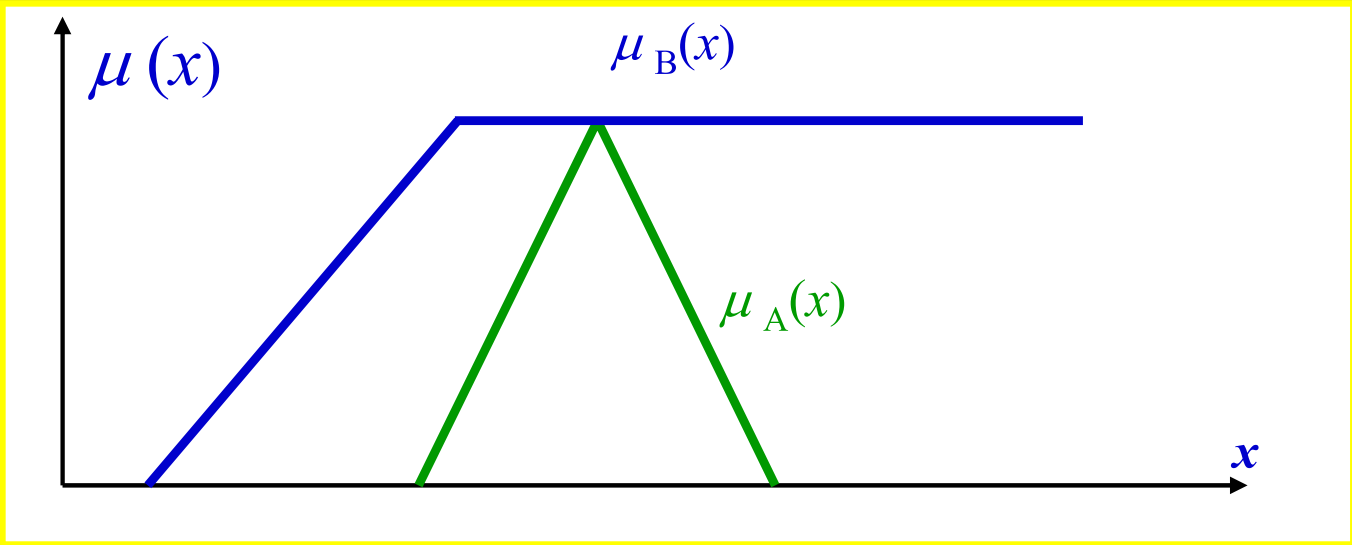
Normalizacja zbioru: $\mu_{A_N}(x) = \dfrac{\mu_A(x)}{h(A)} \quad \bigwedge_{x \in X}$

Np.:

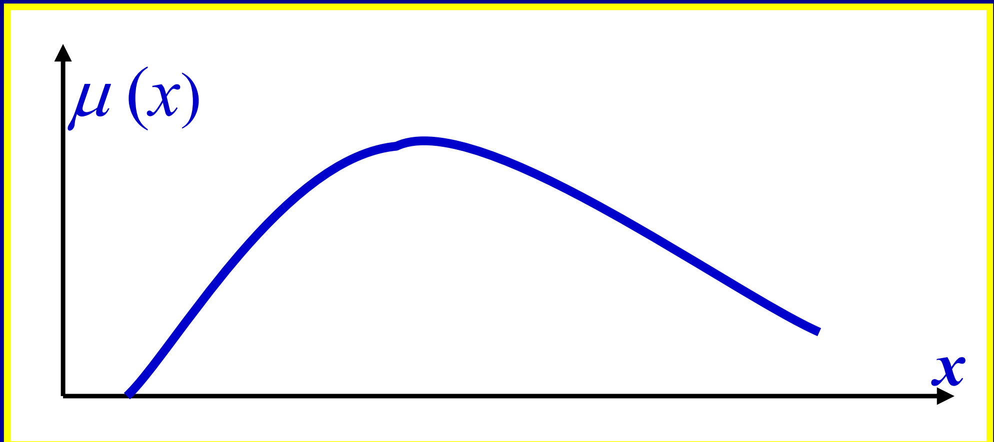
- przed normalizacją: $A = \dfrac{0.2}{3} + \dfrac{0.5}{5} + \dfrac{0.4}{7}$

- po normalizacji: $A_N = \dfrac{0.4}{3} + \dfrac{1.0}{5} + \dfrac{0.8}{7}$

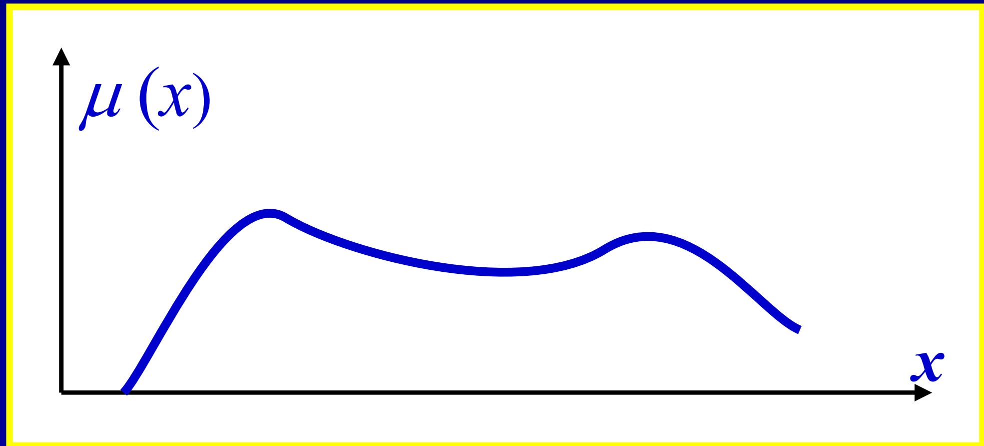
Inkluzja (zawieranie sie ZR A w ZR B):



ZR wypukły:

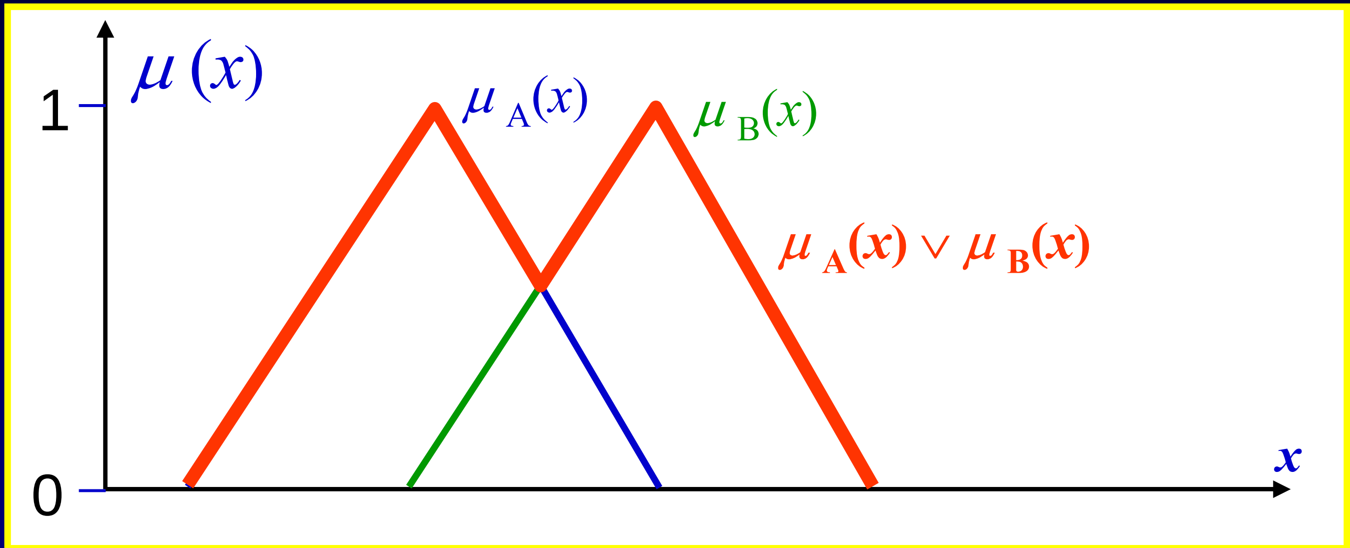


ZR wklęsły:

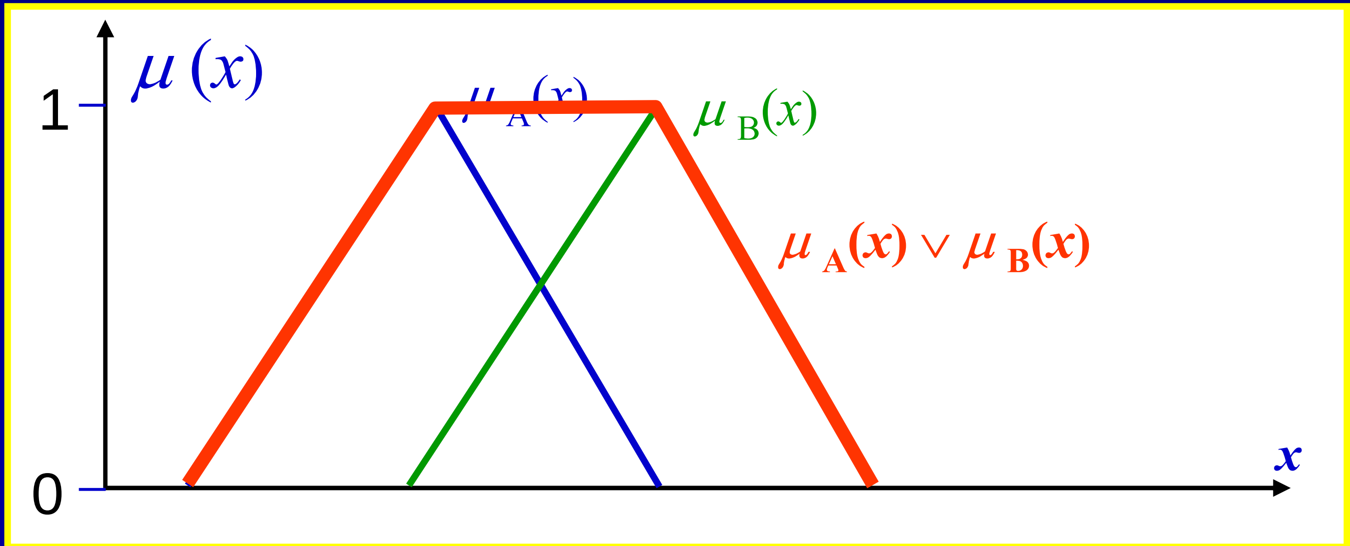


OPERACJE NA ZBIORACH ROZMYTYCH

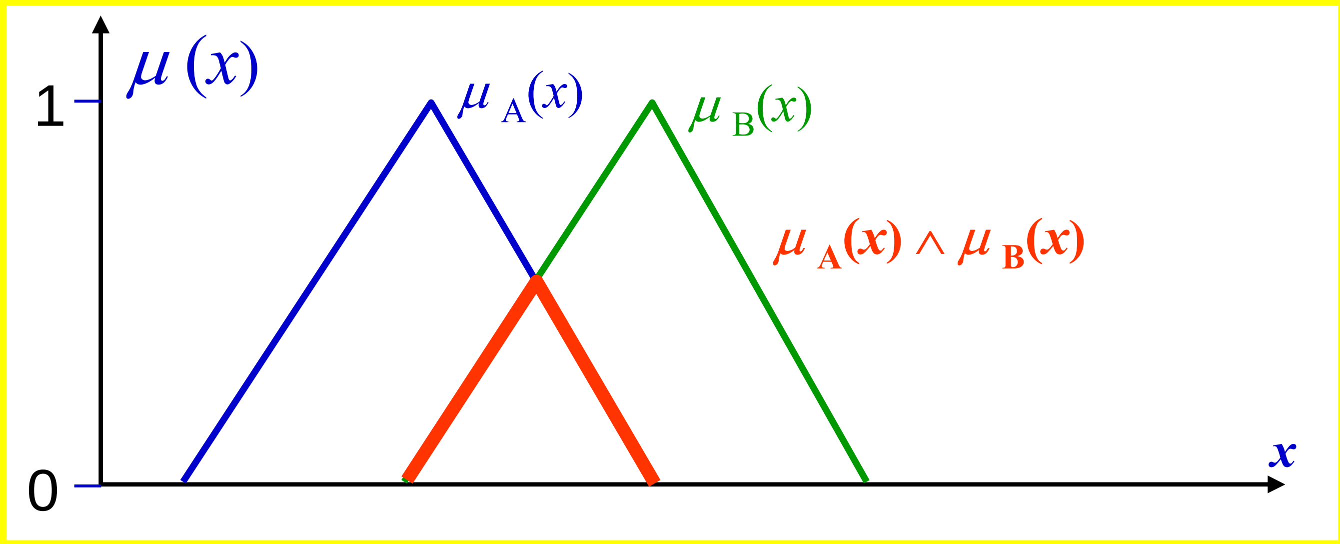
Suma $\mu_{A\vee B}(x)=\min\{1,\ \mu_A(x)+\mu_B(x)\}$ **:**



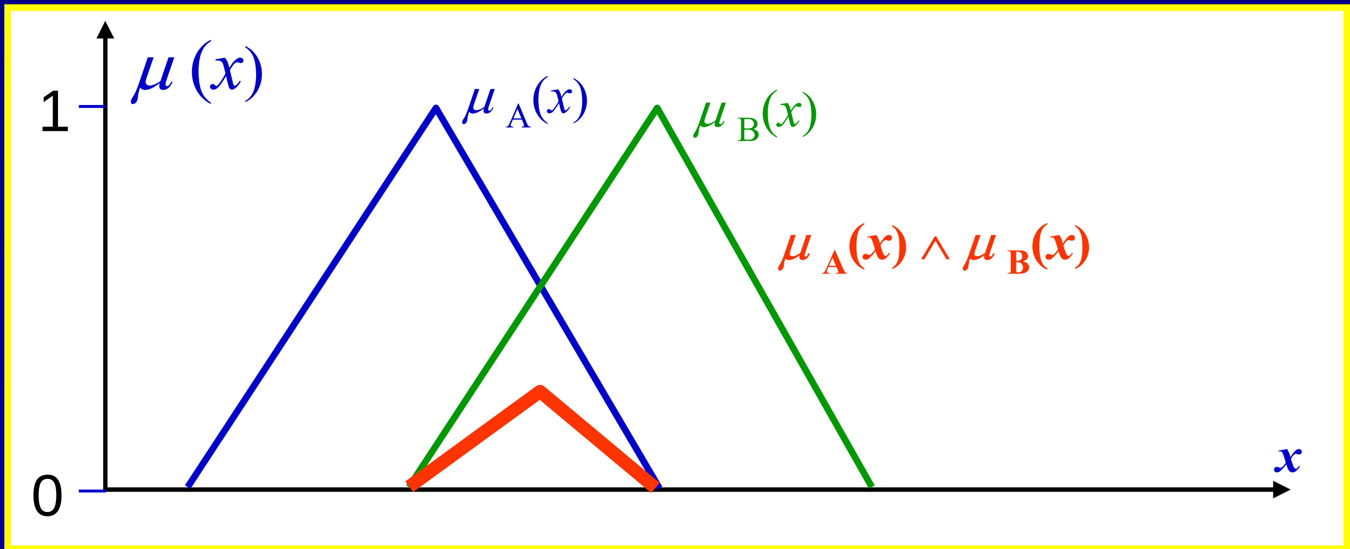
lub $\mu_{A\vee B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$ **:**



