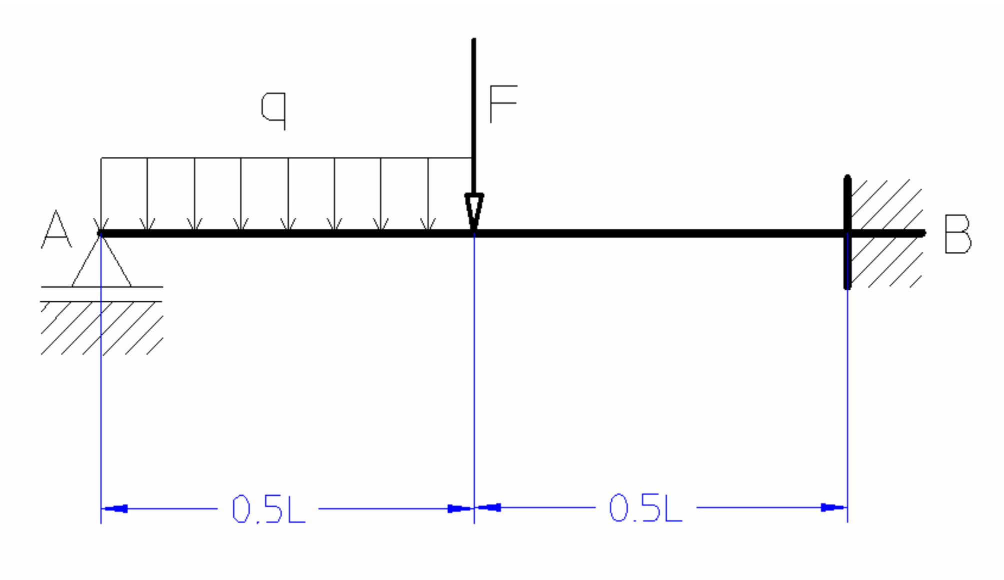
Zadanie 1

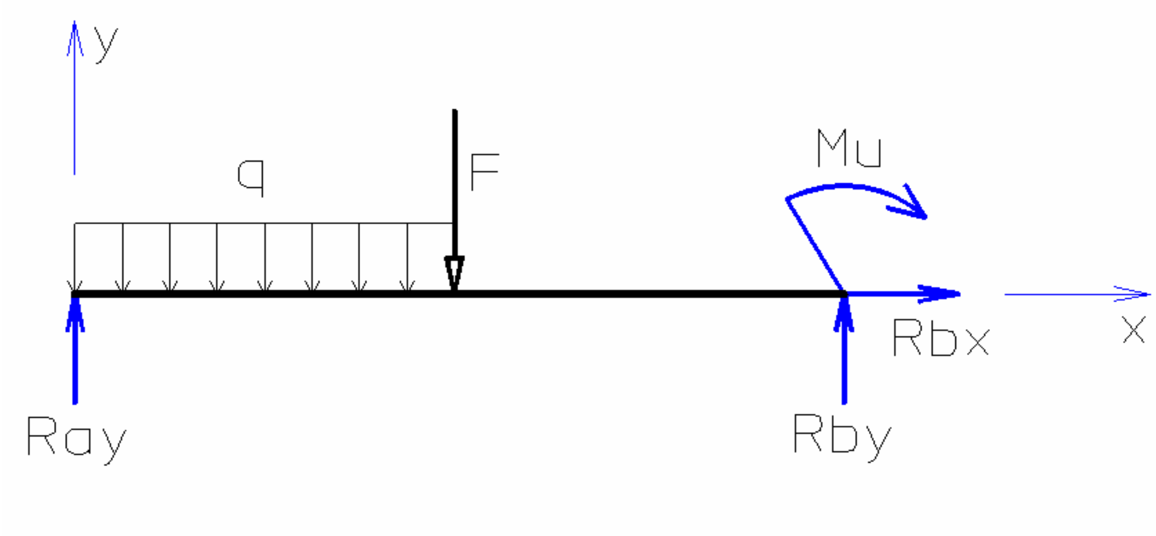
Dla belki przedstawionej na rysunku, stosując metodę Clebscha, sporządzić wykresy siły tnącej i momentu gnącego, wyznaczyć strzałkę ugięcia w miejscu przyłożenia siły F oraz kąt obrotu przekroju w punkcie A.

