PROGRAMOWANIE WIELOKRYTERIALNE (CELOWE)

Przykład 14.

Zakład zamierza rozpocząć produkcję wyrobów W_1 i W_2. Wśród środków produkcyjnych, które zostaną użyte w produkcji dwa są limitowane. Limity te wynoszą: dla środka S_1 63 jednostki, a dla środka S_2 64 jednostki. Aby wyprodukować jednostkę wyrobu W_1 potrzeba 9 jednostek środka S_1 i 8 jednostek środka S_2. Aby wyprodukować jednostkę wyrobu W_2 potrzeba 7 jednostek S_1 i 8 jednostek S_2. Zarówno wyrób W_1 jak i W_2 jest niezbędny do produkcji pewnego urządzenia U. Jedno urządzenie U wymaga 3 jednostek W_1 i 2 jednostek W_2. Produkcja będzie opłacalna, jeżeli zakład sprzeda wyroby W_1 i W_2 potrzebne do wytworzenia co najmniej 6 jednostek urządzenia U.

c.d.

Określono trzy cele, które zakład zamierza osiągnąć:

1. Maksymalny zysk ze sprzedaży wyrobów, który powinien być nie mniejszy niż 100, przy cenach wyrobów wynoszących 6 dla W_1 i 5 dla W_2.
2. Utrzymanie zatrudnienia w zakładzie na poziomie 50 osób, przy czym na każdej zmianie przy produkcji wyrobu W_1 będą pracować 4 osoby, a przy produkcji W_2 3 osoby.
3. Nakłady inwestycyjne na rozpoczęcie produkcji nie mogą przekroczyć 50, przy czym koszty związane z jednostką wyrobu W_1 mają wynosić 2, a z wyrobem W_2 4.

Dla zakładu najważniejsze jest przede wszystkim osiągnięcie celu 3, następnie celu 1, natomiast najmniej istotny jest cel 2.

c.d.

Ponieważ najprawdopodobniej jednoczesne osiągnięcie wszystkich celów jest niemożliwe, określono wartości współczynników kar związanych z ewentualnym niezrealizowaniem poszczególnych celów:

dla celu 1.:

- współczynnik kary równy 5 dla odchylenia „ in minus”

dla celu 2.:

- współczynnik kary równy 4 dla odchylenia „in plus”
- współczynnik kary równy 2 dla odchylenia „in minus”

dla celu 3.:

- współczynnik kary równy 3 dla odchylenia „in plus”

Zbudować pełny model matematyczny dla tego zadania.

Ograniczenia:

	W_1	W_2	
S_1	9	7	63
S_2	8	8	64
U	3	2	6

Tabela 14.1.

Zmienne decyzyjne:

x_1 – wielkość produkcji wyrobu W_1
x_2 – wielkość produkcji wyrobu W_2

① $$9x_1 + 7x_2 \leq 63$$

② $$8x_1 + 8x_2 \leq 64$$

③ $$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

Cele:

Nr celu		W_1	W_2	Założony poziom celu
1	Zysk	6	5	Nie mniejszy niż 100
2	Zatrudnienie	4	3	Na poziomie 50
3	Nakłady inwestycyjne	2	4	Nie większe niż 50

Tabela 14.2.

cel 1.: $6x_1 + 5x_2 \geq 100$

cel 2.: $4x_1 + 3x_2 = 50$

cel 3.: $2x_1 + 4x_2 \leq 50$

<u>Priorytet:</u>

		P
cel 1.:	$6x_1 + 5x_2 \geq 100$	2
cel 2.:	$4x_1 + 3x_2 = 50$	3
cel 3.:	$2x_1 + 4x_2 \leq 50$	1

Współczynniki kar:

Nr celu		Dla odchyleń „in plus” $\hat{y}_i(+)$	Dla odchyleń „in minus” $\hat{y}_i(-)$
1	$6x_1 + 5x_2 \geq 100$		5
2	$4x_1 + 3x_2 = 50$	4	2
3	$2x_1 + 4x_2 \leq 50$	3	

$$i = 1, 2, 3$$

Tabela 14.3.