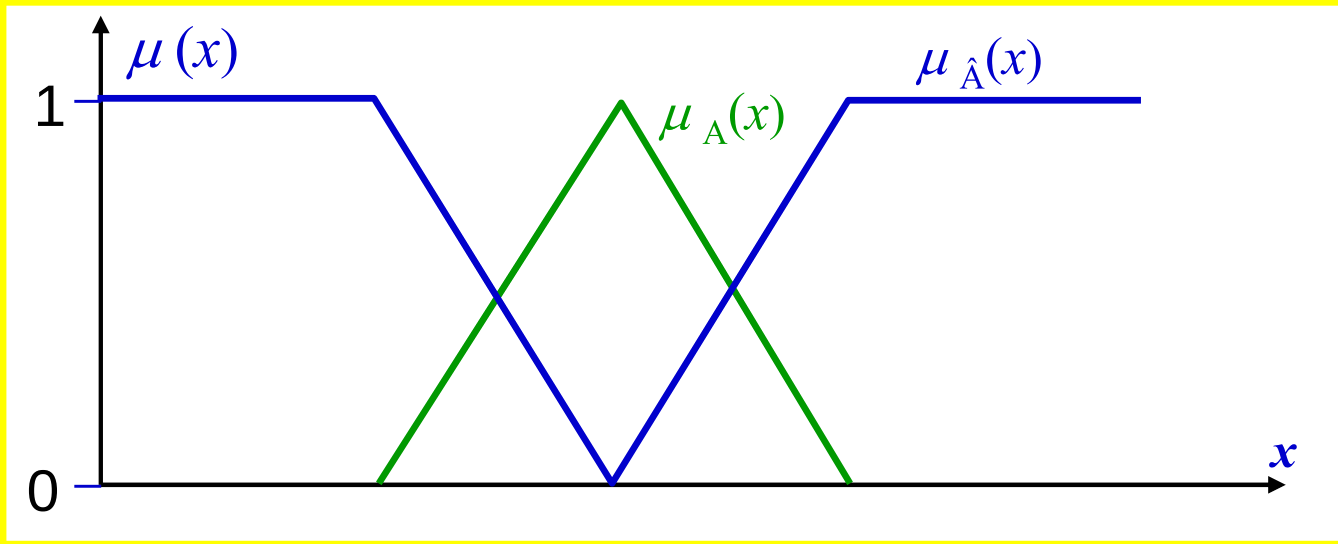
Iloczyn $\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ **:**



lub $\mu_{A \wedge B}(x) = \mu_A(x) \bullet \mu_B(x)$:



Dopełnienie zbioru rozmytego:



Równość dwu ZR A i B:

$$\boxed{\mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}}$$

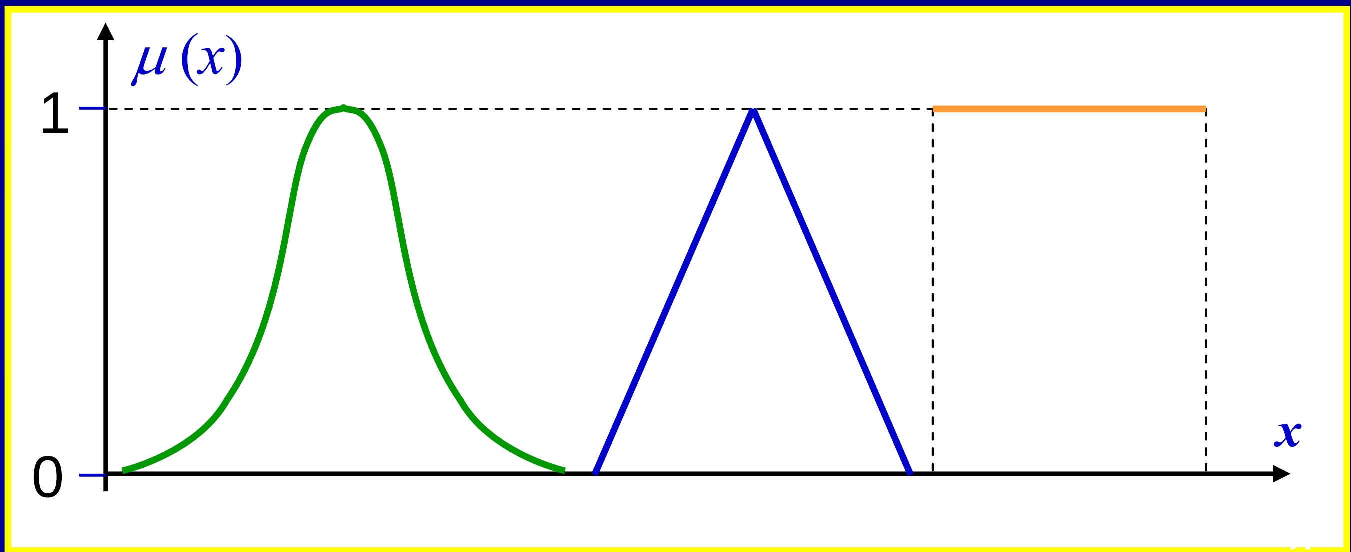
LICZBY ROZMYTE:

Zbiory rozmyte, zdefiniowane na osi liczb rzeczywistych.

Wymagania:

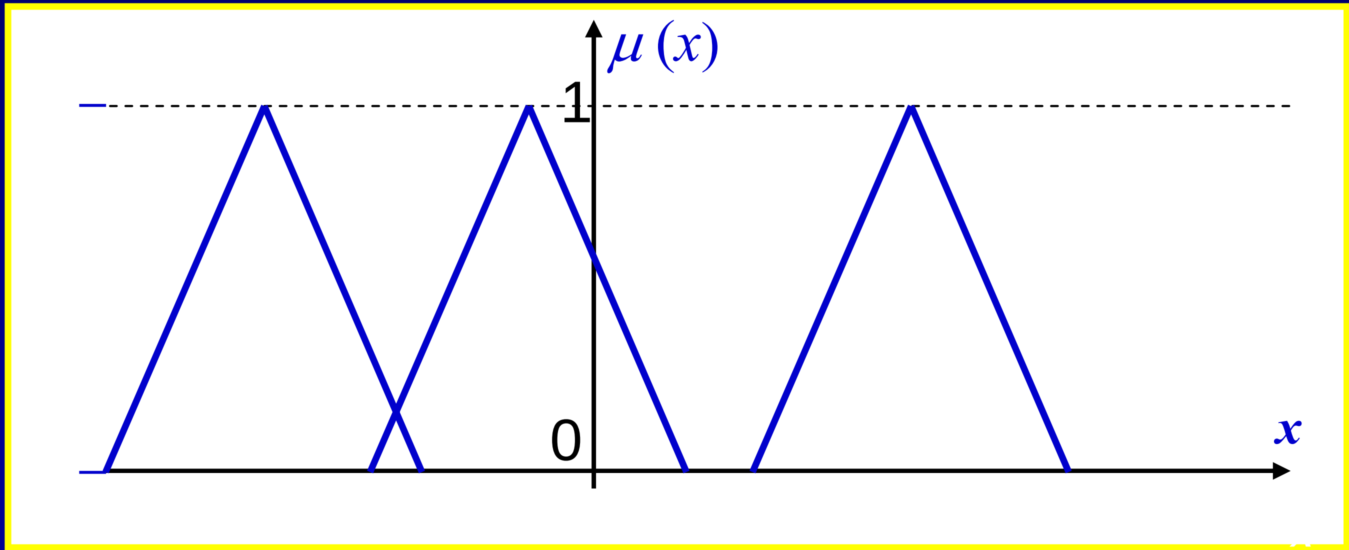
- zbiór normalny: $h(A)=1$;
- zbiór wypukły;
- funkcja przynależności przedziałami ciągła.

np.:



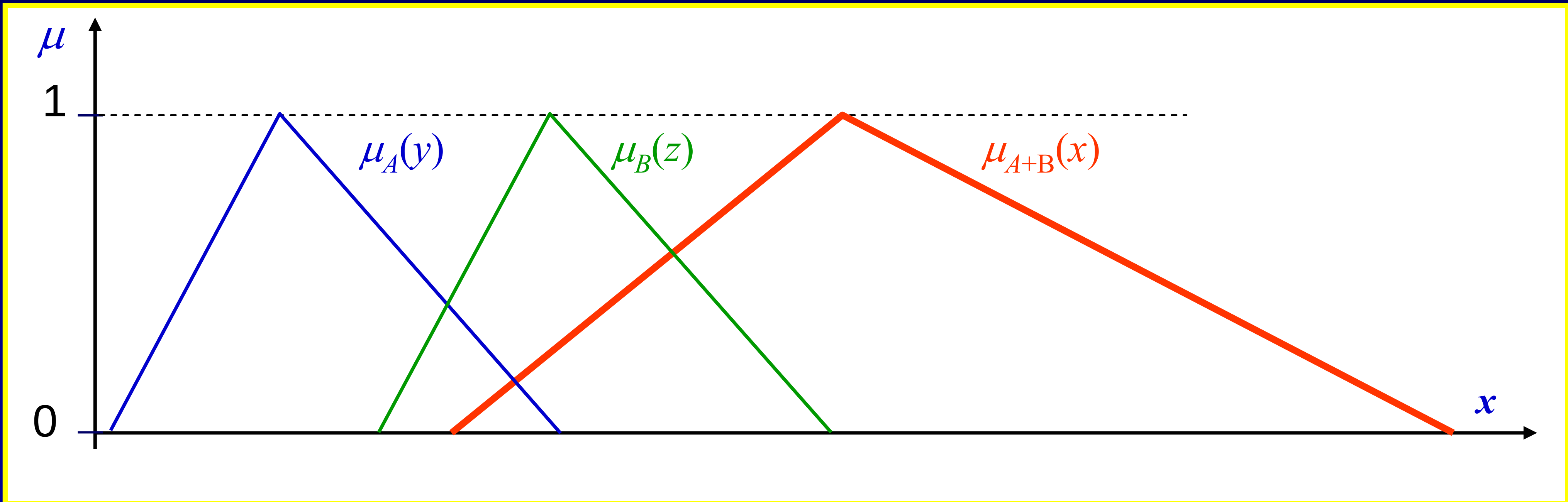
LICZBY ROZMYTE:

- dodatnie
- ujemne;
- ani dodatnie ani ujemne



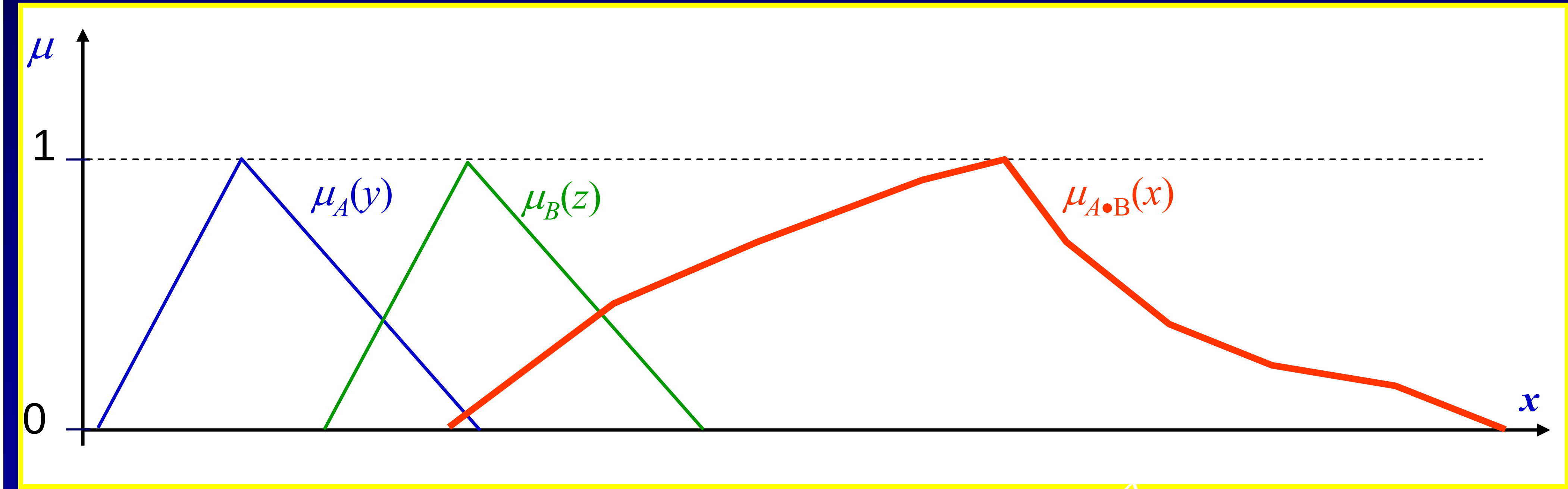
Dodawanie liczb rozmytych:

$$\mu_{A+B}(x) = \max\left\{\mu_A(y), \mu_B(z) \;\middle|\; x = y + z\right\}$$



Mnożenie liczb rozmytych:

$$\mu_{A \bullet B}(x) = \min\left\{\mu_A(y), \mu_B(z) \;\middle|\; x = y \cdot z\right\}$$



PRZYBLIŻONE WNIOSKOWANIE

REGUŁY WNIOSKOWANIA W LOGICE ROZMYTEJ

Reguły, których przesłanki lub wnioski wyrażone są w języku zbiorów rozmytych.

