CAŁKOWANIE NUMERYCZNE
całki pojedyncze

Kwadratury interpolacyjne

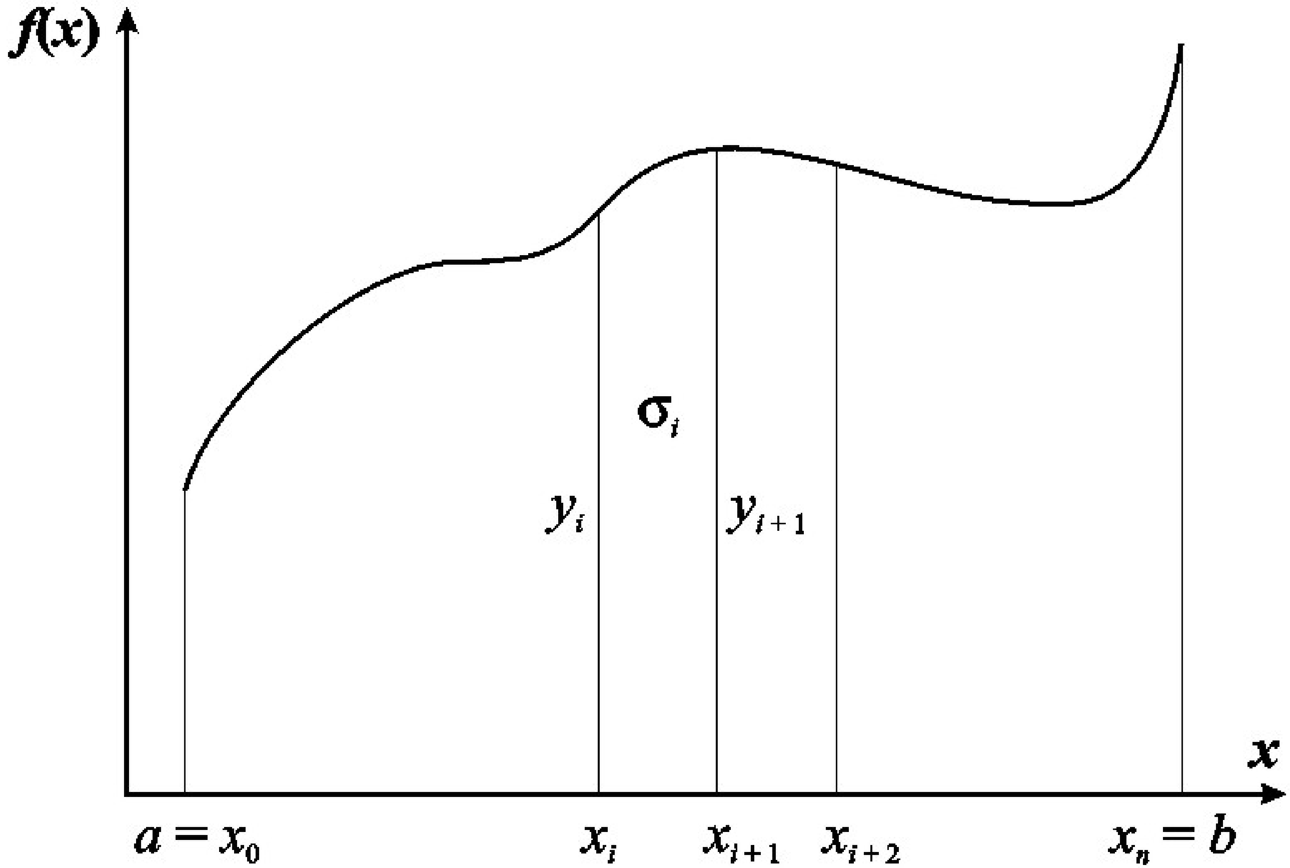
Rozpatrujemy funkcję $f(x)$ ciągłą i ograniczoną w przedziale domkniętym $[a, b]$.