Dla celu 1.:

Zyski muszą być równe co najmniej 100

$\Downarrow$

Cel nie będzie zrealizowany, gdy zyski będą mniejsze od 100

$\Downarrow$

Minimalizujemy ewentualne odchylenia „in minus” dla tego celu

$\Downarrow$

Współczynnik kary $\hat{y}_1(-) > 0$

Każde odchylenie „in plus” od wartości 100 jest korzystne

Współczynnik kary $\hat{y}_1(+) = 0$

Dla celu 2.:

Zatrudnienie musi się utrzymać na poziomie 50

$\Downarrow$

Cel nie będzie zrealizowany, gdy zatrudnienie będzie większe lub mniejsze od 50

$\Downarrow$

Minimalizujemy ewentualne odchylenia zarówno „in plus” jak i „in minus” dla tego celu

$\Downarrow$

Współczynniki kary $\hat{y}_2(+), \hat{y}_2(-) > 0$

Dla celu 3.:

Nakłady inwestycyjne nie mogą przekroczyć 50

↓

Cel nie będzie zrealizowany, gdy nakłady przekroczą 50

↓

Minimalizujemy ewentualne odchylenia „in plus" dla tego celu

↓

Współczynnik kary $\hat{y}_3(+) > 0$

Każde odchylenie „in minus" od wartości 50 jest korzystne

Współczynnik kary $\hat{y}_3(-) = 0$

Cele:

- jednostronne: $\geq$, $\leq$

tylko jeden niezerowy współczynnik kary

odchylenia „niekorzystne z jednej strony”

- dwustronne: $=$

dwa niezerowe współczynnik kar

odchylenia „niekorzystne z dwu stron”

Model matematyczny:

Nr celu		$\hat{y}_i(+)$	$\hat{y}_i(-)$	P
1	$6x_1 + 5x_2 \geq 100$	0	5	2
2	$4x_1 + 3x_2 = 50$	4	2	3
3	$2x_1 + 4x_2 \leq 50$	3	0	1
O:	$9x_1 + 7x_2 \leq 63$	WB:	$x_1, x_2 \geq 0$	
	$x_1 + x_2 \leq 8$			
	$3x_1 + 2x_2 \geq 6$			

Tabela 14.4.

Przykład 15.

Rozwiązać zadanie programowania wielokryterialnego z Przykładu 14.

Cel o priorytecie 1: cel 3.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 50 \qquad \hat{y}_3(+) = 3$$

Budujemy zadanie programowania liniowego, w którym będziemy minimalizować niekorzystne odchyłki „in plus” dla tego celu

Zadanie P1.

Funkcja celu:

$$3y_3(+) \rightarrow \text{MIN}$$

Ograniczenia z zadania pierwotnego:

$$9x_1 + 7x_2 \leq 63$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

Ograniczenia wynikające z założonych celów:

$$6x_1 + 5x_2 - y_1(+) + y_1(-) = 100$$

$$4x_1 + 3x_2 - y_2(+) + y_2(-) = 50$$

$$2x_1 + 4x_2 - y_3(+) + y_3(-) = 50$$

Warunki brzegowe:

$$x_1, x_2, y_1(+), y_1(-), y_2(+), y_2(-), y_3(+), y_3(-) \geq 0$$

Zadanie rozwiązujemy np. metodą simplex:

Wyniki:

(jest kilka rozwiązań alternatywnych – w każdym $y_3(+) = 0$)

$$x_1 = 2 \quad y_1(+) = 0 \quad y_2(+) = 0 \quad y_3(+) = 0$$
$$x_2 = 0 \quad y_1(-) = 88 \quad y_2(-) = 42 \quad y_3(-) = 46$$