- Reguły pochodzące od ekspertów zwykle wyrażone są w języku nieprecyzyjnym.
- Zbiory rozmyte pozwalają przełożyć ten język na konkretne wartości liczbowe.

Praca systemu decyzyjnego opartego na logice rozmytej zależy od definicji reguł rozmytych w bazie reguł.

Reguły mają postać **IF…AND…THEN**. np.:

IF a is $A1$ **AND** b is $B1$ **THEN** c is $C1$

IF a is $A2$ **AND** b is **NOT** $B2$ **THEN** c is $C2$

gdzie:

a, b, c – zmienne lingwistyczne,

$A1$, ..., $C2$ – zbiory rozmyte.

Zmienne lingwistyczne:

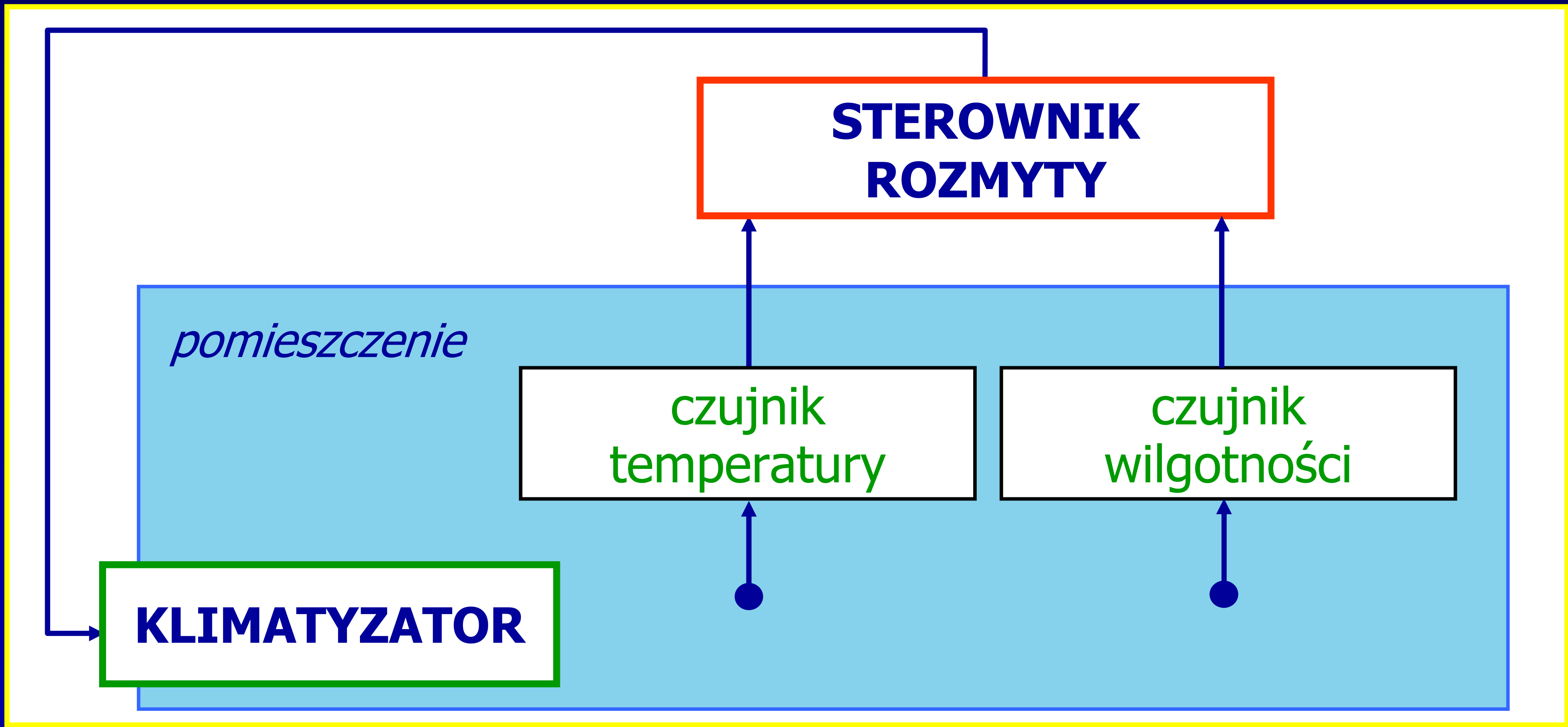
zmienne, które przyjmują jako wartości słowa lub zdania wypowiedziane w języku naturalnym.

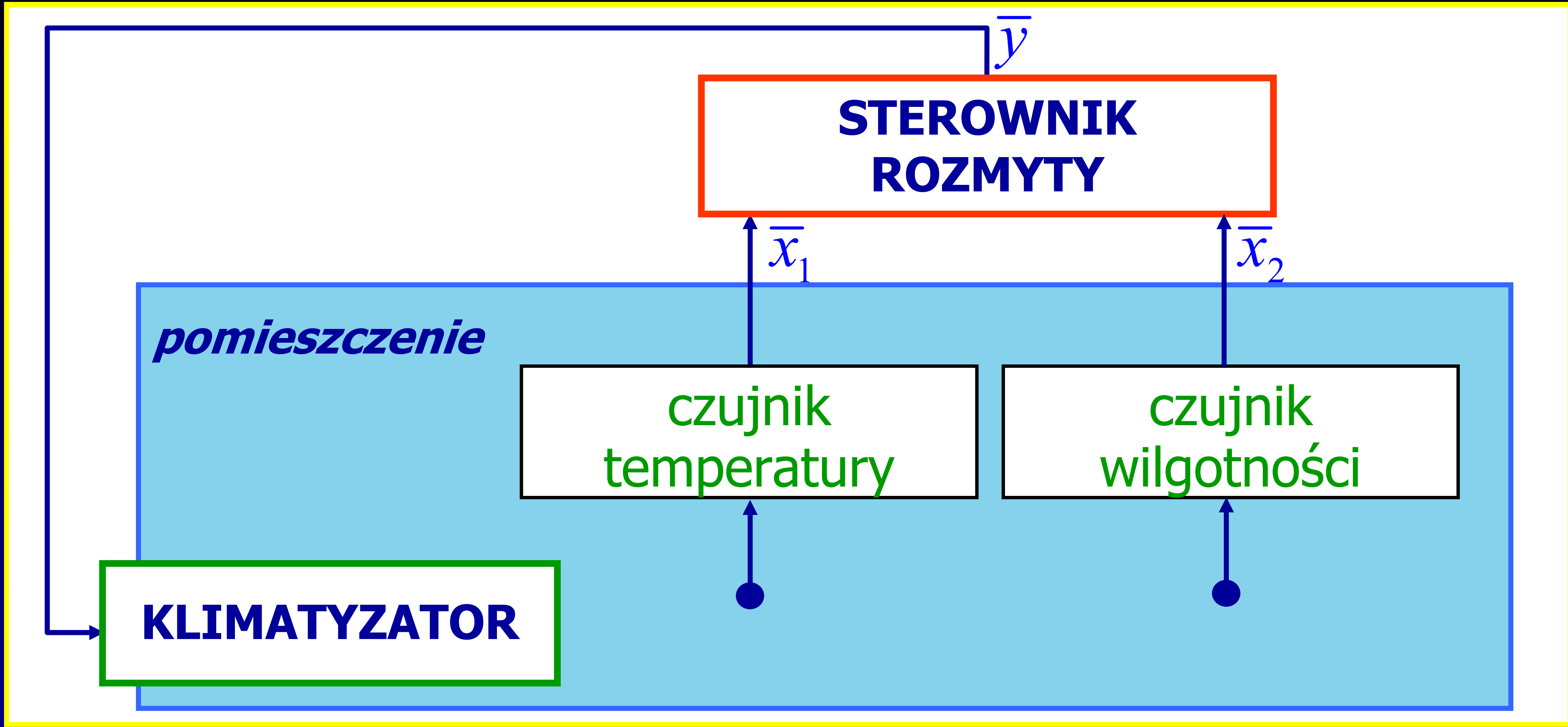
(*również wartości liczbowe*).

STEROWNIKI ROZMYTE

- Nie wymagają tworzenia modelu rozważanego procesu (co często jest trudne);
- Należy jedynie sformułować zasady postępowania w postaci rozmytych reguł (**IF..THEN**).

Np.: Schemat układu klimatyzacji:





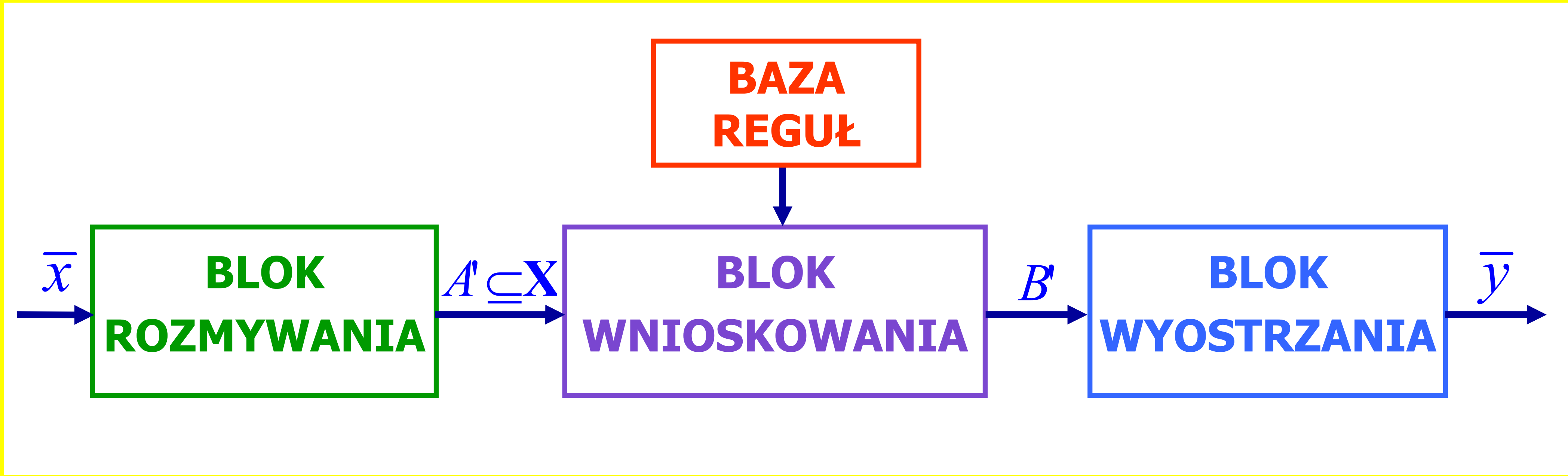
$\overline{x}_1, \overline{x}_2$ – zmierzone wartości wejściowe;

$\overline{y}$ – sygnał sterujący (intensywność chłodzenia).

Zastosowania praktyczne:

- sprzęt AGD (pralki, lodówki, odkurzacze);
- kamery (autofokus);
- nadzór wentylacji w tunelach;
- sterowanie światłami na wjeździe na autostradę;
- klimatyzacja;
- automatyka przemysłowa;
- sterowanie robotów;
- ...

STEROWNIK ROZMYTY:



Baza reguł (model lingwistyczny):

zbiór rozmytych reguł w postaci:

$$R^{(k)}: \textbf{IF } (x_1 \textbf{ is } A_1^k \textbf{ AND } x_2 \textbf{ is } A_2^k \ \ldots \textbf{ AND } x_n \textbf{ is } A_n^k)$$
$$\textbf{THEN } (y_1 \textbf{ is } B_1^k \textbf{ AND } y_2 \textbf{ is } B_2^k \ \ldots \textbf{ AND } y_m \textbf{ is } B_m^k)$$

Np. Sterowanie ogrzewaniem:

Cena ogrzewania	Temperatura		
	mróz	zimno	chłodno
tanio			
średnio			
drogo			

Np. Sterowanie ogrzewaniem:

Cena ogrzewania	Temperatura		
	mróz	zimno	chłodno
tanio	mocno	mocno	średnio
średnio	mocno	średnio	słabo
drogo	średnio	słabo	wcale

$$R^{(1)}: \textbf{IF}\ (Temperatura\ \text{is}\ mróz\ \textbf{AND}\ Cena\_ogrz\ \text{is}\ tanio)\ \textbf{THEN}\ (Grzać\ \text{is}\ mocno)$$

$$R^{(2)}: \textbf{IF}\ (Temperatura\ \text{is}\ chłodno\ \textbf{AND}\ Cena\_ogrz\ \text{is}\ drogo)\ \textbf{THEN}\ (Grzać\ \text{is}\ wcale)$$

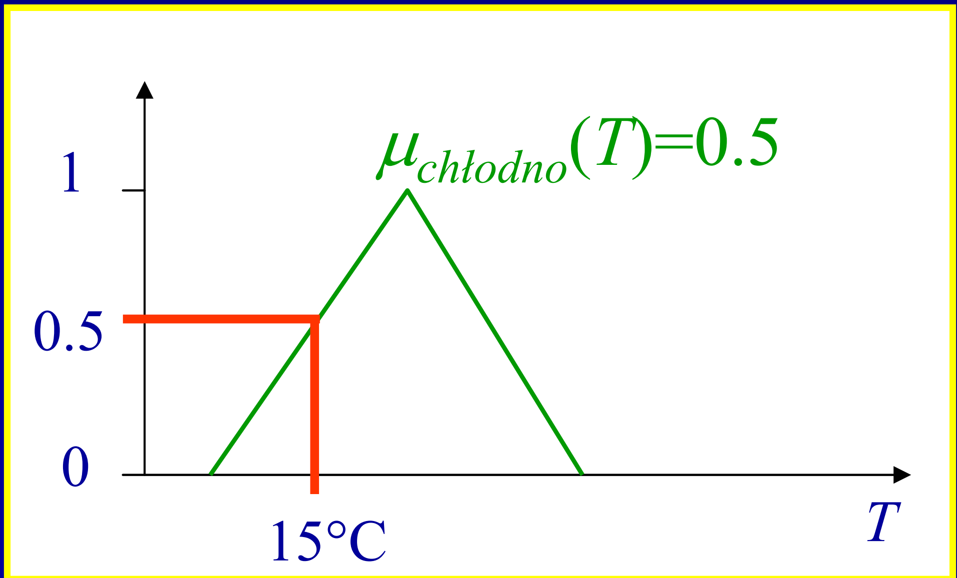
ROZMYWANIE (fuzzyfikacja)

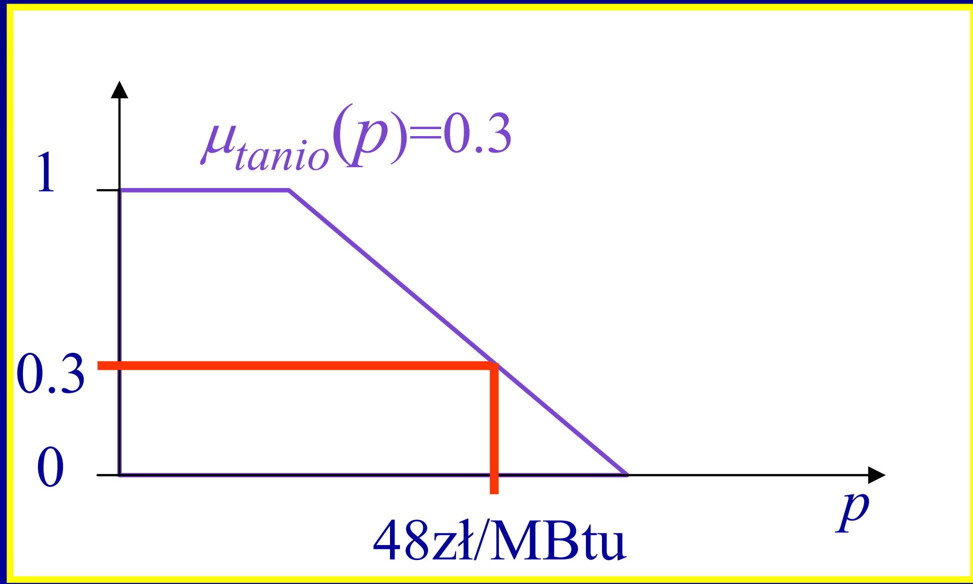
- Przejście od pomiarów (konkretna wartość $\overline{x}_1$) do funkcji przynależności przez określenie stopni przynależności zmiennych lingwistycznych do każdego ze zbiorów rozmytych.