Przedział $[a, b]$ dzielimy na skończoną liczbę podprzedziałów, wyróżniając na osi x zbiór punktów:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

Punkty x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ tworzą siatkę o stałym kroku (z reguły):

$$x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$$



Kwadratury interpolacyjne

Z własności całki oznaczonej wynika, że:

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Oznaczenie:

$$\sigma_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Istota metody kwadratur interpolacyjnych

Przybliżenie funkcji podcałkowej $f(x)$ w przedziale $[x_i,\ x_{i+1}]$ lub przedziale odpowiednio poszerzonym wzorem interpolacyjnym

$$\sigma_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}\,x \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} W(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$W(x)$ – wielomian interpolacyjny

Wyprowadzenie wzorów przybliżających wartość całki w przedziale $[a, b]$

$\Downarrow$

Wielomian interpolacyjny

$\Downarrow$

I. wzór Newtona

$$W(x) = y_i + q\Delta y_i + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \ldots, \quad q = \frac{x - x_i}{h}$$

Metoda prostokątów

Niech:

$$W(x) = y_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Oznacza to:

$f(x)$ w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ jest przybliżona wielomianem interpolacyjnym ograniczonym do pierwszego składnika

$f(x)$ na odcinku $[x_i, x_{i+1}]$ zastępujemy linią poziomą

$$\sigma_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}\,x \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i\,\mathrm{d}\,x$$

Wprowadzamy podstawienie:

$$q = \frac{x - x_i}{h}, \quad \mathrm{d}\,q = \frac{1}{h}\,\mathrm{d}\,x, \quad x = x_i \Rightarrow q = 0, \quad x = x_{i+1} \Rightarrow q = 1$$

Otrzymujemy:

$$\sigma_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i\,\mathrm{d}\,x = h\int_0^1 y_i\,\mathrm{d}\,q = hy_i$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Wzór prostokątów:

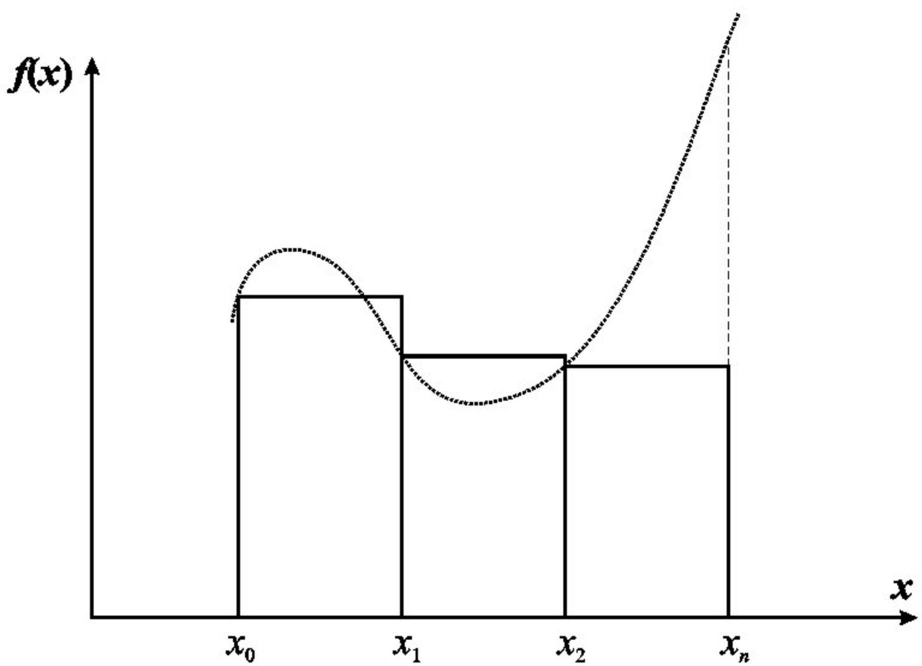
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i}$$

Wzór prostokątów z niedomiarem:

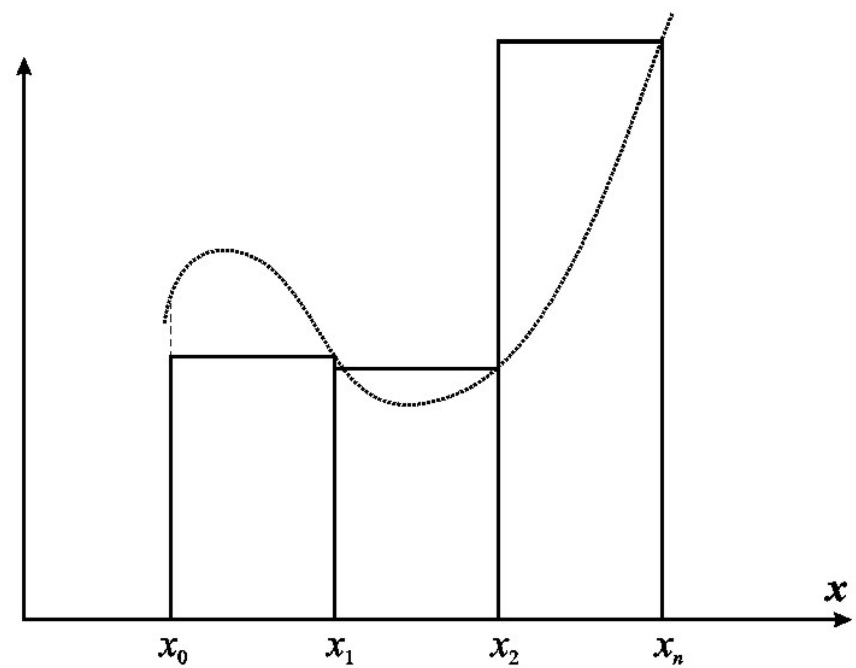
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Wzór prostokątów z nadmiarem
(wyprowadzany z II. wzoru Newtona):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$



Metoda prostokątów
z niedomiarem



Metoda prostokątów
z nadmiarem

Przykład

Obliczyć wartość całki, korzystając ze wzoru prostokątów:

$$\int_1^5 \left(x^2+2\right)\mathrm{d}\,x \qquad = 49\frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad f(x) = x^2+2 \qquad a=1 \qquad b=5$$

Ilość podprzedziałów: $n = 4$

Krok całkowania: $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{5-1}{4} = 1$

$$a = x_0 = 1 \qquad y_0 = f(x_0) = 1^2 + 2 = 3$$

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 1 = 2 \qquad y_1 = f(x_1) = 2^2 + 2 = 6$$

$$x_2 = x_0 + 2h = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad y_2 = f(x_2) = 3^2 + 2 = 11$$

$$x_3 = x_0 + 3h = 1 + 3 \cdot 1 = 4 \qquad y_3 = f(x_3) = 4^2 + 2 = 18$$

$$x_4 = x_0 + 4h = 1 + 4 \cdot 1 = 5 = b \qquad y_5 = f(x_4) = 5^2 + 2 = 27$$

Wzór prostokątów z niedomiarem:

$$h\sum_{i=0}^{n-1} y_i = h\sum_{i=0}^{3} y_i = h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 1\cdot(3+6+11+18) = 38$$

Wzór prostokątów z nadmiarem:

$$h\sum_{i=1}^{n} y_i = h\sum_{i=1}^{4} y_i = h(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 1\cdot(6+11+18+27) = 62$$

Metoda trapezów

Niech:

$$W(x) = y_i + q\Delta y_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Oznacza to:

$f(x)$ w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ jest przybliżona wielomianem interpolacyjnym ograniczonym do dwóch pierwszych składników

$$\sigma_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (y_i + q\Delta y_i)\,\mathrm{d}\,x$$