FC: $3y_3(+) = 0$

Wielkość odchyłki „in plus" dla <u>Zadania P1</u> = 0

<u>Cel o priorytecie 2:</u> cel 1.

$$6x_1 + 5x_2 \geq 100 \qquad \hat{y}_1(-) = 5$$

Budujemy zadanie programowania liniowego, w którym będziemy minimalizować niekorzystne odchyłki „in minus” dla tego celu

W zadaniu tym należy uwzględnić otrzymaną wartość odchyłki „in plus” dla celu o wyższym priorytecie ($y_3(+) = 0$)

Zadanie P2.

Funkcja celu: $$5y_1(-) \to \mathrm{MIN}$$

Ograniczenia z zadania pierwotnego: jak poprzednio

Ograniczenia wynikające z założonych celów: jak poprzednio

Ograniczenie wynikające z Zadania P1:

$$3y_3(+) = 0$$

Warunki brzegowe: jak poprzednio

Zadanie rozwiązujemy np. metodą simplex:

Wyniki:

$$x_1 = 3.5 \quad y_1(+) = 0 \quad y_2(+) = 0 \quad y_3(+) = 0$$
$$x_2 = 4.5 \quad y_1(-) = 56.5 \quad y_2(-) = 22.5 \quad y_3(-) = 25$$

FC: $5y_1(-) = 5 \cdot 56.5 = 282.5$

Wielkość odchyłki „in minus” dla <u>Zadania P2</u> = 56.5

Cel o priorytecie 3: cel 2.

$$4x_1 + 3x_2 = 50 \qquad \hat{y}_2(+) = 4 \quad \hat{y}_2(-) = 2$$

Budujemy zadanie programowania liniowego, w którym będziemy minimalizować niekorzystne odchyłki „in plus” i „in minus” dla tego celu

W zadaniu tym należy uwzględnić otrzymane wartości odchyłek dla celów o wyższym priorytecie ($y_3(+) = 0, y_1(-) = 56.5$)

Zadanie P3.

Funkcja celu: $4y_2(+) + 2y_2(-) \rightarrow \mathrm{MIN}$

Ograniczenia z zadania pierwotnego: jak poprzednio

Ograniczenia wynikające z założonych celów: jak poprzednio

Ograniczenie wynikające z Zadania P1: jak poprzednio

Ograniczenie wynikające z Zadania P2:

$$5y_1(-) = 282.5$$

Warunki brzegowe: jak poprzednio

Zadanie rozwiązujemy np. metodą simplex:

Wyniki:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = 3.5 & y_1(+) = 0 & y_2(+) = 0 & y_3(+) = 0 \\
x_2 = 4.5 & y_1(-) = 56.5 & y_2(-) = 22.5 & y_3(-) = 25
\end{array}
$$

FC: $4y_2(+) + 2y_2(-) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 22.5 = 45$

Wielkość odchyłki „in plus" dla <u>Zadania P3</u> = 0

Wielkość odchyłki „in minus" dla <u>Zadania P3</u> = 22.5

Ponieważ nie ma więcej celów, to rozwiązanie <u>Zadania P3</u>, jest rozwiązaniem optymalnym:

$$x_1 = 3.5 \quad x_2 = 4.5$$

	$y_i(+)$	$y_i(-)$
Cel 1.	0	56.5
Cel 2.	0	22.5
Cel 3.	0	25

Tabela 15.1.

<u>Odpowiedź:</u>

- Cel 1., który miał priorytet 2. nie zostanie zrealizowany, a niekorzystna odchyłka „in minus" będzie wynosić 56.5. (czyli osiągnięty zysk będzie wynosił 100 – 56.5 = 43.5)

- Cel 2., który miał priorytet 3. nie zostanie zrealizowany, a niekorzystna odchyłka „in minus" będzie wynosić 22.5. (czyli zatrudnienie obniży się do poziomu 27.5 osób ☜☺!)