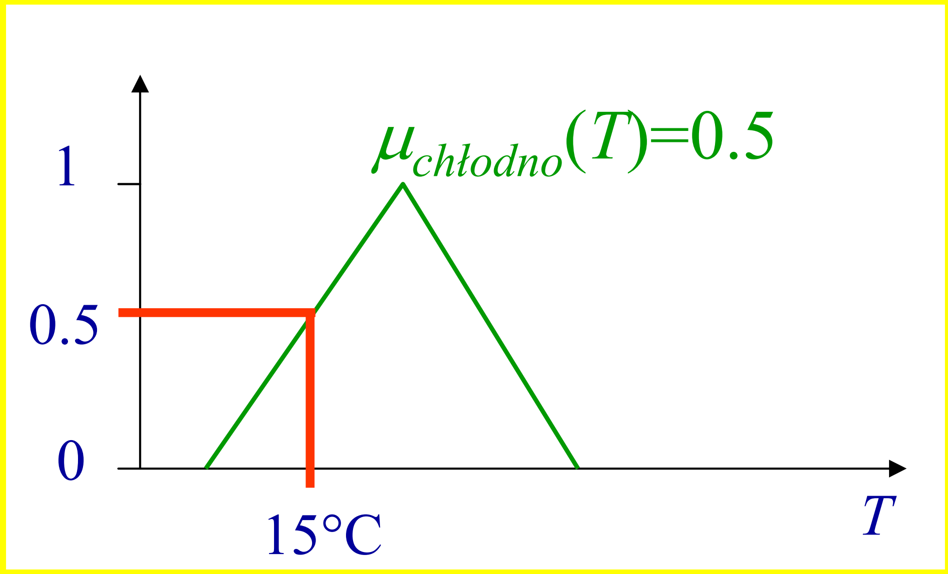
Np.:
- *Temperatura*: T =15°C
- *Cena ogrz*: p =48zł/MBTU

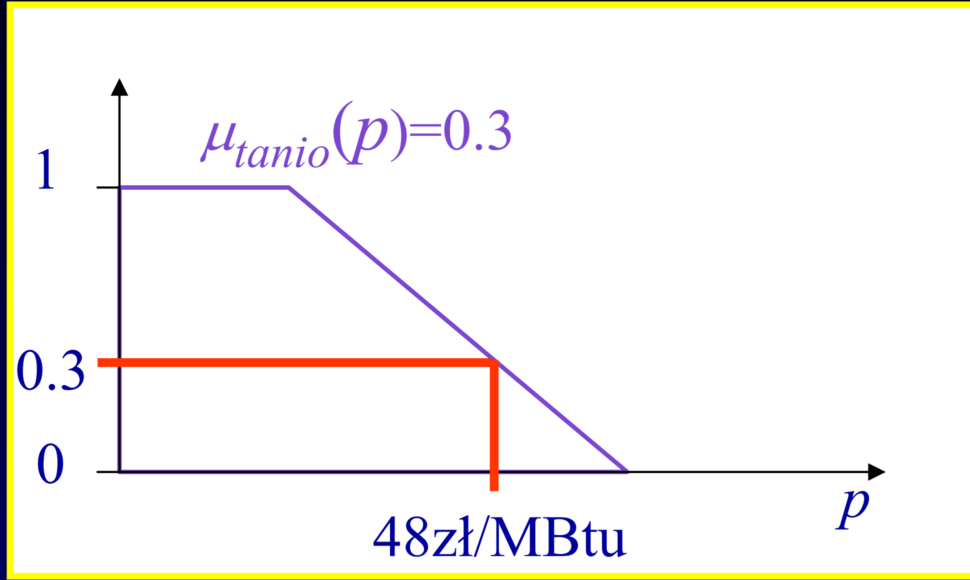
$R^{(3)}$: **IF** (*Temperatura* **is** *chłodno* **AND** *Cena_ogrz* **is** *tanio*)

THEN (*Grzać* **is** *średnio*)









Stopień spełnienia reguły dla wszystkich przesłanek:

$$\boxed{\mu_{całe}(x) \; = \; \min\{ \mu_{chłodno}(T), \mu_{tanio}(p)\}}$$

$$\boxed{= \; \min\{0.5, 0.3\} \; = \; 0.3}$$

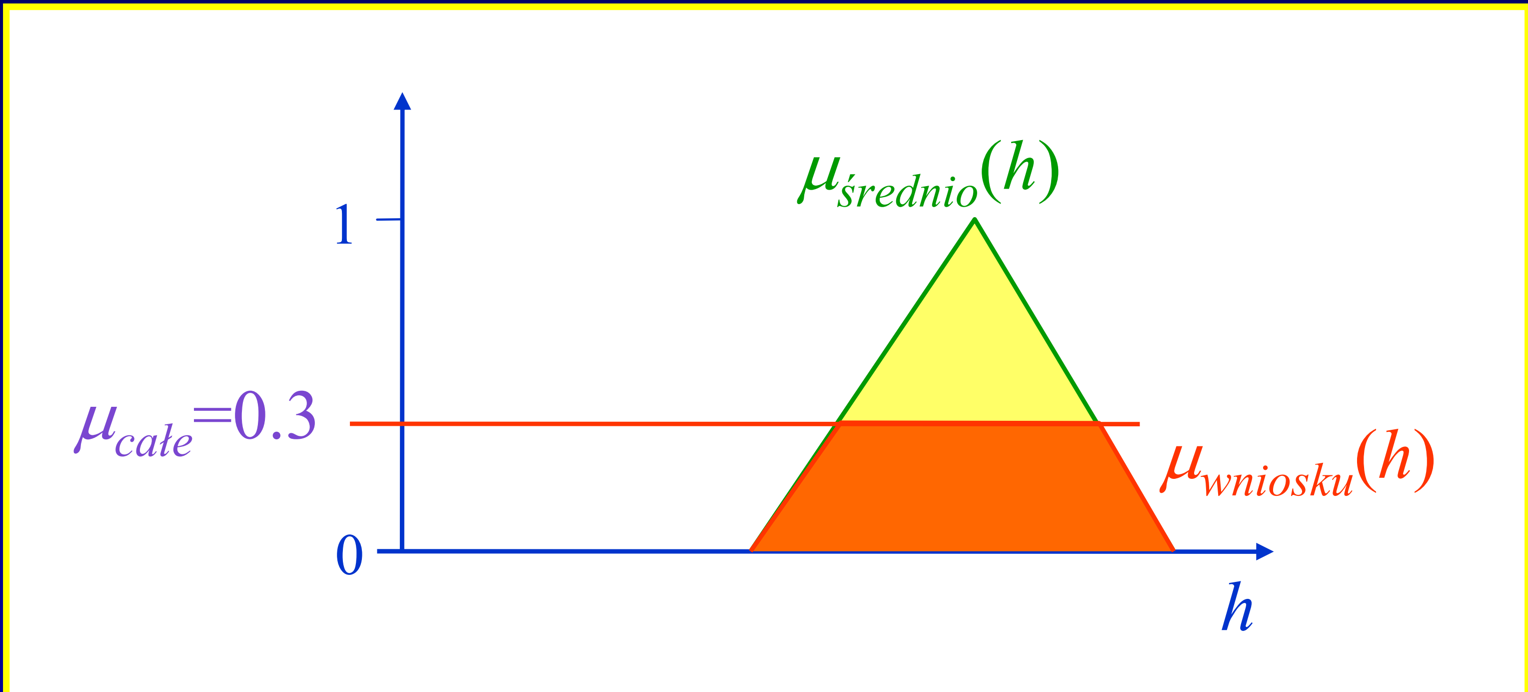
„poziom zapłonu reguły"

WNIOSKOWANIE

Obliczanie stopnia prawdziwości wniosku:

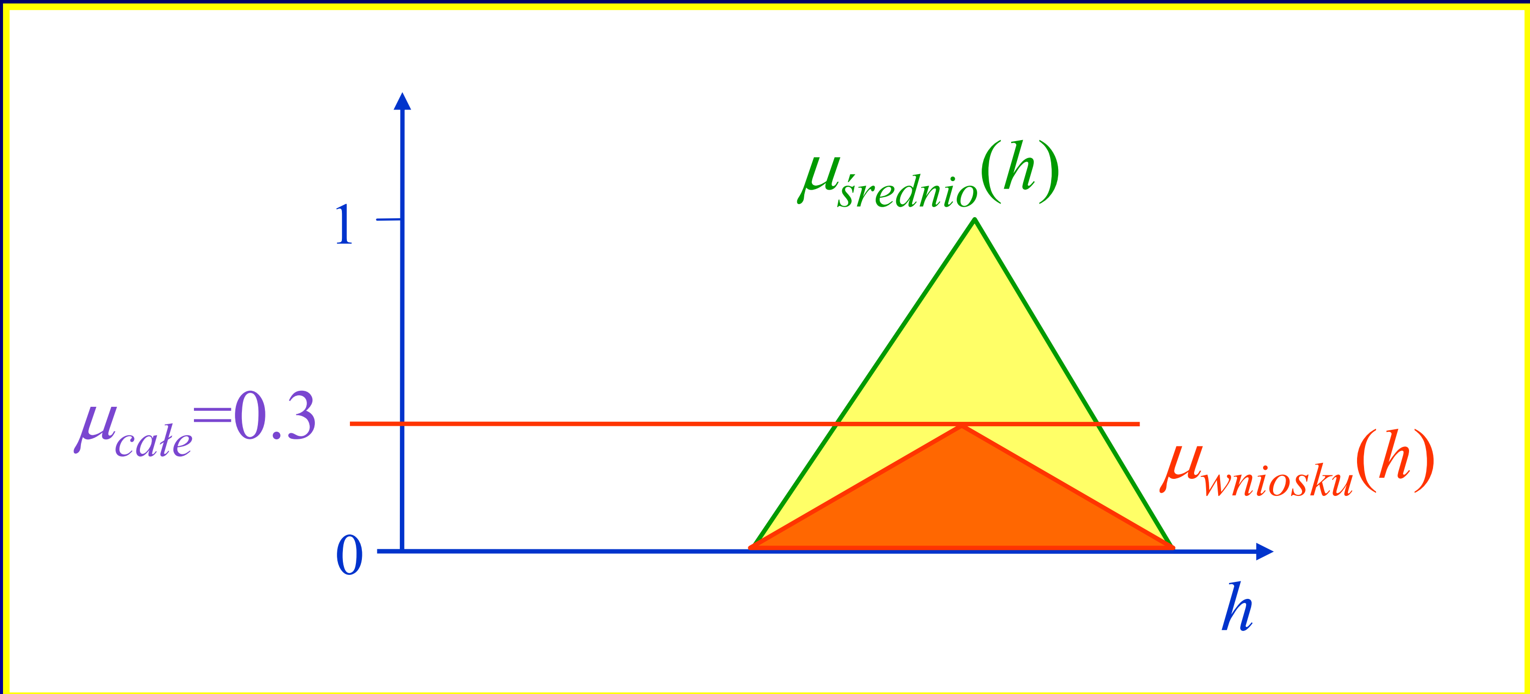
- Wnioskowanie MIN:

$$\mu_{wniosku} = \min\{\mu_{całe}, \mu_{średnio}\}$$



- Wnioskowanie •:

$$\mu_{wniosku} = \mu_{całe} \bullet \mu_{średnio}$$



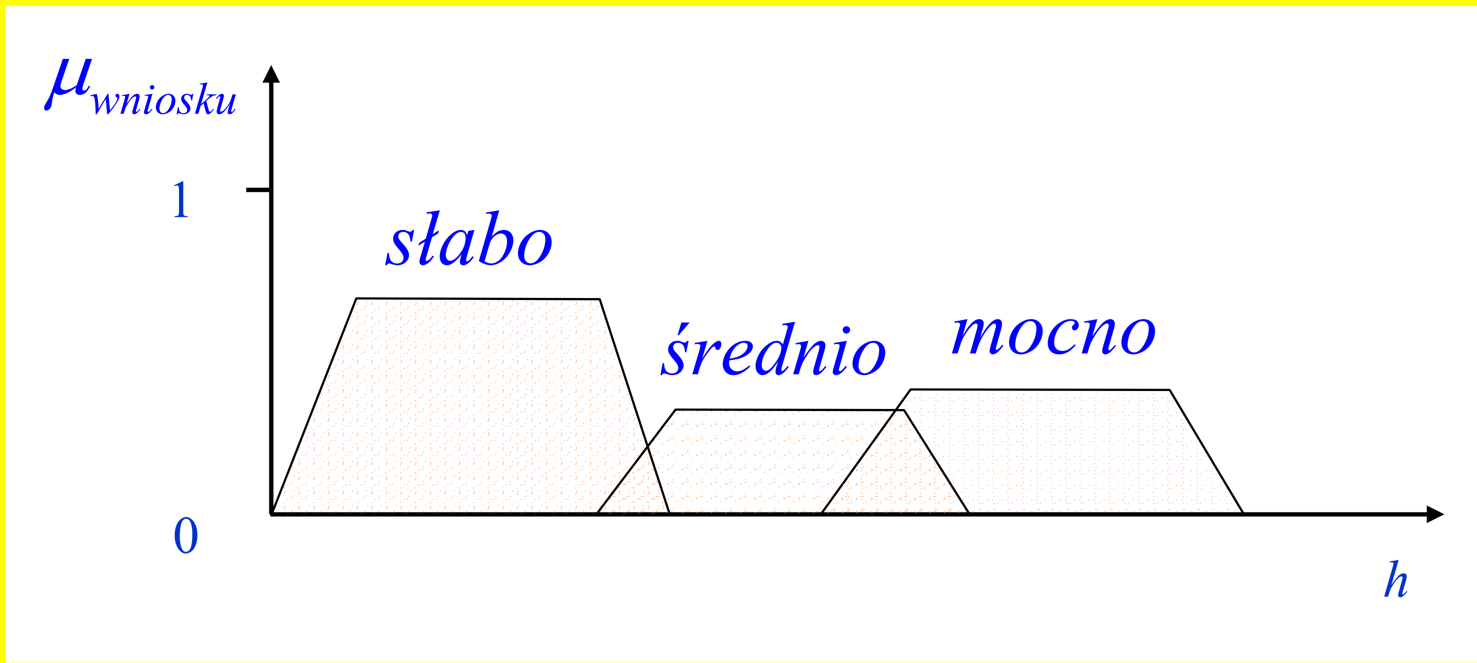
AGREGACJA

Jeżeli więcej niż jedna reguła ma niezerowy poziom zapłonu, wyniki (zbiory rozmyte) sumuje się.

