GRY

(część 1)

Gry dwuosobowe o sumie zero

Zastosowanie:

Modelowanie sytuacji konfliktowych, w których występują dwie antagonistyczne strony.

Najbardziej znane modele:

- wybór strategii marketingowych przez konkurujące ze sobą firmy
- wybór strategii postępowania przedwyborczego przez konkurujących ze sobą polityków
- analiza strategicznych konfliktów międzynarodowych
- problem wspólnego pastwiska (problem of commons)
- problem gazeciarza

Założenia:

- każdy z graczy dysponuje pewną ilością strategii

- każdy z graczy zna możliwe strategie przeciwnika

- gracze podejmują decyzje równocześnie i niezależnie *

- żaden z graczy nie wie, którą strategię wybierze przeciwnik

- gracze postępują ostrożnie i zakładają, że przeciwnik postępuje racjonalnie

Rozwiązanie gry:

- określenie optymalnych strategii dla każdego z graczy ad. założenie *:

gracze podejmują decyzję równocześnie i niezależnie

↓

skutki jednoczesnego zastosowania przez graczy swoich strategii opisuje tzw. macierz wypłat

Interpretacja macierzy wypłat:
macierz korzyści Gracza 1. i macierz strat Gracza 2.

↓

Gracz 1. – maksymalizuje wygraną
Gracz 2. – minimalizuje przegraną

Przykład 6.

Sztaby wyborcze dwóch polityków, kandydujących do senatu spodziewają się, że decydujący wpływ na wynik kampanii mogą mieć jej dwa ostatnie dni. Obaj politycy zdają sobie sprawę, że kluczową rolę w wyborach mogą odegrać głosy mieszkańców dwóch dużych miast: X i Y.
Każdy z polityków może wybrać jedną z trzech strategii postępowania:
- spędzić dwa dni w mieście X
- spędzić dwa dni w mieście Y
- spędzić jeden dzień w mieście X i jeden w mieście Y

Sztab wyborczy Polityka 1. przygotował prognozy przyrostu głosów na Polityka 1. kosztem Polityka 2. w zależności od wybranych przez nich strategii.

Polityk 1.	Polityk 2.	Przyrost głosów na Polityka 1., kosztem Polityka 2. (w tys. głosów)
XX	XX	-50
XX	YY	-30
XX	XY	40
YY	XX	20
YY	YY	-10
YY	XY	20
XY	XX	50
XY	YY	10
XY	XY	20

Tabela 6.1.

Na podstawie tablicy prognoz, zbudować macierz wypłat.

Polityk 1. – Gracz 1.

Polityk 2. – Gracz 2.

XX – strategia 1.

YY – strategia 2.

XY – strategia 3.

		Polityk 2.		
	strategie	XX	YY	XY
Polityk 1.	XX	-50	-30	40
	YY	20	-10	20
	XY	50	10	20

Tabela 6.2.

		Gracz 2.		
	strategie	1	2	3
Gracz 1.	1	-50	-30	40
	2	20	-10	20
	3	50	10	20

Tabela 6.3.

Przykład 7.

Dwa koncerny samochodowe konkurują ze sobą na rynku pewnego kraju. Koncern A rozważa uruchomienie w lokalnej fabryce jednego z czterech modeli samochodów. Koncern B natomiast jednego z pięciu modeli samochodów.
W macierzy wypłat przedstawiono zyski koncernu A (straty koncernu B) przy produkcji poszczególnych samochodów, w zależności od decyzji podjętych przez koncerny.
Należy podjąć decyzję o rodzaju produkcji, będąc dyrektorem koncernu A.

Koncern A – Gracz 1. Koncern B – Gracz 2.

		Gracz 2.				
	strategie	1	2	3	4	5
Gracz 1.	1	200	70	10	30	120
	2	70	80	100	80	110
	3	80	150	0	80	30
	4	70	70	90	20	60

Tabela 7.1.