- Cel 3., który miał priorytet 1. zostanie zrealizowany, a nawet wystąpi korzystna odchyłka „in minus" równa 25. (czyli połowa nakładów inwestycyjnych nie zostanie wykorzystana)

Przykład 16.

Rozwiązać zadanie programowania wielokryterialnego z Przykładu 14., przy czym zmieniona zostaje hierarchia celów.

- najważniejszy jest cel 3.
- cel 1 i 2 są jednakowo ważne.

Model matematyczny:

Nr celu		$\hat{y}_i(+)$	$\hat{y}_i(-)$	P
1	$6x_1 + 5x_2 \geq 100$	0	5	2
2	$4x_1 + 3x_2 = 50$	4	2	2
3	$2x_1 + 4x_2 \leq 50$	3	0	1
O:	$9x_1 + 7x_2 \leq 63$	WB:	$x_1, x_2 \geq 0$	
	$x_1 + x_2 \leq 8$			
	$3x_1 + 2x_2 \geq 6$			

Tabela 16.1.

Cel o priorytecie 1: cel 3.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 50 \qquad \hat{y}_3(+) = 3$$

Budujemy zadanie programowania liniowego, w którym będziemy minimalizować niekorzystne odchyłki „in plus” dla tego celu

Zadanie P1.

Funkcja celu:

$$3y_3(+) \to \mathrm{MIN}$$

Ograniczenia z zadania pierwotnego:

$$9x_1 + 7x_2 \le 63$$
$$x_1 + x_2 \le 8$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6$$

Ograniczenia wynikające z założonych celów:

$$6x_1 + 5x_2 - y_1(+) + y_1(-) = 100$$

$$4x_1 + 3x_2 - y_2(+) + y_2(-) = 50$$

$$2x_1 + 4x_2 - y_3(+) + y_3(-) = 50$$

Warunki brzegowe:

$$x_1, x_2, y_1(+), y_1(-), y_2(+), y_2(-), y_3(+), y_3(-) \geq 0$$

Wyniki:

(jest kilka rozwiązań alternatywnych – w każdym $y_3(+) = 0$)

$$x_1 = 2 \quad y_1(+) = 0 \quad y_2(+) = 0 \quad y_3(+) = 0$$
$$x_2 = 0 \quad y_1(-) = 88 \quad y_2(-) = 42 \quad y_3(-) = 46$$

FC: $3y_3(+) = 0$

Wielkość odchyłki „in plus" dla <u>Zadania P1</u> = 0.

Dotąd jak w <u>Przykładzie 15.</u>

Cele o priorytecie 2: cel 1. i 2.

$$6x_1 + 5x_2 \geq 100 \qquad \hat{y}_1(-) = 5$$

$$4x_1 + 3x_2 = 50 \qquad \hat{y}_2(+) = 4 \quad \hat{y}_2(-) = 2$$

Budujemy zadanie programowania liniowego, w którym będziemy minimalizować niekorzystne odchyłki „in minus” dla celu 1. i jednocześnie minimalizować odchyłki „in plus” i „in minus” dla celu 2.

W zadaniu tym należy uwzględnić otrzymaną wartość odchyłki „in plus” dla celu o wyższym priorytecie ($y_3(+) = 0$)

Zadanie P2.

Funkcja celu: $$5y_1(-)+4y_2(+)+2y_2(-)\rightarrow \mathrm{MIN}$$

Ograniczenia z zadania pierwotnego: jak poprzednio

Ograniczenia wynikające z założonych celów: jak poprzednio

Ograniczenie wynikające z Zadania P1:

$$3y_3(+)=0$$

Warunki brzegowe: jak poprzednio

Wyniki:

$$x_1 = 3.5 \quad y_1(+) = 0 \quad y_2(+) = 0 \quad y_3(+) = 0$$

$$x_2 = 4.5 \quad y_1(-) = 56.5 \quad y_2(-) = 22.5 \quad y_3(-) = 25$$

FC: $5y_1(-) + 4y_2(+) + 2y_2(-) = 327.5$

Ponieważ nie ma więcej celów, to rozwiązanie Zadania P2, jest rozwiązaniem optymalnym:

$$x_1 = 3.5 \quad x_2 = 4.5$$

	$y_i(+)$	$y_i(-)$
Cel 1.	0	56.5
Cel 2.	0	22.5
Cel 3.	0	25

Tabela 16.2.