THEN *Grzać* is *słabo*

THEN *Grzać* is *średnio*

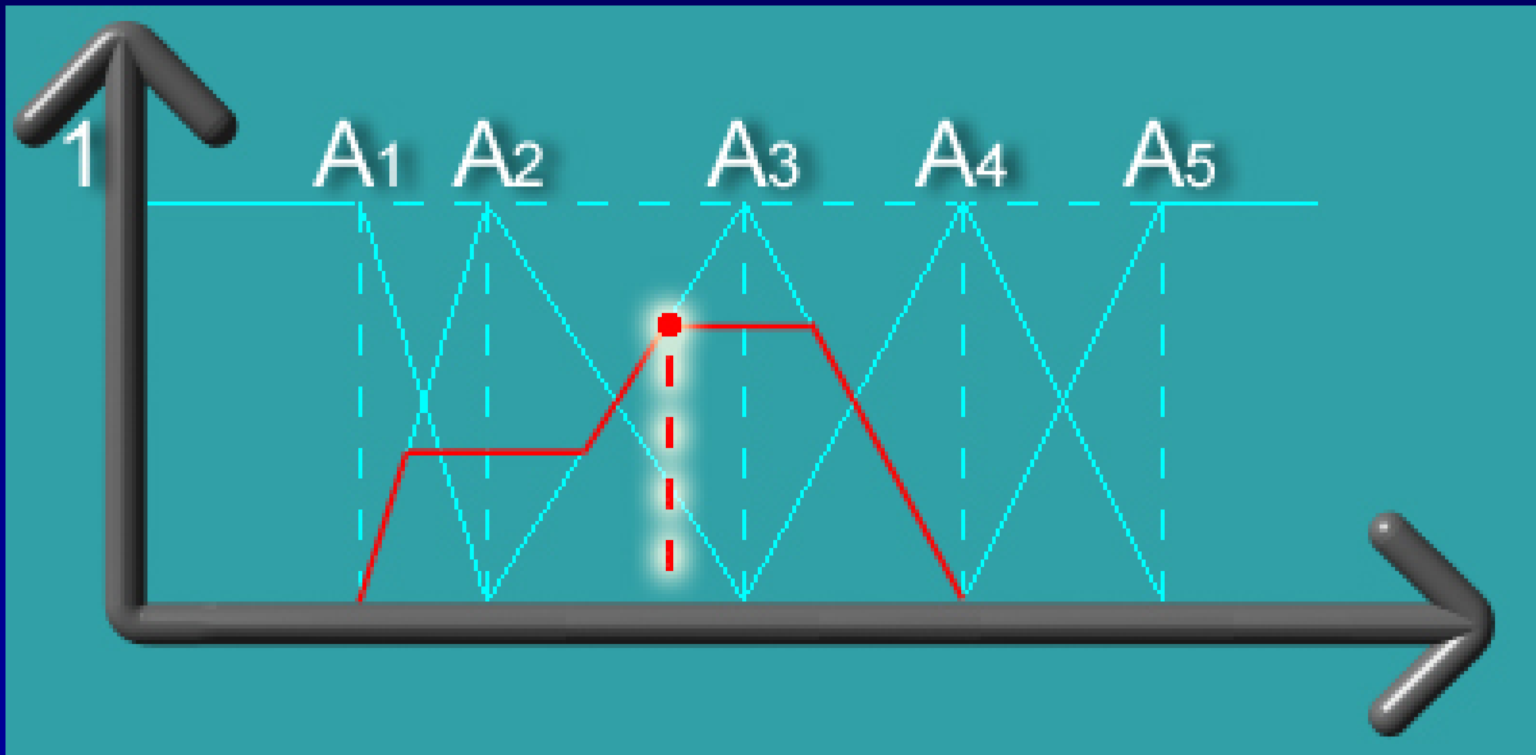
THEN *Grzać* is *mocno*



WYOSTRZANIE (defuzzyfikacja)

Jeżeli na wyjściu wymagana jest wartość liczbowa, stosuje się jedną z metod wyostrzania:

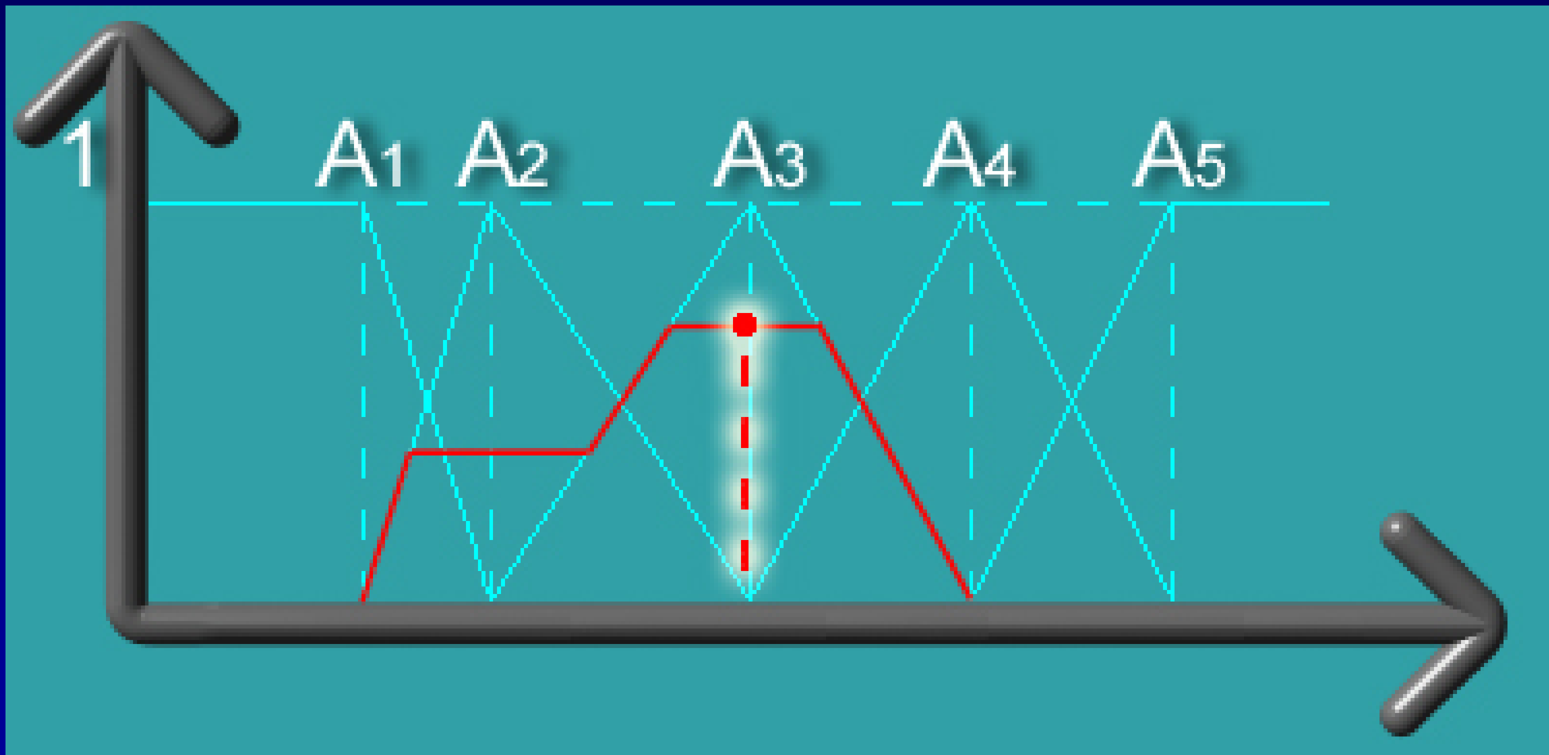
Metoda pierwszego maksimum:



WYOSTRZANIE (defuzzyfikacja)

Jeżeli na wyjściu wymagana jest wartość liczbowa, stosuje się jedną z metod wyostrzania:

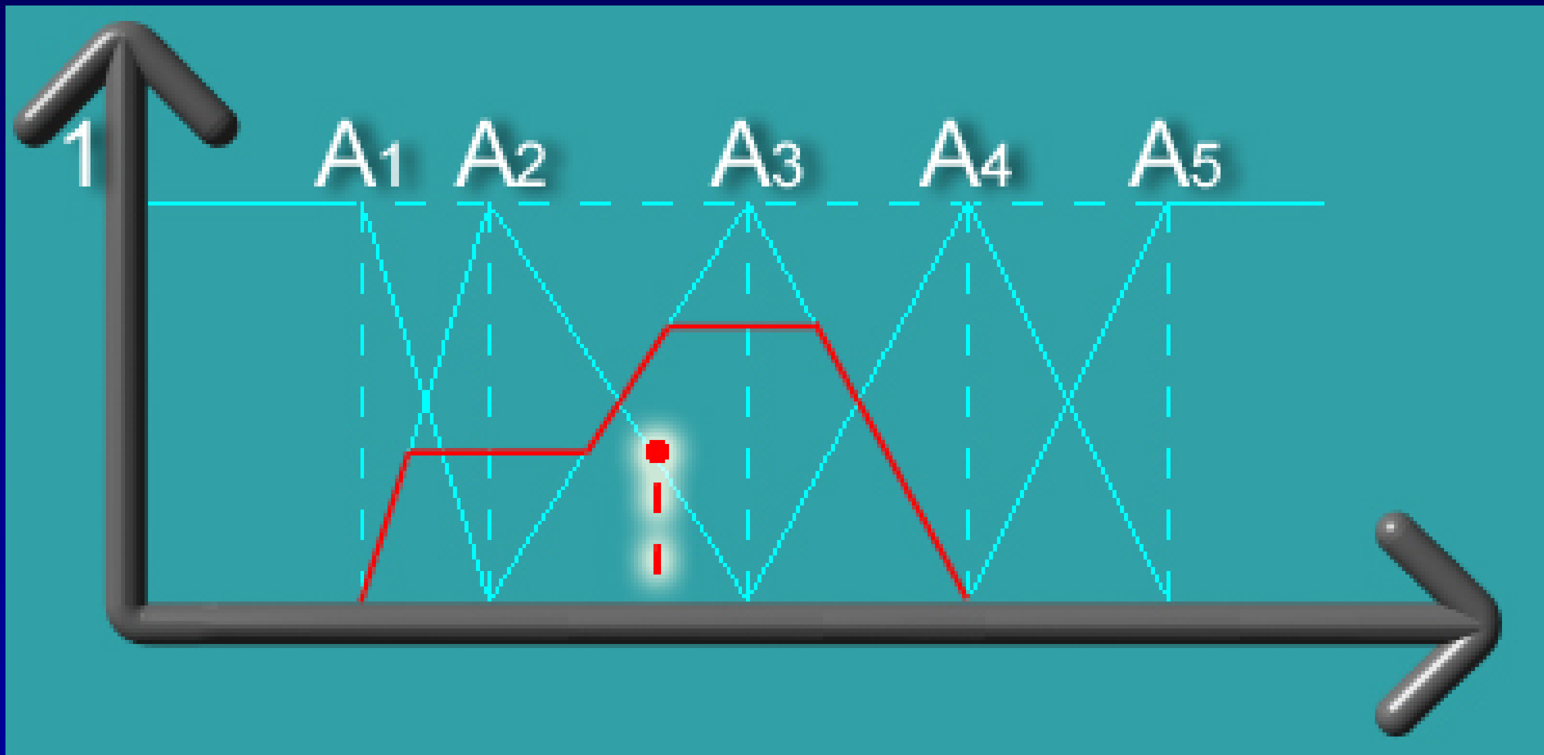
Metoda środka maksimum:



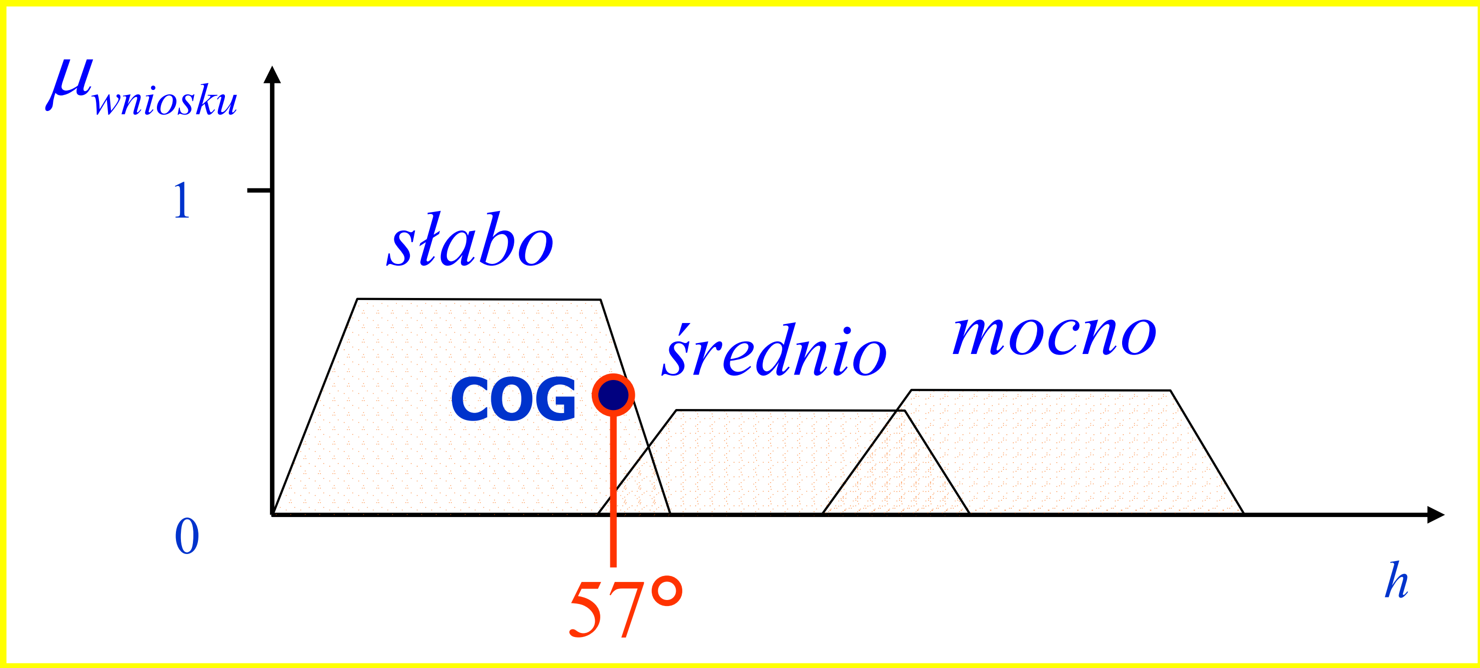
WYOSTRZANIE (defuzzyfikacja)

Jeżeli na wyjściu wymagana jest wartość liczbowa, stosuje się jedną z metod wyostrzania:

Metoda środka ciężkości (COG):



Tu:



COG dla zbiorów ciągłych:

$$h = \frac{\sum_i \mu_i A_i c_i}{\sum_i \mu_i A_i}$$

A_i – powierzchnia zbioru i

μ_i – stopień przynależności do zbioru i

c_i – środek ciężkości zbioru i.

STEROWNIK ROZMYTY TAKAGI-SUGENO

- Baza reguł sterownika ma charakter rozmyty tylko w części **IF**.
- W części **THEN** występują zależności funkcyjne.

Reguły Mamdaniego: wynikiem jest zbiór rozmyty B:

$$\textbf{IF } x_1 = A_1 \textbf{ AND } x_2 = A_2 \ \dots \ x_n = A_n \textbf{ THEN } y = B$$

Reguły Takagi-Sugeno: wynikiem jest funkcja $f\,(x_i)$:

$$\textbf{IF } x_1 = A_1 \textbf{ AND } x_2 = A_2 \ \dots \ x_n = A_n \textbf{ THEN } y = f\,(x_1, x_2, \dots x_n)$$

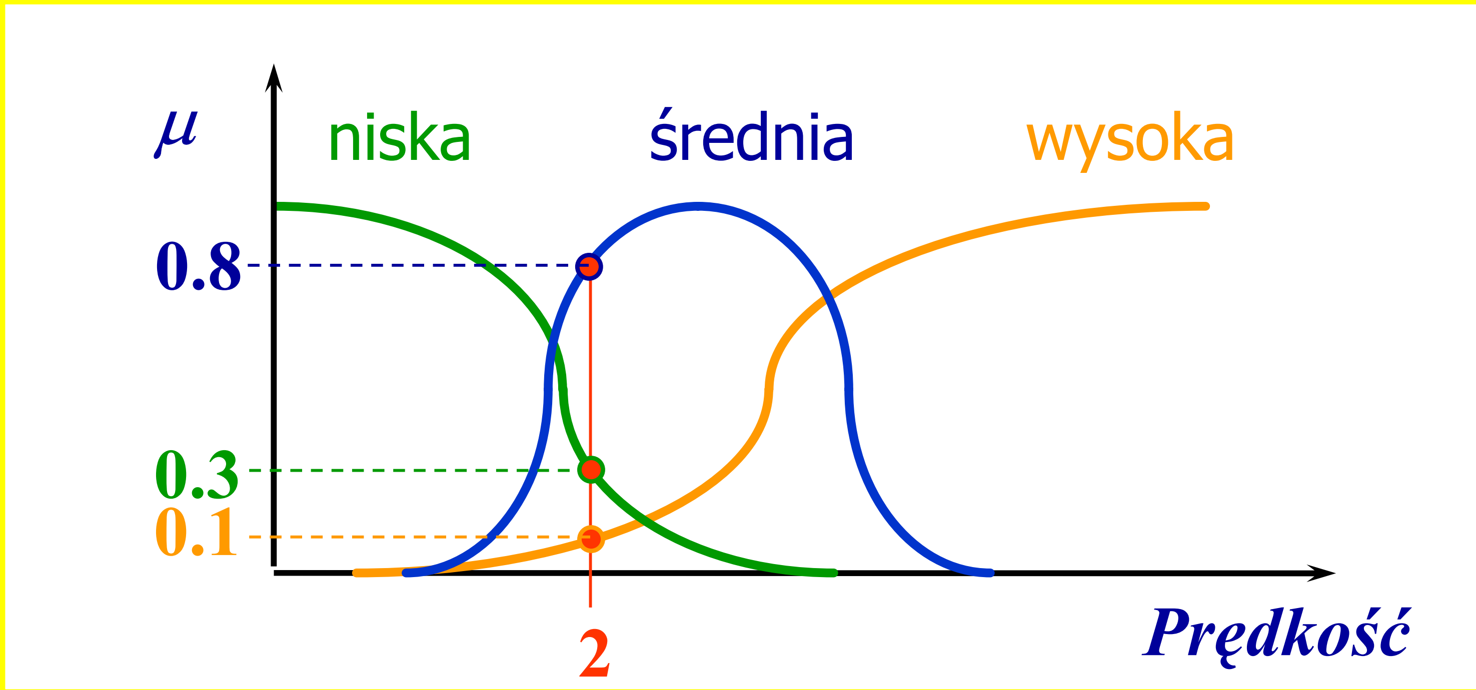
Zwykle są to funkcje liniowe :

$$f\,(x_i) = y = a_0 + a_1 x_1 + a_n x_n$$

Np.: $R^{(1)}$: **IF** *prędkość* is *niska* **THEN** *hamowanie* = *prędkość*

$R^{(2)}$: **IF** *prędkość* is *średnia* **THEN** *hamowanie* = 4·*prędkość*

$R^{(3)}$: **IF** *prędkość* is *wysoka* **THEN** *hamowanie* = 8·*prędkość*



$R^{(1)}$: $w_1 = 0.3;\ r_1 = 2$

$R^{(2)}$: $w_2 = 0.8;\ r_2 = 4 \cdot 2$

$R^{(3)}$: $w_3 = 0.1;\ r_3 = 8 \cdot 2$

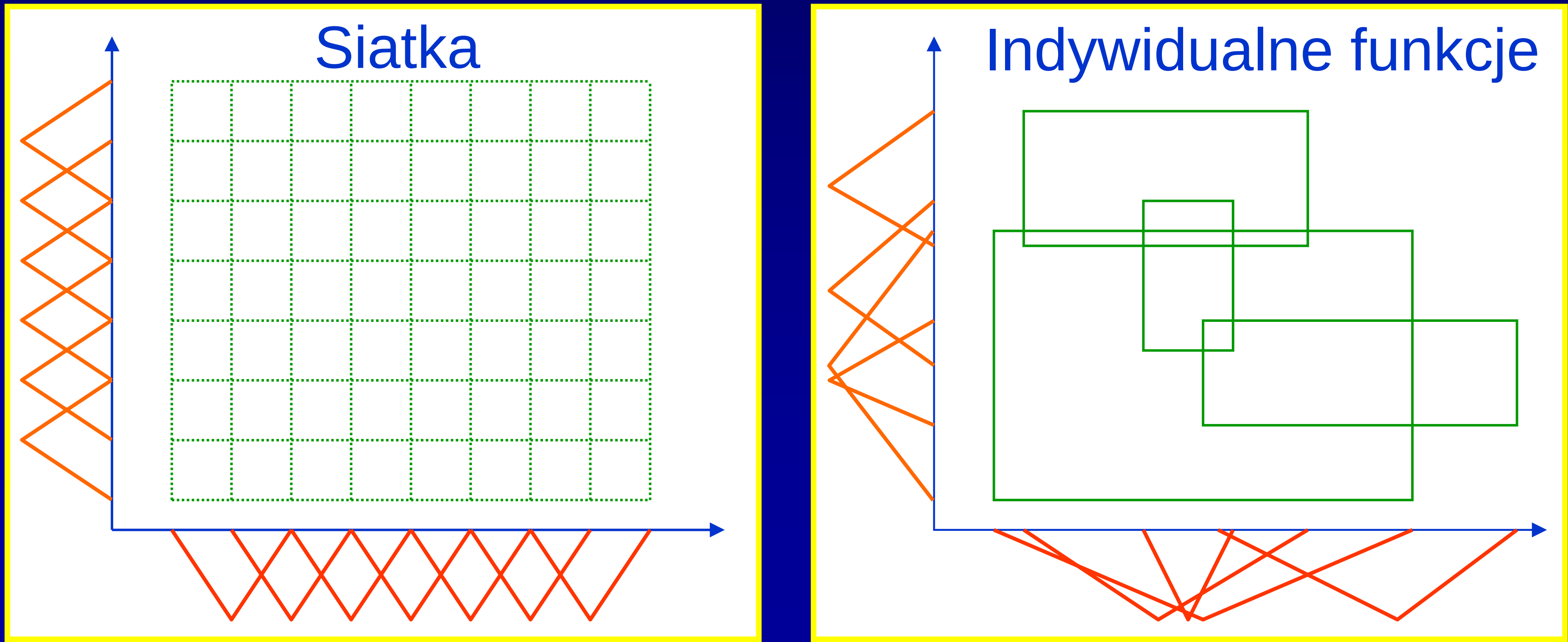
Hamowanie = $\dfrac{\sum w_i \cdot r_i}{\sum w_i} = 7.12$

PROJEKTOWANIE BAZ REGUŁ

Informacja niezbędna do zaprojektowania sterownika:

- numeryczna (ilościowa) – z czujników pomiarowych;
- lingwistyczna (jakościowa) – od eksperta.

Stworzenie bazy wiedzy dla układu rozmytego – zadanie nietrywialne...



Siatki:

- proste i skuteczne;
- łączenie danych numerycznych i nienumerycznych poprzez uzupełnianie istniejącej bazy reguł o nowe reguły (*na podstawie danych uczących*);
- N^k obszarów dla k wymiarów i N funkcji;

  \- często słaba aproksymacja.

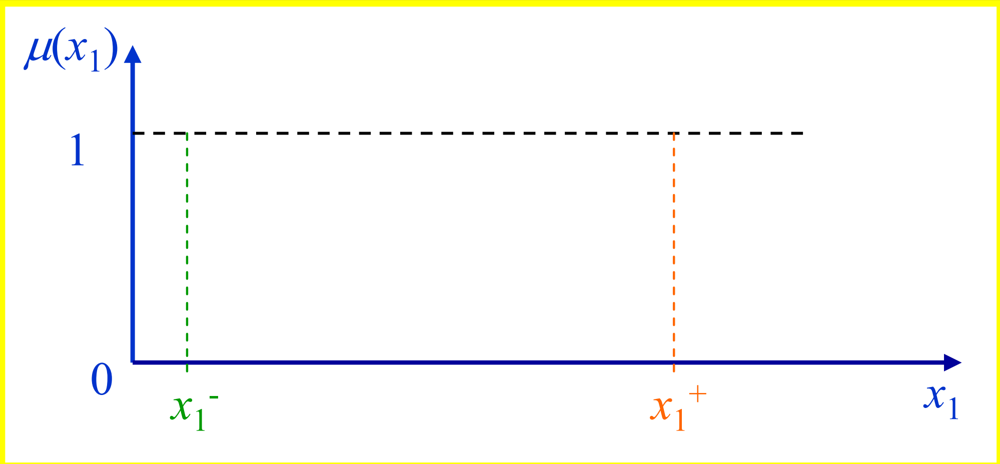
Funkcje indywidualne:

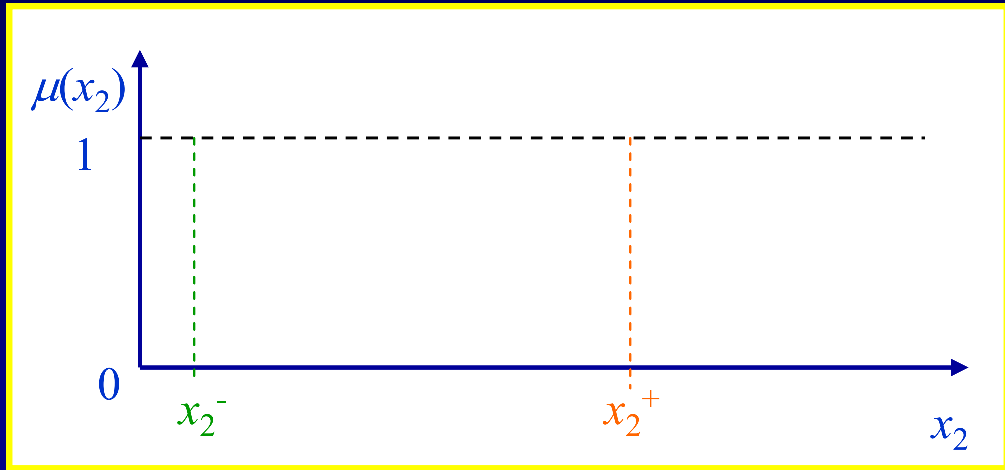
- dokładniejsze, lepsza aproksymacja, mniej funkcji;
- trudniejsze w implementacji.