I. ETAP: REDUKCJA MACIERZY WYPŁAT

Poszukiwanie strategii zdominowanych

a_{ij} – element macierzy wypłat

$i = 1 \ldots m$ m – ilość strategii Gracza 1. (ilość wierszy)

$j = 1 \ldots n$ n – ilość strategii Gracza 2. (ilość kolumn)

Poszukiwanie strategii zdominowanych dla Gracza 1.

Porównujemy parami strategie Gracza 1.

Jeżeli dla danej pary strategii spełniony jest warunek:

$$\boxed{a_{zj} \leq a_{dj} \quad j = 1 \ldots n}$$

oraz co najmniej raz jest on spełniony ostro,

to strategia z jest zdominowana przez strategię d.

(strategia d to strategia dominująca strategię z)

Strategie 1 i 2:

1	200	70	10	30	120
2	70	80	100	80	110

Tabela 7.2.a.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 1 i 3:

1	200	70	10	30	120
3	80	150	0	80	30

Tabela 7.2.b.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 1 i 4:

1	200	70	10	30	120
4	70	70	90	20	60

Tabela 7.2.c.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 2 i 3:

2	70	80	100	80	110
3	80	150	0	80	30

Tabela 7.2.d.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 2 i 4:

2	70	80	100	80	110
4	70	70	90	20	60

Tabela 7.2.e.

Warunek dominacji jest spełniony

Strategia 4. – zdominowana   Strategia 2. - dominująca

Z macierzy wypłat usuwamy strategię 4. Gracza 1.

Porównane zostały wszystkie możliwe pary strategii Gracza 1.

Kończymy poszukiwania strategii zdominowanych dla Gracza 1.

		Gracz 2.				
	strategie	1	2	3	4	5
Gracz 1.	1	200	70	10	30	120
	2	70	80	100	80	110
	3	80	150	0	80	30

Tabela 7.3.

Poszukiwanie strategii zdominowanych dla Gracza 2.

Porównujemy parami strategie Gracza 2.

Jeżeli dla danej pary strategii spełniony jest warunek:

$$\boxed{a_{iz} \le a_{id} \quad i = 1 \ldots m}$$

oraz co najmniej raz jest on spełniony ostro,

to strategia d jest zdominowana przez strategię z.

(strategia z to strategia dominująca strategię d)

Strategie 1 i 2:

1	2
200	70
70	80
80	150

Tabela 7.4.a.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 1 i 3:

1	3
200	10
70	100
80	0

Tabela 7.4.b.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 1 i 4:

1	4
200	30
70	80
80	80

Tabela 7.4.c.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 1 i 5:

1	5
200	120
70	110
80	30

Tabela 7.4.d.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 2 i 3:

2	3
70	10
80	100
150	0

Tabela 7.4.e.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 2 i 4:

2	4
70	30
80	80
150	80

Tabela 7.4.f.

Warunek dominacji jest spełniony

Strategia 2. – zdominowana
Strategia 4. - dominująca

Z macierzy wypłat usuwamy strategię 2. Gracza 2.

Strategie 3 i 4:

3	4
10	30
100	80
0	80

Tabela 7.4.g.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 3 i 5:

3	5
10	120
100	110
0	30

Tabela 7.4.h.

Warunek dominacji jest spełniony

Strategia 5. – zdominowana
Strategia 3. - dominująca

⇓

Z macierzy wypłat usuwamy strategię 5. Gracza 2.

Porównane zostały wszystkie możliwe pary strategii Gracza 2.

Kończymy poszukiwania strategii zdominowanych dla Gracza 2.

		Gracz 2.		
	strategie	1	3	4
Gracz 1.	1	200	10	30
	2	70	100	80
	3	80	0	80

Tabela 7.5.

Zmieniła się ilość strategii dla Gracza 2.

Ponownie poszukujemy strategii zdominowanych dla Gracza 1.

Strategie 1 i 2:

1	200	10	30
2	70	100	80

Tabela 7.6.a.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 1 i 3:

1	200	70	10
3	80	0	80

Tabela 7.6.b.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Strategie 2 i 3:

2	70	100	80
3	80	0	80

Tabela 7.6.c.

Warunek dominacji nie jest spełniony

Porównane zostały wszystkie możliwe pary strategii Gracza 1.