Odpowiedź:

Identyczna jak w Przykładzie 15.

Przykład 17.

Rozwiązać zadanie programowania wielokryterialnego z Przykładu 14., przy czym wszystkie trzy cele są jednakowo ważne.

Model matematyczny:

Nr celu		$\hat{y}_i(+)$	$\hat{y}_i(-)$	P
1	$6x_1 + 5x_2 \geq 100$	0	5	1
2	$4x_1 + 3x_2 = 50$	4	2	1
3	$2x_1 + 4x_2 \leq 50$	3	0	1
O:	$9x_1 + 7x_2 \leq 63$	WB:	$x_1, x_2 \geq 0$	
	$x_1 + x_2 \leq 8$			
	$3x_1 + 2x_2 \geq 6$			

Tabela 17.1.

Budujemy zadanie programowania liniowego, w którym jednocześnie będziemy minimalizować niekorzystne odchyłki dla wszystkich celów.

Zadanie P1.

Funkcja celu: $5y_1(-)+4y_2(+)+2y_2(-)+3y_3(+) \rightarrow \mathrm{MIN}$

Identyczne jak w poprzednich przykładach:

Ograniczenia z zadania pierwotnego.

Ograniczenia wynikające z założonych celów.

Warunki brzegowe.

Wyniki:

$$x_1 = 3.5 \quad y_1(+) = 0 \quad y_2(+) = 0 \quad y_3(+) = 0$$

$$x_2 = 4.5 \quad y_1(-) = 56.5 \quad y_2(-) = 22.5 \quad y_3(-) = 25$$

FC: $5y_1(-) + 4y_2(+) + 2y_2(-) + 3y_3(+) = 327.5$

Odpowiedź: jak w poprzednim przykładzie.

Przykład 18.

Nr celu		$\hat{y}_i(+)$	$\hat{y}_i(-)$	P
1	$6x_1 + 5x_2 \geq 100$	0	5	2
2	$4x_1 + 3x_2 = 50$	4	2	3
3	$2x_1 + 4x_2 \leq 50$	3	0	1

WB: $x_1, x_2 \geq 0$

Tabela 18.1.

Dla każdego zadania dodatkowego model składa się z:

- Funkcji celu minimalizującej odpowiednie odchyłki

- Ograniczeń wynikających z nałożonych celów

- Dla zadań o priorytecie większym niż 1 z ograniczeń dodatkowych, wynikających z poprzednich zadań dodatkowych

- Warunków brzegowych

$$x_1 = 10.71 \quad x_2 = 7.41$$

	$y_i(+)$	$y_i(-)$	FC
Cel 1.	0	0	0
Cel 2.	14.29	0	57.14
Cel 3.	0	0	0

Tabela 18.2.