Dane: q=0,05 [MN/m], F=0.05[MN], L=0.8[m], EI=0.6[MNm^2]



Belkę należy uwolnić od więzów:

- w punkcie A podporę przesuwną zastępujemy reakcją R_{ay}
- w punkcie B utwierdzenie sztywne zastępujemy parą reakcji R_{bx} , R_{by} oraz momentem utwierdzenia M_u

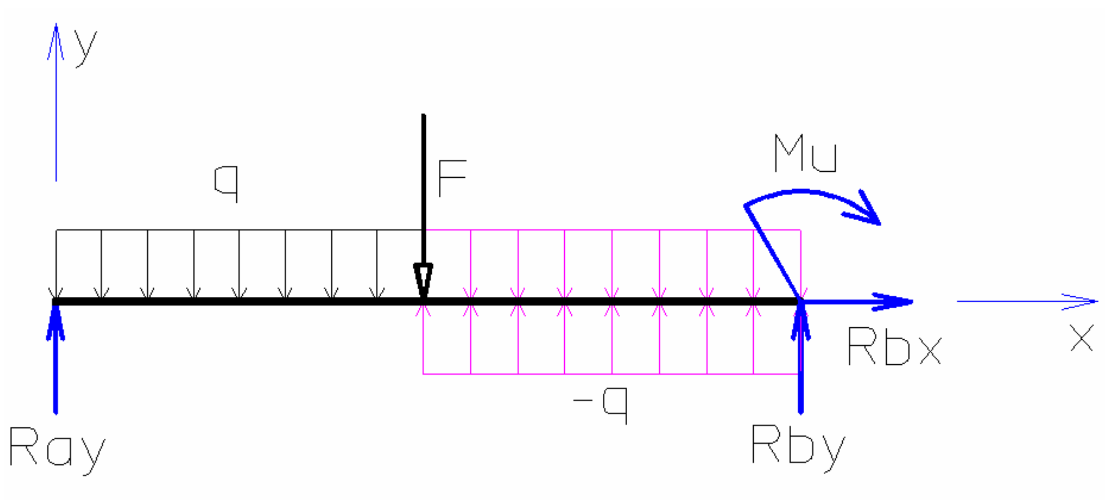


Zapisujemy równania równowagi (1):
(suma rzutów sił na oś x i y, suma momentów względem punktu B)

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0: \qquad R_{bx} = 0 \\ &\sum F_y = 0: \qquad R_{ay} + R_{by} - F - \frac{1}{2} qL = 0 \\ &\sum M_b = 0: \qquad F\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}qL\frac{3}{4}L - R_{ay}L - M_u = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne ponieważ są trzy równania równowagi i cztery niewiadome: R_{ay} , R_{bx} , R_{by} , M_u. Brakującą zależność uzyskamy wykorzystując równanie linii ugięcia.

Zgodnie z metodą Clebscha, obciążenie ciągłe, jeżeli jest to konieczne, należy przedłużyć do końca belki, dokładając na przedłużonym odcinku obciążenie ciągłe o przeciwnym zwrocie:



Równanie momentu gnącego ma postać:

$$Mg(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + R_{ay}x\,|_1 + \frac{1}{2}q\left(x - \frac{1}{2}L\right)^2 - F\left(x - \frac{1}{2}L\right)|_2 \tag{2}$$

Wyrażenia od początku do $|_1$ odnoszą się do pierwszego przedziału ($0\leq x\leq 0.5L$), natomiast od początku do $|_2$ dotyczą drugiego przedział ($0.5L\leq x\leq L$).