Kończymy poszukiwania strategii zdominowanych dla Gracza 1.

Nie zmieniła się ilość strategii dla Gracza 1.

Nie poszukujemy strategii zdominowanych dla Gracza 2.

Uwaga!!!
W przypadku wyeliminowania strategii Gracza 1., należy ponownie sprawdzić strategie dla Gracza 2. itd....

II. ETAP: POSZUKIWANIE PUNKTU SIODŁOWEGO

- dla każdego wiersza znajdujemy wartość minimalną

- dla każdej kolumny znajdujemy wartość maksymalną

		Gracz 2.			
	strategie	1	3	4	$\min_j a_{ij}$
Gracz 1.	1	200	10	30	10
	2	70	100	80	70
	3	80	0	80	0
	$\max_i a_{ij}$	200	100	80	

Tabela 7.7.

- dla wyznaczonych minimalnych wartości z wierszy określamy wartość maksymalną:

$$\max_i(\min_j a_{ij}) = \max(10, 70, 0) = 70$$

- dla wyznaczonych maksymalnych wartości z kolumn określamy wartość minimalną:

$$\min_j(\max_i a_{ij}) = \min(200, 100, 80) = 80$$

Punkt siodłowy istnieje, gdy spełniony jest warunek:

$$\boxed{\max_i(\min_j a_{ij}) = \min_j(\max_i a_{ij})}$$

W tym przykładzie warunek istnienia punktu siodłowego nie jest spełniony

Stwierdzamy brak rozwiązania w zbiorze strategii czystych

Szukamy rozwiązania w zbiorze strategii mieszanych

III. ETAP: DEFINICJA ZADAŃ PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Macierz wypłat:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 200 & 10 & 30 \\ 70 & 100 & 80 \\ 80 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 200 & 70 & 80 \\ 10 & 100 & 0 \\ 30 & 80 & 80 \end{bmatrix}$$

Gracz 1. będzie stosował:

Strategię 1. z częstością (prawdopodobieństwem) p_1

Strategię 2. z częstością (prawdopodobieństwem) p_2

Strategię 3. z częstością (prawdopodobieństwem) p_3

(dla wyeliminowanej strategii 4. $p_4 = 0$)

v – wartość gry

Na podstawie transponowanej macierzy wypłat:

- wygrana Gracza 1. w przypadku, gdy Gracz 2. będzie stosował strategię 1:

$$200\,p_1 + 70\,p_2 + 80\,p_3 = v \qquad ①$$

- wygrana Gracza 1. w przypadku, gdy Gracz 2. będzie stosował strategię 3:

$$10\,p_1 + 100\,p_2 + 0\,p_3 = v \qquad ②$$

- wygrana Gracza 1. w przypadku, gdy Gracz 2. będzie stosował strategię 4:

$$30\,p_1 + 80\,p_2 + 80\,p_3 = v \qquad ③$$

Ponadto suma częstości (prawdopodobieństwa) stosowania wszystkich strategii musi być równa 1:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \qquad ④$$

Strategia optymalna, przy dowolnym postępowaniu Gracza 2. powinna zapewnić Graczowi 1. wygraną nie mniejszą niż wartość gry v.

Czyli ograniczenia przyjmują postać:

$$200\,p_1 + 70\,p_2 + 80\,p_3 \geq v \qquad ①$$

$$10\,p_1 + 100\,p_2 + 0\,p_3 \geq v \qquad ②$$

$$30\,p_1 + 80\,p_2 + 80\,p_3 \geq v \qquad ③$$

oraz:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \qquad ④$$

Gracz 1. dąży do maksymalizacji swojej wygranej.