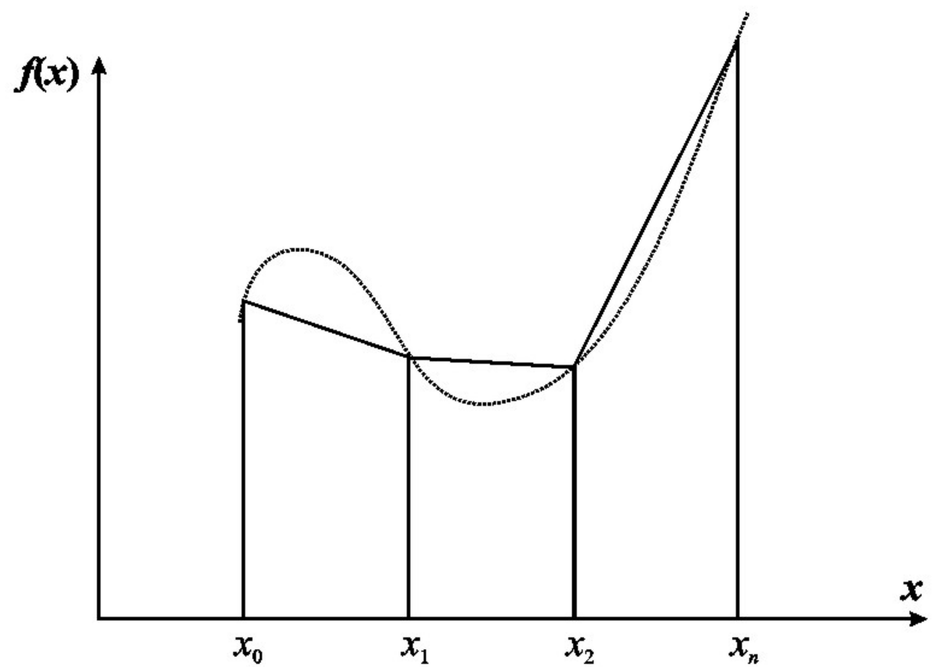
Wykorzystujemy podstawienia jak przy metodzie prostokątów:

$$\sigma_i = \int_0^1 (y_i + q\Delta y_i)\,\mathrm{d}\,q = \frac{1}{2} h\left(y_i + y_{i+1} \right)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i = h\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$$

Wzór trapezów:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]}$$



Metoda trapezów

Przykład

Obliczyć wartość całki z poprzedniego przykładu, korzystając ze wzoru trapezów:

$$\int_1^5 \left(x^2+2\right)\mathrm{d}\,x = 49\frac{1}{3}$$

Przedział całkowania podzielony, jak w poprzednim zadaniu:

$$n = 4$$

$$\Downarrow$$

Punkty x_i i wartości funkcji w tych punktach y_i są identyczne jak w poprzednim przykładzie

$$h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]=h\left[\frac{y_0+y_4}{2}+\sum_{i=1}^{3} y_i\right]=$$

$$=h\left[\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right]=1\cdot\left[\frac{3+27}{2}+6+11+18\right]=50$$

Wzór Simpsona

Niech:

$$W(x) = y_i + q\Delta y_i + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Oznacza to:

$f(x)$ w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ jest przybliżona wielomianem interpolacyjnym ograniczonym do trzech pierwszych składników

Przedział $[a, b]$ dzieli się na parzystą ilość podprzedziałów.

Pole pojedynczego trapezu krzywoliniowego:

$$\sigma_0 = \int_{x_0}^{x_2} \left(y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 \right) \mathrm{d}\, x = \frac{h}{3} \left(y_0 + 4 y_1 + y_2 \right)$$

Wzór Simpsona:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Przykład

Obliczyć wartość całki z poprzednich przykładów, korzystając ze wzoru Simpsona:

$$\int_1^5 \left(x^2+2\right)\mathrm{d}\,x = 49\frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right)=$$

$$=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3+4\cdot 6+2\cdot 11+4\cdot 18+27\right)=49\frac{1}{3}$$

Kwadratury Gaussa

Rozpatrujemy funkcję $f(x)$ ciągłą i ograniczoną w przedziale domkniętym $[a, b]$.