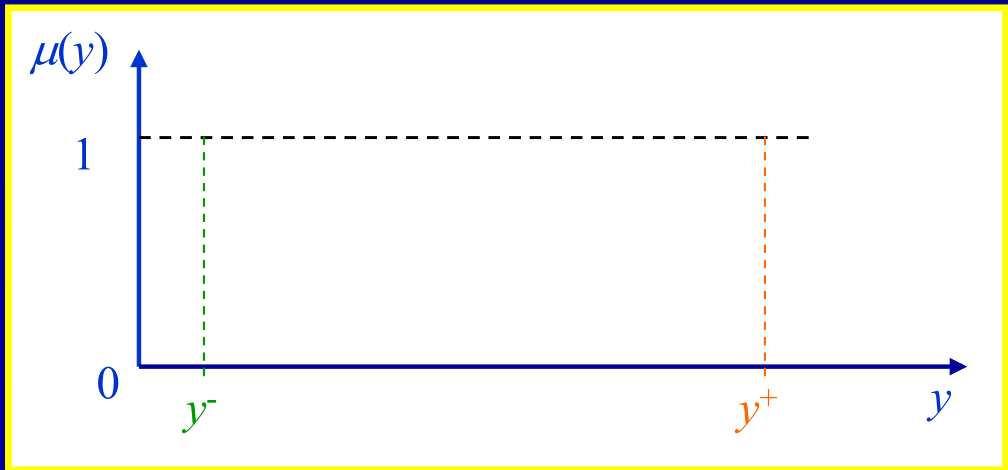
Zadanie:

Ustalenie reguł rozmytych tak, by sterownik generował właściwe sygnały wyjściowe.

1. Określ. zakresu zmienności danych WE i WY $[x_i^-, x_i^+]$



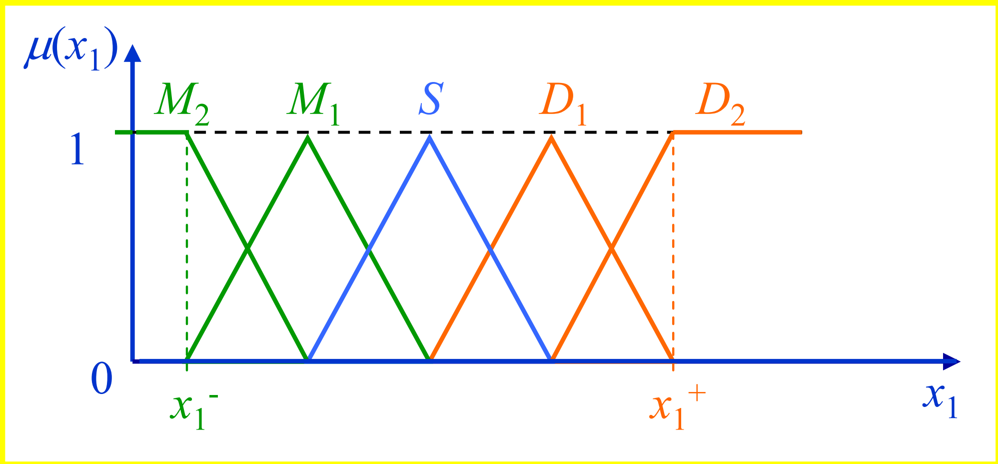


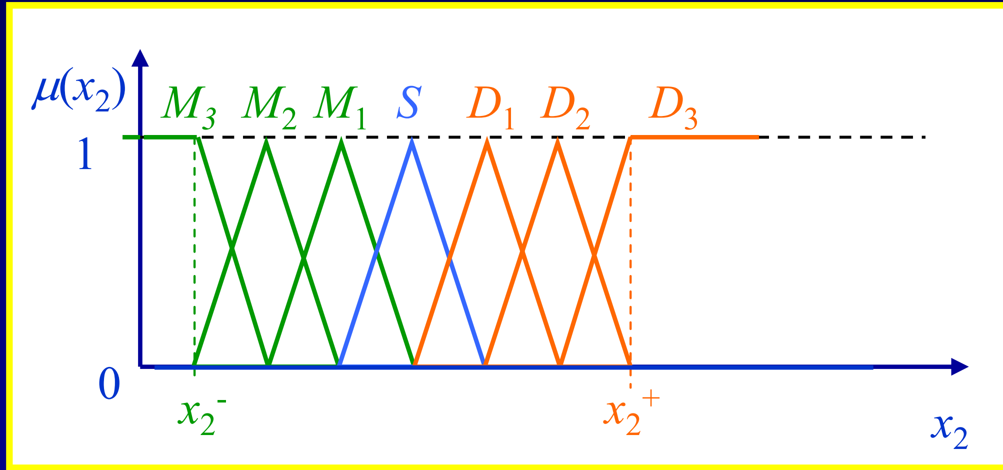


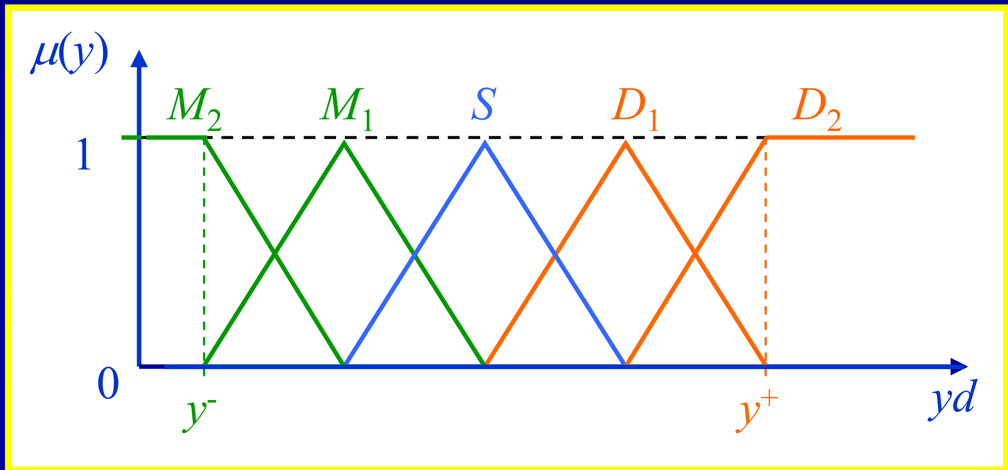
2. Podział zakresów na podobszary, np.: $n = 2N+1$

$$M_N, \ldots, M_1, S, D_1, \ldots, D_N$$

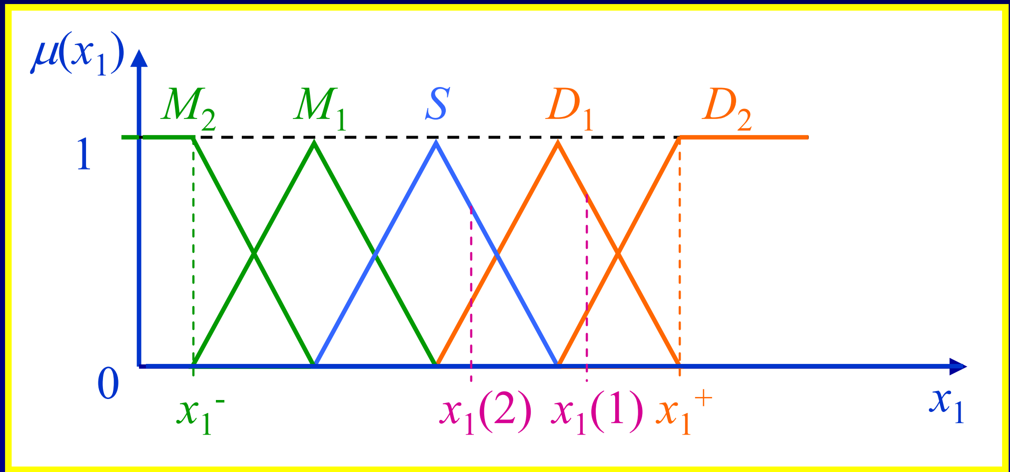
i przyjęcie funkcji przynależności (np. trójkątnej) dla każdego z podobszarów.

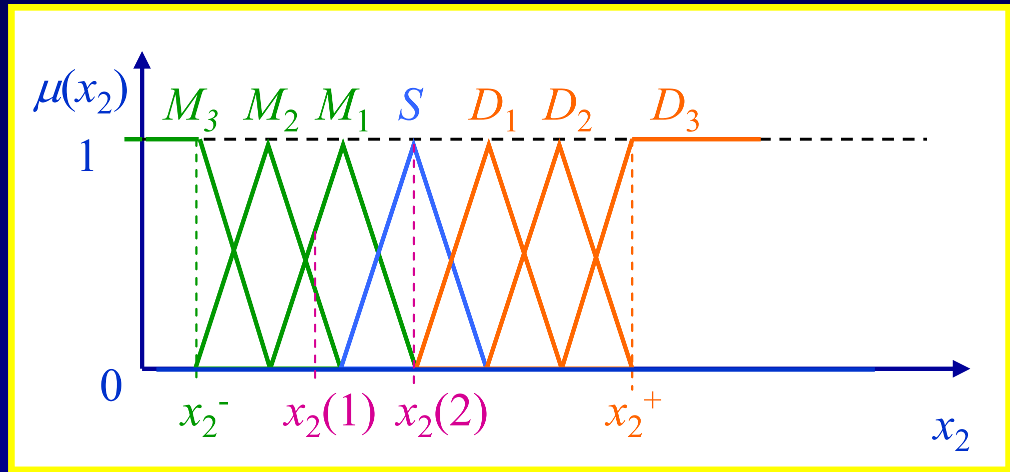


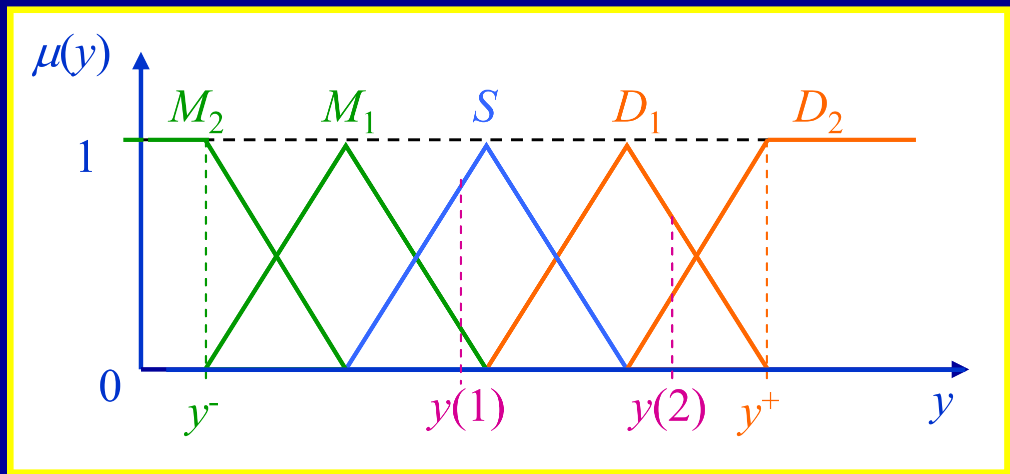




3. Określenie stopnia przynależności każdego z sygnałów WE i WY do każdego z podobszarów.

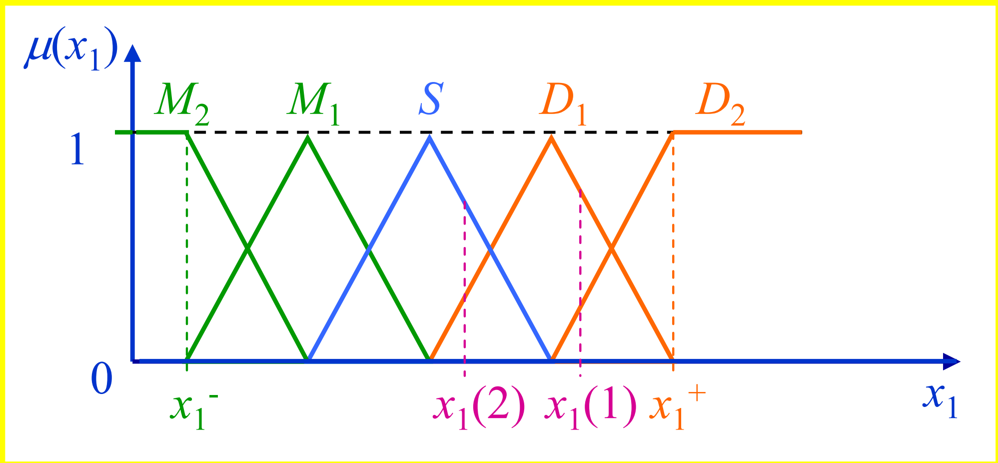


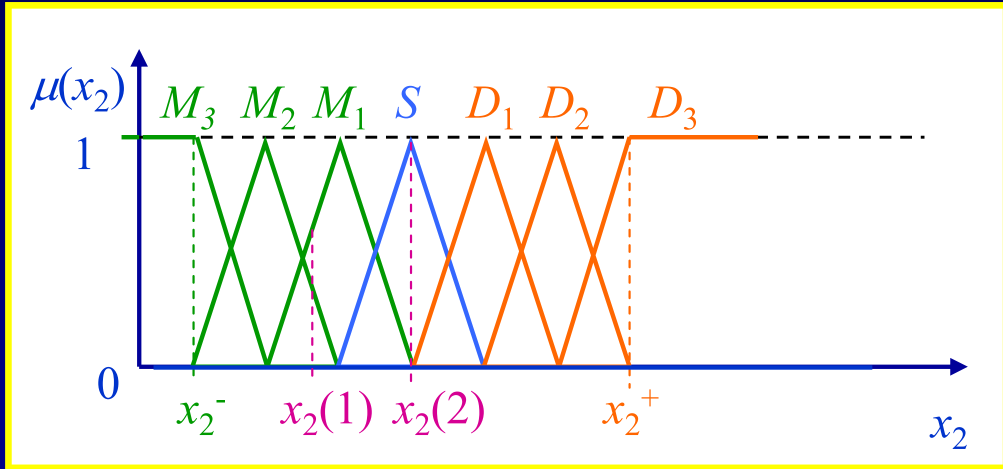


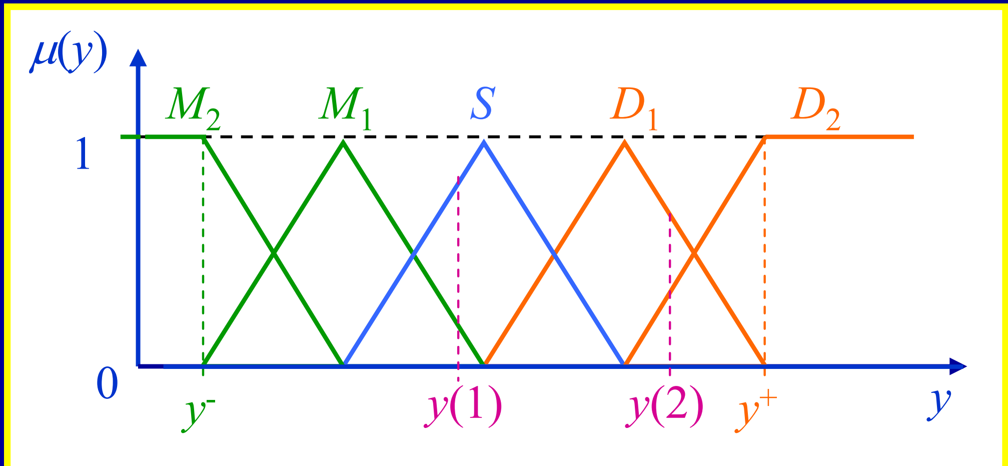


tu: - ***StPrzyn* x_1** do **D_1** $= 0.8$, do **D_2** $= 0.2$, do innych $= 0$;