Funkcja celu:

$$v \rightarrow \mathrm{MAX} \qquad ⑤$$

v – jest wartością nieznaną

Rozwiązanie zadania programowania liniowego jest niemożliwe

Aby się uniezależnić od wartości v:

- układ ograniczeń dzielimy obustronnie przez v

- podstawiamy:

$$x_i = \frac{p_i}{v}$$

$$200x_1 + 70x_2 + 80x_3 \geq 1 \qquad ①$$

$$10x_1 + 100x_2 + 0x_3 \geq 1 \qquad ②$$

$$30x_1 + 80x_2 + 80x_3 \geq 1 \qquad ③$$

Korzystając z ④:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v}$$

Otrzymujemy funkcję celu:

$$v \to \mathrm{MAX} \qquad ⑤$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v} \to \mathrm{MIN} \qquad ⑤$$

Model matematyczny:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v} \rightarrow \mathrm{MIN} \qquad ⑤$$

$$200x_1 + 70x_2 + 80x_3 \geq 1 \qquad ①$$

$$10x_1 + 100x_2 + 0x_3 \geq 1 \qquad ②$$

$$30x_1 + 80x_2 + 80x_3 \geq 1 \qquad ③$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Gracz 2. będzie stosował:

Strategię 1. z częstością (prawdopodobieństwem) q_1

Strategię 3. z częstością (prawdopodobieństwem) q_3

Strategię 4. z częstością (prawdopodobieństwem) q_4

Na podstawie macierzy wypłat:

- przegrana Gracza 2. w przypadku, gdy Gracz 1. będzie stosował strategię 1:

$$200q_1 + 10q_3 + 30q_4 = v \qquad ①$$

- przegrana Gracza 2. w przypadku, gdy Gracz 1. będzie stosował strategię 2:

$$70q_1 + 100q_3 + 80q_4 = v \qquad ②$$

- przegrana Gracza 2. w przypadku, gdy Gracz 1. będzie stosował strategię 3:

$$80q_1 + 0q_3 + 80q_4 = v \qquad ③$$

Ponadto suma częstości (prawdopodobieństwa) stosowania wszystkich strategii musi być równa 1:

$$q_1 + q_3 + q_4 = 1 \qquad ④$$

Strategia optymalna, przy dowolnym postępowaniu Gracza 1. powinna zapewnić Graczowi 2. przegraną nie większą niż wartość gry v.

Czyli ograniczenia przyjmują postać:

$$200q_1 + 10q_3 + 30q_4 \le v \qquad ①$$

$$70q_1 + 100q_3 + 80q_4 \le v \qquad ②$$

$$80q_1 + 0q_3 + 80q_4 \le v \qquad ③$$

oraz:

$$q_1 + q_3 + q_4 = 1 \qquad ④$$

Gracz 2. dąży do minimalizacji swojej przegranej.

Funkcja celu:

$$v \rightarrow MIN \qquad ⑤$$

Aby się uniezależnić od wartości v:

- układ ograniczeń dzielimy obustronnie przez v

- podstawiamy:

$$y_j = \frac{q_j}{v}$$

$$200y_1 + 10y_3 + 30y_4 \leq 1 \qquad ①$$

$$70y_1 + 100y_3 + 80y_4 \leq 1 \qquad ②$$

$$80y_1 + 0y_3 + 80y_4 \leq 1 \qquad ③$$

Korzystając z ④:

$$y_1 + y_3 + y_4 = \frac{1}{v}$$

Otrzymujemy funkcję celu:

$$v \rightarrow \text{MIN} \qquad ⑤$$

⇩

$$y_1 + y_3 + y_4 = \frac{1}{v} \rightarrow \text{MAX} \qquad ⑤$$

Model matematyczny:

$$y_1 + y_3 + y_4 = \frac{1}{v} \rightarrow \mathrm{MAX} \qquad ⑤$$

$$200y_1 + 10y_3 + 30y_4 \le 1 \qquad ①$$

$$70y_1 + 100y_3 + 80y_4 \le 1 \qquad ②$$

$$80y_1 + 0y_3 + 80y_4 \le 1 \qquad ③$$

$$y_1, y_3, y_4 \ge 0$$

IV. ETAP: ROZWIĄZANIE

Rozwiązanie zadania programowania liniowego dla Gracza 1.:

$$x_1 = 0.584 \cdot 10^{-3} \quad x_2 = 9.941 \cdot 10^{-3} \quad x_3 = 2.339 \cdot 10^{-3}$$

Rozwiązanie zadania programowania liniowego dla Gracza 2.:

$$y_1 = 3.654 \cdot 10^{-3} \quad y_3 = 0.365 \cdot 10^{-3} \quad y_4 = 8.844 \cdot 10^{-3}$$

Obliczenie wartości gry *v*.