Pierwszy krok:

Sprowadzenie całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ do postaci znormalizowanej:

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$$

Normalizacja

Podstawienia:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi \qquad \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\mathrm{d}\xi$$

$$\xi = -1 \Rightarrow x = a, \qquad \xi = 1 \Rightarrow x = b$$

Czyli:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi\right)\mathrm{d}\,\xi = \int_{-1}^{1} F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$$

$$F(\xi) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi\right)$$

Przykład

Całkę sprowadzić do postaci znormalizowanej:

$$\int_1^5 (x^2+2)\,\mathrm{d}\,x$$

$$x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{5+1}{2}+\frac{5-1}{2}\xi \;=3+2\xi$$

$$\mathrm{d}\,x=\frac{b-a}{2}\mathrm{d}\,\xi \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\,x=\frac{5-1}{2}\mathrm{d}\,\xi \;=2\,\mathrm{d}\,\xi$$

$$\int_{1}^{5}(x^2+2)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1}\left\{\left[\left(3+2\xi\right)^2+2\right]\cdot 2\right\}\mathrm{d}\,\xi = \int_{-1}^{1}\left[8\xi^2+24\xi+22\right]\mathrm{d}\,\xi$$

$$F(\xi)=8\xi^2+24\xi+22$$

Znormalizowaną funkcję podcałkową $F(\xi)$ w przedziale $[-1, 1]$ przybliża się wielomianem stopnia $2n-1$

$$F(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{2n-1}\xi^{2n-1}$$

Następnie obliczamy wartość przybliżoną całki oznaczonej:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) w_i}$$

ξ_i – odcięte tzw. punktów Gaussa, $\xi_i \in [-1, 1]$
w_i – współczynniki nazywane wagami
n – ilość punktów Gaussa

n	ξ_i	w_i
2	- 0.57735	1.00000
	0.57735	1.00000
4	- 0.86113	0.34785
	- 0.33998	0.65214
	0.33998	0.65214
	0.86113	0.34785

Wagi i odcięte punktów Gaussa dla różnych wartości n

Przykład

Obliczyć wartość całki oznaczonej z poprzednich przykładów kwadraturami Gaussa dla $n = 2$.

Funkcja podcałkowa po normalizacji: $F(\xi) = 8\xi^2 + 24\xi + 22$

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) w_i = \sum_{i=1}^{2} F(\xi_i) w_i = F(\xi_1) w_1 + F(\xi_2) w_2$$

$$= \left[8\xi_1^2 + 24\xi_1 + 22 \right] \cdot w_1 + \left[8\xi_2^2 + 24\xi_2 + 22 \right] \cdot w_2 =$$

$$= \left[8(-0.57735)^2 + 24(-0.57735) + 22 \right] \cdot 1 +$$

$$+ \left[8(0.57735)^2 + 24(0.57735) + 22 \right] \cdot 1 \qquad = 49.33328$$

Przykład

Wyprowadzić kwadraturę Gaussa dla przypadku $n = 2$.

$$F(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3$$

Powyższą funkcję całkujemy w przedziale $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = \int_{-1}^{1} \left[a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \right] \mathrm{d}\,\xi =$$

$$= \left[a_0\xi + \frac{1}{2}a_1\xi^2 + \frac{1}{3}a_2\xi^3 + \frac{1}{4}a_3\xi^4 \right]_{-1}^{1} = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 \qquad *$$

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = F(\xi_1)w_1 + F(\xi_2)w_2 =$$

$$= \left(a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_1^2 + a_3\xi_1^3\right)w_1 + \left(a_0 + a_1\xi_2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_2^3\right)w_2 =$$

$$= 2a_0 + \left(\xi_1 + \xi_2\right)a_1 + \left(\xi_1^2 w_1 + \xi_2^2 w_2\right)a_2 + \left(\xi_1^3 w_1 + \xi_2^3 w_2\right)a_3 \qquad **$$

Porównujemy współczynniki przy a_0, a_1, a_2, a_3

ze wzorów * i **

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 = 0 \\ \xi_1^2 w_1 + \xi_2^2 w_2 = \dfrac{2}{3} \\ \xi_1^3 w_1 + \xi_2^3 w_2 = 0 \end{cases}$$

skąd: $w_1 = 1 \quad w_2 = 1 \quad \xi_1 \approx -0.57735 \quad \xi_2 \approx 0.57735$