Równanie różniczkowe osi ugiętej:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Mg(x) \tag{3}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}qx^2 - R_{ay}x\,|_1 - \frac{1}{2}q\left(x - \frac{1}{2}L\right)^2 + F\left(x - \frac{1}{2}L\right)|_2 \tag{4}$$

Całkujemy pierwszy raz (nie rozwijając nawiasów!):

$$EI\frac{dy}{dx} = C + \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{2}R_{ay}x^2\,|_1 - \frac{1}{6}q\left(x - \frac{1}{2}L\right)^3 + \frac{1}{2}F\left(x - \frac{1}{2}L\right)^2 |_2 \tag{5}$$

Całkujemy drugi raz:

$$EIy = Cx + D + \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{6}R_{ay}x^3\,|_1 - \frac{1}{24}q\left(x - \frac{1}{2}L\right)^4 + \frac{1}{6}F\left(x - \frac{1}{2}L\right)^3 |_2 \tag{6}$$

W równaniach (5) i (6) niewiadomymi są stałe całkowania C i D oraz R_{ay}.

Ze względu na sposób podparcia belki mamy trzy warunki brzegowe:

- w punkcie A (x=0) znajduje się podpora przesuwna odbierająca możliwość przemieszczenia pionowego punku A:

$$y\big|_{x=0} = 0 \tag{7}$$

- w punkcie B (x=L) belka jest utwierdzona sztywno – ograniczenia mamy więc na przemieszczenie pionowe i kąt obrotu:

$$y\big|_{x=L} = 0 \tag{8}$$

$$\Theta_B = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=L} = 0 \tag{9}$$

Podstawiając warunek (7) do równania (6) (ponieważ warunek ten dotyczy pierwszego przedziału, równanie (6) bierzemy do $|_1$) otrzymujemy:

$$D = 0 \tag{10}$$

Następnie wstawiamy np.: warunek (9) do (5) (dotyczy drugiego przedziału, więc uwzględniamy całe równanie – do $|_2$) i wyliczamy C:

$$C = \frac{24R_{ay}L^2 - 6FL^2 - 7qL^3}{48} \tag{11}$$

Wykorzystując (11) oraz warunek (8) otrzymujemy równanie:

$$\frac{24R_{ay}L^2 - 6FL^2 - 7qL^3}{48}L + \frac{1}{24}qL^4 - \frac{1}{6}R_{ay}L^3 - \frac{1}{24}q\left(\frac{1}{2}L\right)^4 + \frac{1}{6}F\left(\frac{1}{2}L\right)^3 = 0 \tag{12}$$

pozwalające wraz z równaniami równowagi (1) wyznaczyć wartości reakcji i momentu utwierdzenia:

$$R_{ay} = \frac{40F - 41qL}{128} = 0{,}0284[\mathrm{MNm}]$$

$$R_{by} = \frac{88F - 23qL}{128} = 0{,}0416[\mathrm{MNm}]$$

$$M_u = \frac{24FL + 7qL^2}{128} = 0{,}0092[\mathrm{MNm}]$$

oraz:

$$C = \frac{24FL^2 + 11qL^3}{768} = 0{,}00137[\mathrm{MNm}^2]$$

Strzałkę ugięcia pod siłą F (x=0.5L) obliczamy z równania (6):

$$y\big|_{x=0.5L} = \frac{1}{EI}\left(C\frac{1}{2}L + \frac{1}{24}q\left(\frac{1}{2}L\right)^4 - \frac{1}{6}R_{ay}\left(\frac{1}{2}L\right)^3\right) = 0{,}497[\mathrm{mm}]$$

Kąt obrotu przekroju w punkcie A (x=0) wyznaczamy z zależności (5):

$$\Theta_B = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{C}{EI} = 0{,}002284\mathrm{rad}$$

Siła tnąca:

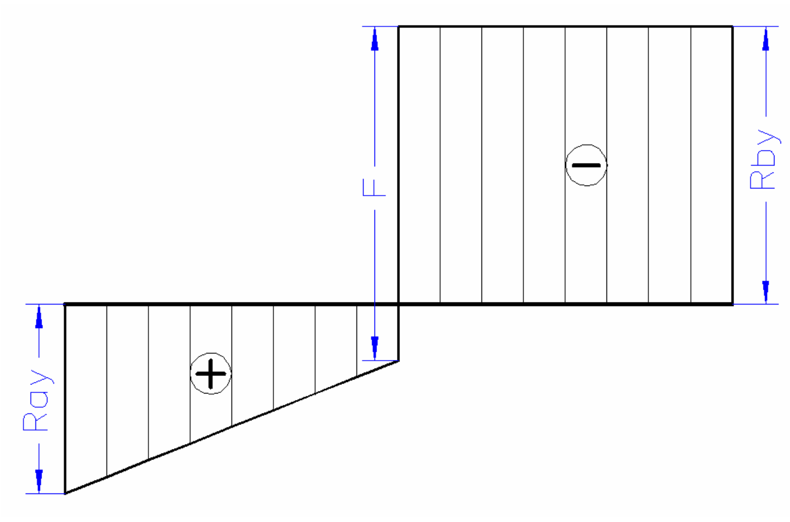
$$T(x) = -qx + R_{ay} |_1 + q\left(x - \frac{1}{2}L\right) - F |_2$$

$$T(0) = R_{ay} = 0{,}0284[\mathrm{MN}]$$

$$T\left(\frac{1}{2}L\right)|_1 = R_{ay} - \frac{1}{2}ql = 0{,}084[\mathrm{MN}]$$

$$T\left(\frac{1}{2}L\right)|_2 = R_{ay} - \frac{1}{2}ql - F = -0{,}0416[\mathrm{MN}]$$

$$T(L) = -R_{by} = -0{,}0416[\mathrm{MN}]$$



Przebieg siły tnącej

Wartości momentu gnącego w odpowiednich przekrojach określa równanie (2):

$$Mg(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + R_{ay}x |_1 + \frac{1}{2}q\left(x - \frac{1}{2}L\right)^2 - F\left(x - \frac{1}{2}L\right)|_2$$

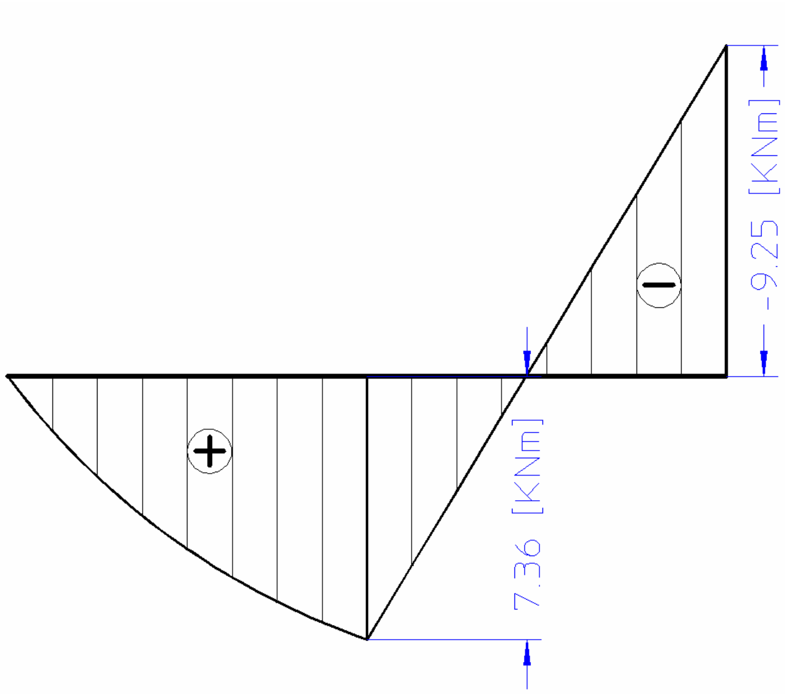
$$Mg(x=0) = 0$$

$$Mg\left(\frac{1}{2}L\right) = -\frac{1}{8}qL^2 + R_{ay}\frac{1}{2}L = 0{,}00736[\mathrm{MNm}]$$

$$Mg(L) = -M_u = -0{,}00925[\mathrm{MNm}]$$

Maksymalny moment gnący wynosi:

$$Mg_{\max} = |Mg(x=L)| = 0{,}00925[\mathrm{MNm}]$$



Przebieg momentu gnącego – w przedziale <0≤x≤0.5L> paraboliczny, w przedziale <0.5L≤x≤L> liniowy