Gracz 1.: $\mathrm{FC}: \quad x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v}$

$$v = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{1}{0.012864} = 77.73$$

Gracz 2.: $\mathrm{FC}: \quad y_1 + y_3 + y_4 = \frac{1}{v}$

$$v = \frac{1}{y_1 + y_3 + y_4} = \frac{1}{0.012864} = 77.73$$

Obliczenie częstości stosowania strategii.

Gracz 1.:

$$p_1 = x_1 \cdot v = 0.045455$$

$$p_2 = x_2 \cdot v = 0.772727$$

$$p_3 = x_3 \cdot v = 0.181818$$

Gracz 2.:

$$q_1 = y_1 \cdot v = 0.284091$$

$$q_3 = y_3 \cdot v = 0.028409$$

$$q_4 = y_4 \cdot v = 0.6875$$

		Gracz 2.			
	strategie	1	3	4	p_i
Gracz 1.	1	200	10	30	0.045455
	2	70	100	80	0.772727
	3	80	0	80	0.181818
	q_j	0.284091	0.028409	0.6875	

Tabela 7.8.

Wartość gry $v = 77.73$

Wartość gry zawsze mieści się w przedziale:

$$\left(\max_i(\min_j a_{ij}), \min_j(\max_i a_{ij})\right)$$

Tutaj: $v \in (70, 80)$

Przykład 8.

Dana jest następująca macierz wypłat:

		Gracz 2.		
	strategie	1	2	3
Gracz 1.	1	520	350	250
	2	650	420	400
	3	750	600	540

Tabela 8.1.

		Gracz 2.			
	strategie	1	2	3	$\min_j a_{ij}$
Gracz 1.	1	520	350	250	250
	2	650	420	400	400
	3	750	600	540	540
	$\max_i a_{ij}$	750	600	540	

Tabela 8.2.

$$\max_i(\min_j a_{ij}) = 540 \qquad \min_j(\max_i a_{ij}) = 540$$

⇓

Punkt siodłowy istnieje

⇓

Stwierdzamy, że istnieje rozwiązanie gry w zbiorze strategii czystych

Wartość gry: $v = 540$

Gracz 1. powinien stosować strategię 3.

Gracz 2. powinien stosować strategię 3.

Przykład 9.

Dana jest macierz wypłat:

		Gracz 2.		
	strategie	1	2	3
Gracz 1.	1	-2	8	2
	2	3	-1	0

Tabela 9.1.

		Gracz 2.			
	strategie	1	2	3	$\min_j a_{ij}$
Gracz 1.	1	-2	8	2	-2
	2	3	-1	0	-1
	$\max_i a_{ij}$	3	8	2	

Tabela 9.2.

$$\max_i(\min_j a_{ij}) = -1 \qquad\qquad \min_j(\max_i a_{ij}) = 2$$

Wartość gry: $v \in (-1, 2)$

W przypadku, gdy nie wiadomo, czy v jest liczbą dodatnią czy ujemną należy przekształcić macierz wypłat.

Znajdujemy w macierzy wypłat element najmniejszy:

$$a_{11} = -2$$

Do każdego elementu macierzy wypłat dodajemy wartość bezwzględną tego elementu, czyli 2.

		Gracz 2.		
	strategie	1	2	3
Gracz 1.	1	0	10	4
	2	5	1	2

Tabela 9.3.

		Gracz 2.			
	strategie	1	2	3	$\min_j a_{ij}$
Gracz 1.	1	0	10	4	0
	2	5	1	2	1
	$\max_i a_{ij}$	5	10	4	

Tabela 9.4.

Po rozwiązaniu gry, o wartość bezwzględną z elementu najmniejszego należy zmniejszyć v, aby otrzymać rzeczywistą wartość gry.