CAŁKOWANIE NUMERYCZNE
całki podwójne

Kubatury Gaussa

Całka podwójna po trójkącie

Dana jest funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ ciągła i ograniczona w obszarze trójkątnym D.

Wierzchołki trójkąta wyznaczają punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) nie leżące na jednej prostej.

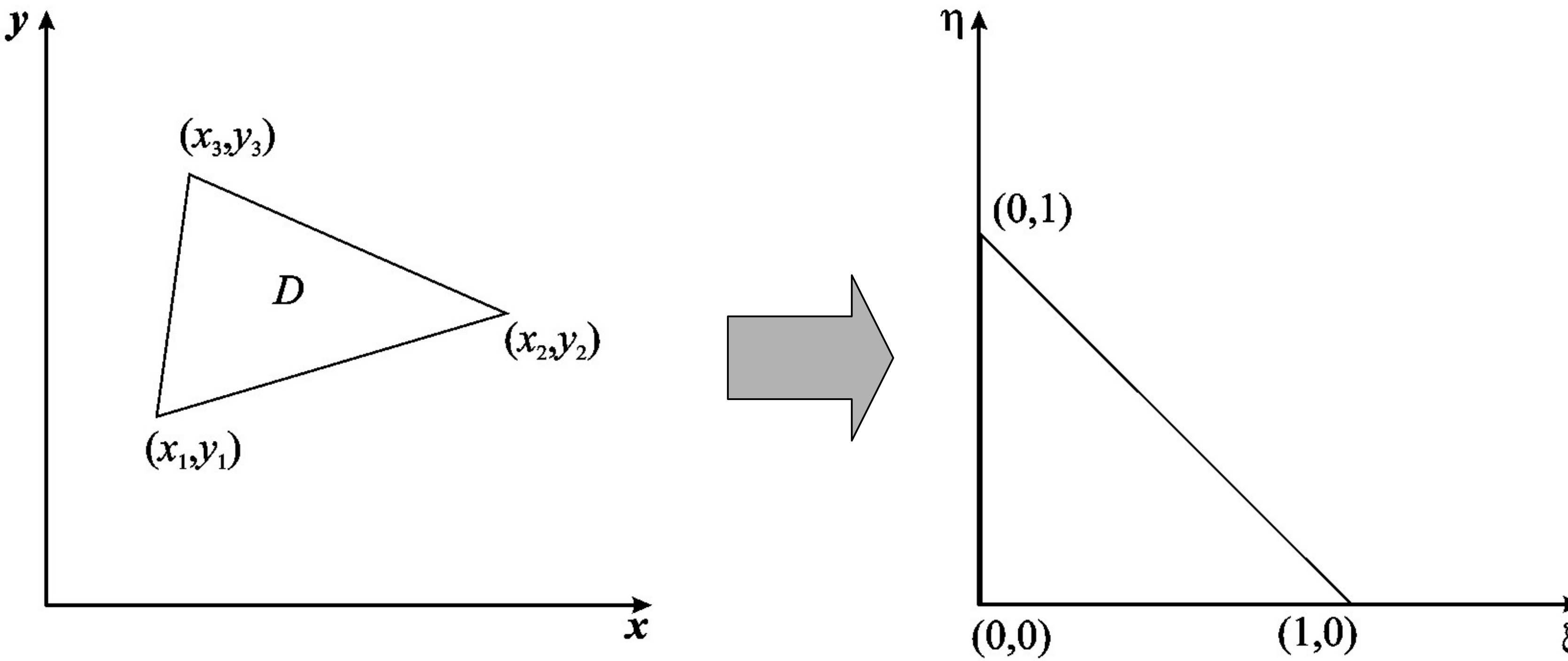
Wprowadza się podstawienie normalizujące wyjściowy trójkąt do trójkąta prostokątnego, równoramiennego o wierzchołkach (0, 0), (1, 0), (0, 1):

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta$$

Wierzchołki:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &\quad\rightarrow\quad (0,0) \\ (x_2, y_2) &\quad\rightarrow\quad (1,0) \\ (x_3, y_3) &\quad\rightarrow\quad (0,1) \end{aligned}$$



Trójkąt wyjściowy i znormalizowany

Zmiana układu współrzędnych wymaga pomnożenia funkcji podcałkowej przez tzw. jakobian przekształcenia:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$|J| = 2|D|$$

$|D|$ - pole wyjściowego trójkąta D

Funkcja podcałkowa dla trójkąta znormalizowanego przyjmuje postać:

$$F(\xi,\eta) = \left|J\right| f\left[x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta, y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta\right]$$

Końcowy wzór do obliczania całki podwójnej po trójkącie:

$$\boxed{\int_0^1 \mathrm{d}\,\xi \int_0^{1-\xi} F(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\,\eta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i)\,w_i}$$

ξ_i, η_i – współrzędne punktów Gaussa

w_i – wagi punktów Gaussa

n – ilość punktów Gaussa

n	ξ_i	η_i	w_i
3	1/2	1/2	1/3
	0	1/2	1/3
	1/2	0	1/3

Współrzędne i wagi punktów Gaussa

Przykład

Funkcję podcałkową sprowadzić do postaci znormalizowanej:

$$\iint_D (x+3y-1)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Wierzchołki trójkąta D:

$$(1,1) \quad (3,2) \quad (2,3)$$

$$f(x,y) = x+3y-1$$

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta = 1 + (3-1)\xi + (2-1)\eta = 1 + 2\xi + \eta$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta = 1 + (2-1)\xi + (3-1)\eta = 1 + \xi + 2\eta$$

$$J = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-1 & 2-1 \\ 2-1 & 3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$F(\xi,\eta)=\left|3\right|\cdot\left[1+2\xi+\eta+3(1+\xi+2\eta)-1\right] \;=9+15\xi+21\eta$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}\,\xi \int_0^{1-\xi}\left(9+15\xi+21\eta\right)\mathrm{d}\,\eta$$

Przykład

Obliczyć wartość całki z poprzedniego przykładu dla $n = 3$ punktów Gaussa.

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i)w_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} F(\xi_i,\eta_i)w_i$$

$$= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} + F\left(0,\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} + F\left(\frac{1}{2},0\right)\cdot\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[27+19.5+16.5\right] \quad = 10.5$$

Przykład

Wyprowadzić kubaturę Gaussa dla trójkąta znormalizowanego i $n = 1$.

$$F(\xi,\eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta$$

Całka z tej funkcji po trójkącie znormalizowanym:

$$\int_0^1 \mathrm{d}\,\xi \int_0^{1-\xi} (a_0 + a_1\xi + a_2\eta)\,\mathrm{d}\,\eta = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{6}a_2 \qquad *$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i)w_i = \frac{1}{2}\left(a_0 + a_1\xi_1 + a_2\eta_1\right)w_1$$

$$= \frac{1}{2} w_1 a_0 + \xi_1 w_1 a_1 + \eta_1 w_1 a_2 \qquad **$$

Z porównania współczynników przy a_0, a_1, a_2 z $*$ i $**$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} w_1 \\ \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2} \xi_1 w_1 \\ \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2} \eta_1 w_1 \end{cases}$$

$$w_1 = 1, \quad \xi_1 = \frac{1}{3}, \quad \eta_1 = \frac{1}{3}$$