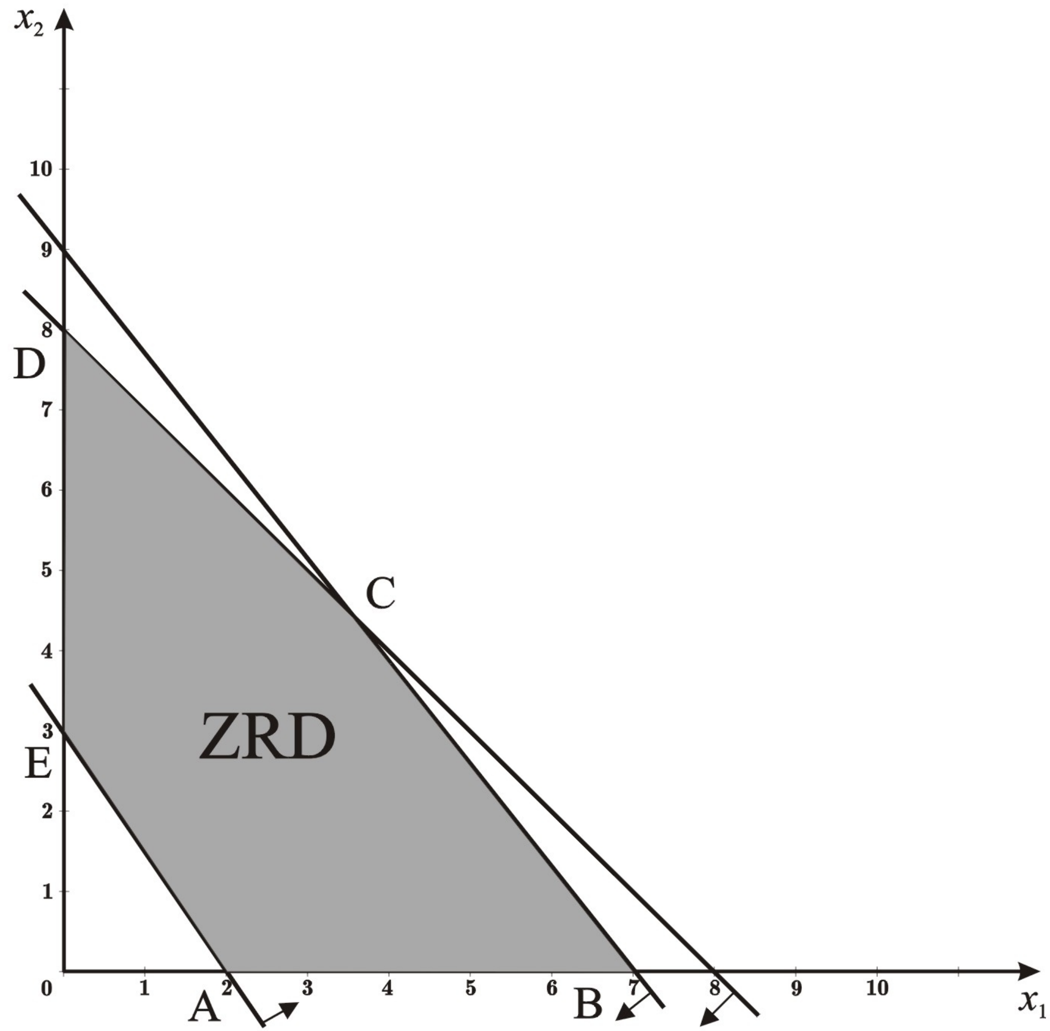
Przykład 19.

Rozwiązać zadanie programowania wielokryterialnego z Przykładu 14. metodą geometryczną.

Model matematyczny:

Nr celu		$\hat{y}_i(+)$	$\hat{y}_i(-)$	P
1	$6x_1 + 5x_2 \geq 100$	0	5	2
2	$4x_1 + 3x_2 = 50$	4	2	3
3	$2x_1 + 4x_2 \leq 50$	3	0	1
O:	$9x_1 + 7x_2 \leq 63$	WB:	$x_1, x_2 \geq 0$	
	$x_1 + x_2 \leq 8$			
	$3x_1 + 2x_2 \geq 6$			

Tabela 19.1.