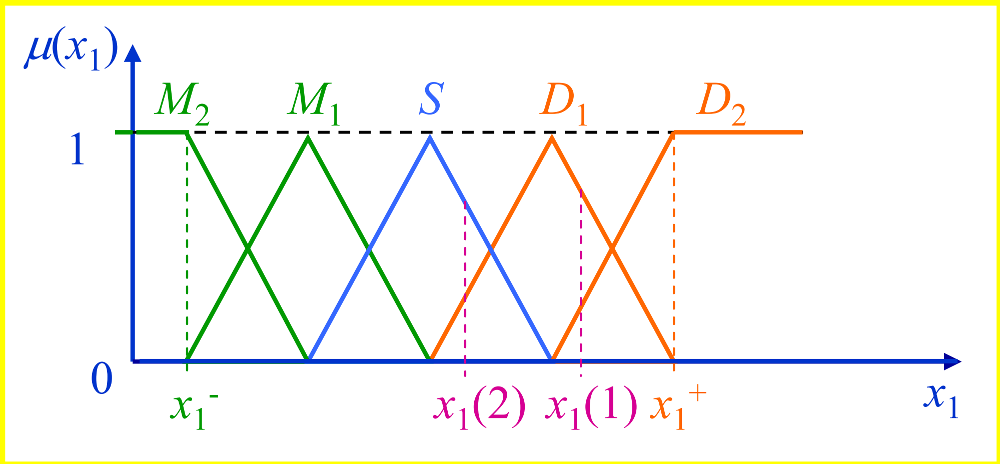
- **x_1** ma największy ***StPrzyn*** do **D_1**, **x_2** do **M_1**
- Dla każdej pary danych uczących można napisać jedną regułę.

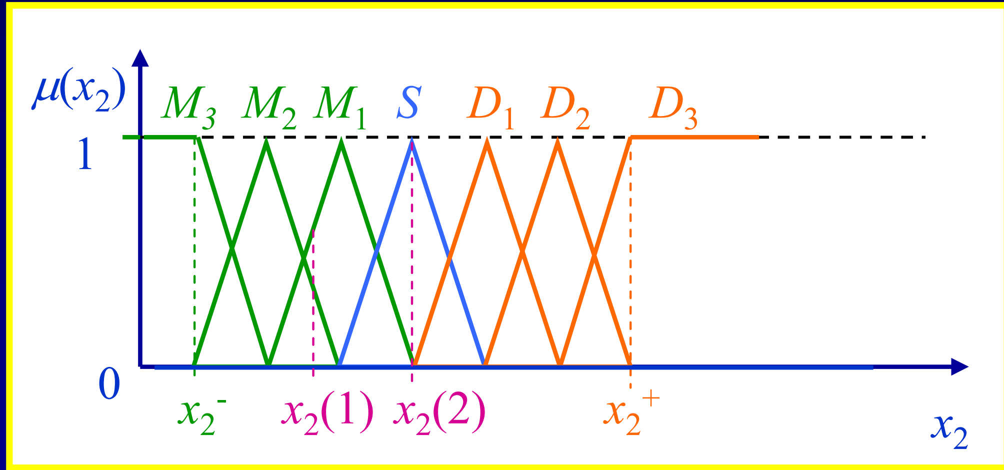


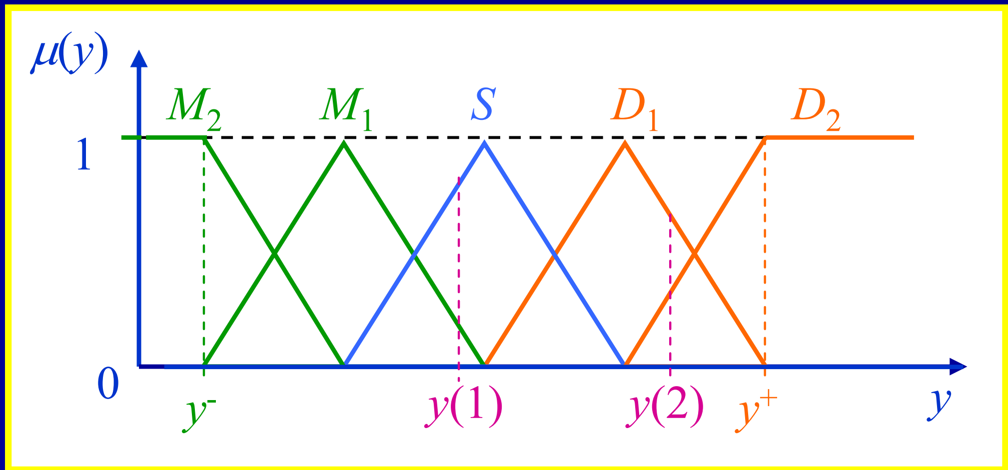




4. Przyporządkowanie stopni prawdziwości (***SP***) do każdej reguły.



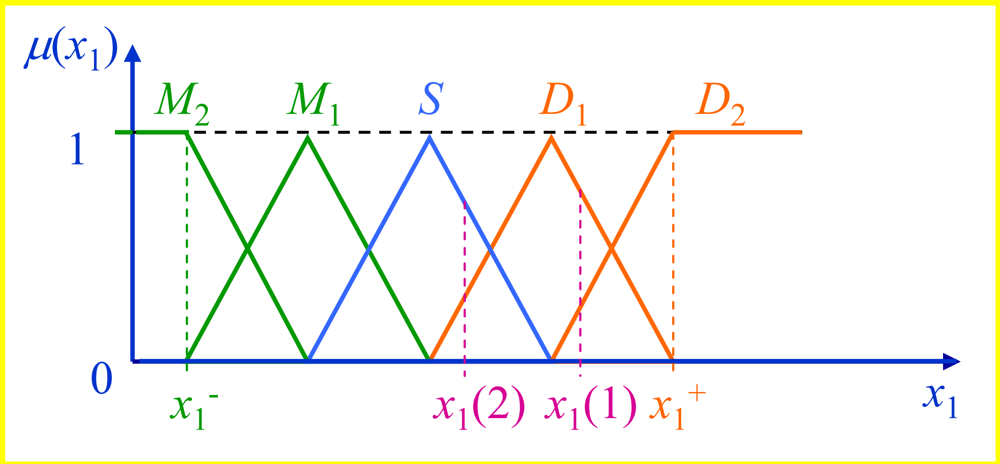


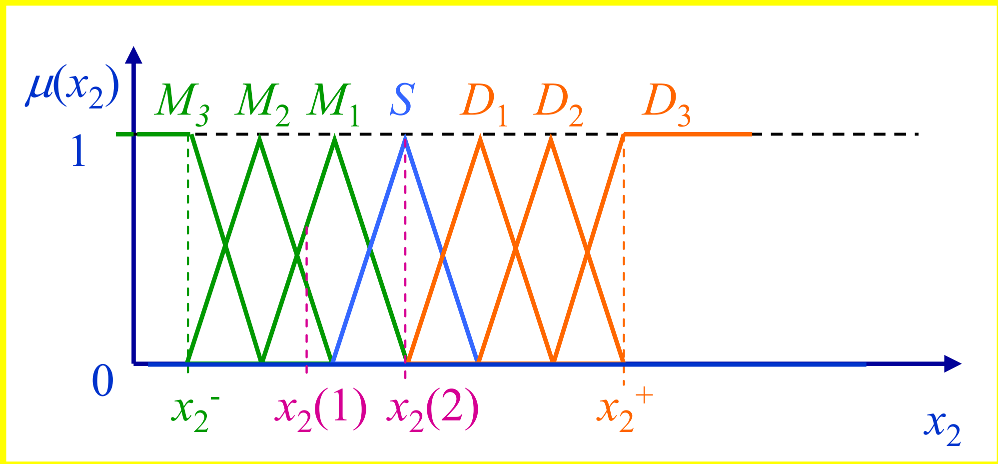


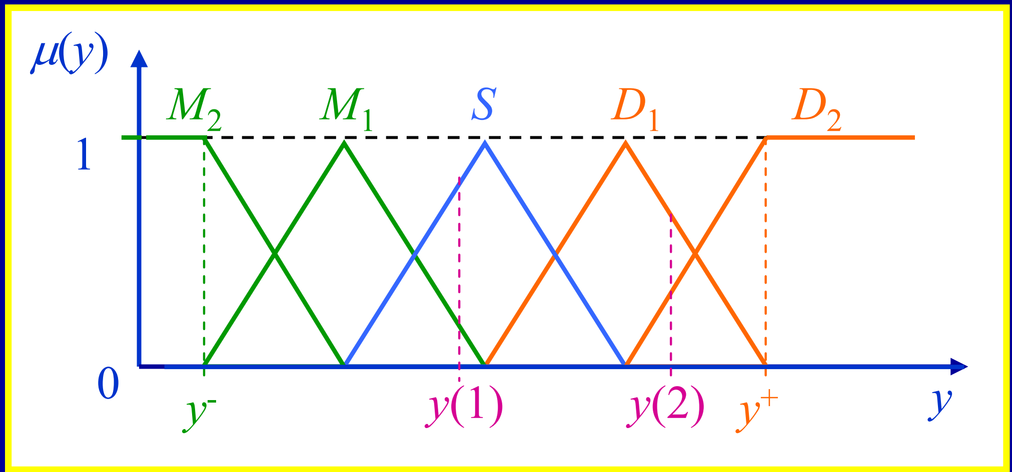
Np. dla reguły: **IF** (x_1 is A_1 **AND** x_2 is A_2) **THEN** y is B

$$SP\left(R^{(1)}\right) = \mu_{D_1}(x_1)\cdot\mu_{M_1}(x_2)\cdot\mu_S(y) = 0.8\cdot 0.6\cdot 0.9 = 0.432$$

$$SP\left(R^{(2)}\right) = \mu_S(x_1)\cdot\mu_S(x_2)\cdot\mu_{D_1}(y) = 0.7\cdot 1\cdot 0.7 = 0.49$$

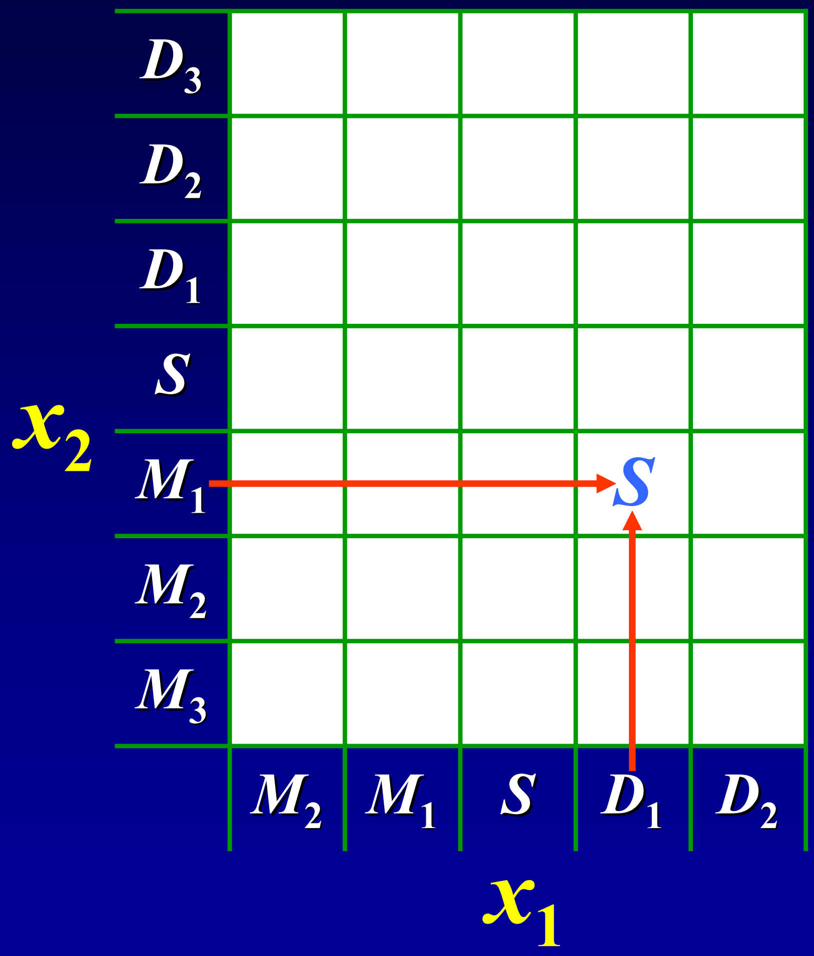






Jeśli pewne reguły okazują się sprzeczne – wybiera się regułę o największym stopniu prawdziwości.

5. Utworzenie bazy reguł rozmytych na podstawie tablicy:



$$R^{(1)}: \textbf{IF } (x_1 \text{ is } D_1 \textbf{ AND } x_2 \text{ is } M_1) \textbf{ THEN } y \text{ is } S$$