Rys. 19.1. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych

$$A(2,0)$$
$$B(7,0)$$
$$C(3.5,4.5)$$
$$D(0,8)$$
$$E(0,3)$$

<u>Cel o priorytecie 1:</u> cel 3.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 50 \qquad\qquad \hat{y}_3(+) = 3$$

<u>Zadanie P1.</u>

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{P1}} = 2x_1 + 4x_2 \quad \mathrm{L}_{\mathrm{P1}} = 50$$

$$\mathrm{FC}: \quad 3y_3(+) \to \mathrm{MIN}$$

	Z_{P1}	$y_3(+)$	$y_3(-)$
A(2,0)	4	0	46
B(7,0)	14	0	36
C(3.5,4.5)	25	0	25
D(0,8)	32	0	18
E(0,3)	12	0	38

Tabela 19.2.

$y_3(+)$ – wartość o jaką Z_{P1} jest większe od wartość L_{P1}

$y_3(-)$ – wartość o jaką Z_{P1} jest mniejsze od wartość L_{P1}

Interesuje nas najmniejsza wartość odchyłki $y_3(+)$

5 alternatywnych rozwiązań

Cel o priorytecie 2: cel 1.

$$6x_1 + 5x_2 \geq 100 \qquad \hat{y}_1(-) = 5$$

Zadanie P2.

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{P}2} = 6x_1 + 5x_2 \qquad \mathrm{L}_{\mathrm{P}2} = 100$$

$$\mathrm{FC}: \quad 5y_1(-) \rightarrow \mathrm{MIN}$$

	Z_{P2}	$y_1(+)$	$y_1(-)$
A(2,0)	12	0	88
B(7,0)	42	0	58
C(3.5,4.5)	43.5	0	56.5
D(0,8)	40	0	60
E(0,3)	15	0	85

Tabela 19.3.

$y_1(+)$ – wartość o jaką Z_{P2} jest większe od wartość L_{P2}

$y_1(-)$ – wartość o jaką Z_{P2} jest mniejsze od wartość L_{P2}

Interesuje nas najmniejsza wartość odchyłki $y_1(-)$

$$\Downarrow$$

$y_1(-) = 56.5$ Punkt C

$$\mathrm{FC}: \quad 5y_1(-) = 282.5$$

Punkt C jest również jednym z alternatywnych rozwiązań optymalnych dla Zadania P1.

<u>Cel o priorytecie 3:</u> cel 2.

$$4x_1 + 3x_2 = 50 \qquad\qquad \hat{y}_2(+) = 4 \quad \hat{y}_2(-) = 2$$

<u>Zadanie P3.</u>

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{P}3} = 4x_1 + 3x_2 \quad \mathrm{L}_{\mathrm{P}3} = 50$$

$$\mathrm{FC}: \quad 4y_2(+) + 2y_2(-) \to \mathrm{MIN}$$

	Z_{P3}	$y_2(+)$	$y_2(-)$
A(2,0)	8	0	42
B(7,0)	28	0	22
C(3.5,4.5)	27.5	0	22.5
D(0,8)	24	0	26
E(0,3)	9	0	41

Tabela 19.4.

$y_2(+)$ – wartość o jaką Z_{P3} jest większe od wartość L_{P3}

$y_2(-)$ – wartość o jaką Z_{P3} jest mniejsze od wartość L_{P3}

Interesuje nas najmniejsza wartość odchyłki $4y_2(+) + 2\,y_2(-)$

$$\Downarrow$$

$y_2(+) = 0 \quad y_2(-) = 22$ Punkt B

Ponieważ dla celów o wyższych priorytetach rozwiązaniem najlepszym był punkt C

Przyjmujemy punkt C jako rozwiązanie dla <u>Zadania P3.</u>

$$\mathrm{FC}: \quad Z_{\mathrm{P}3}(\mathrm{C}) = 4y_2(+) + 2y_2(-) = 45$$

Ostateczne rozwiązanie zadania programowania wielokryterialnego:

Punkt C(3.5,4.5)

	$y_i(+)$	$y_i(-)$
Cel 1.	0	56.5
Cel 2.	0	22.5
Cel 3.	0	25

Tabela 19.5.