

BADANIA OPERACYJNE

„Badania operacyjne są sztuką dawania złych odpowiedzi na te praktyczne pytania, na które inne metody dają odpowiedzi jeszcze gorsze.”

T. Sayty

Standardowe zadanie **programowania liniowego**

Standardowe zadanie programowania liniowego

Rozważamy proces, w którym zmiennymi są x_1, x_2, \dots, x_n .

Proces poddany jest m ograniczeniom, zapisanymi w postaci:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

a_{ij}, b_i – znane współczynniki

Standardowe zadanie programowania liniowego

Dopuszczamy jedynie nieujemne wartości x_j , czyli:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Zakładamy również, że:

$$b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

Z procesem jest związana funkcja Z :

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (4)$$

$c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$ – znane współczynniki

Zagadnienie polega na maksymalizacji (minimalizacji) funkcji Z (wzór (4)) spełniającej ograniczenia (1), (2), (3).

Zapis:

$$\text{FC: } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{MAX}$$
$$\text{O: } \begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n \\ b_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (5)$$

Zapis w postaci macierzowej:

$$\text{FC: } Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\text{O: } \begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Standardowe zadanie programowania liniowego

- ☞ Bardzo powszechną w zagadnieniach praktycznych odmianą ograniczeń są ograniczenia w postaci nierówności. To też są zagadnienia programowania liniowego ale nie w postaci standardowej.

Przykład 1.

Zakład zamierza rozpocząć produkcję wyrobów W_1 i W_2 . Wśród środków produkcyjnych, które zostaną użyte w produkcji dwa są limitowane. Limity te wynoszą: dla środka S_1 63 jednostki, a dla środka S_2 64 jednostki. Aby wyprodukować jednostkę wyrobu W_1 potrzeba 9 jednostek środka S_1 i 8 jednostek środka S_2 . Aby wyprodukować jednostkę wyrobu W_2 potrzeba 7 jednostek S_1 i 8 jednostek S_2 . Wyroby W_1 i W_2 są niezbędne do produkcji urządzenia U . Jedno urządzenie U wymaga 3 jednostek wyrobu W_1 i 2 jednostek wyrobu W_2 . Produkcja będzie opłacalna, jeżeli zakład sprzeda wyroby W_1 i W_2 potrzebne do wytworzenia co najmniej 6 jednostek urządzenia U .

Wiedząc, że cena wyrobu W_1 będzie wynosić 6, a cena wyrobu W_2 5 określ wielkość produkcji maksymalizującej zysk ze sprzedaży.

Standardowe zadanie programowania liniowego

		W_1	W_2	
①	S_1	9	7	63
②	S_2	8	8	64
③	U	3	2	6
	cena	6	5	

Zmienne decyzyjne:

x_1 – wielkość produkcji wyrobu W_1

x_2 – wielkość produkcji wyrobu W_2

Standardowe zadanie programowania liniowego

Funkcja celu:

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

Ograniczenia:

$$\textcircled{1} \quad 9x_1 + 7x_2 \leq 63$$

$$\textcircled{2} \quad 8x_1 + 8x_2 \leq 64$$

$$\textcircled{3} \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

Warunki brzegowe:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Zadanie programowania liniowego:

$$\text{FC: } Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\text{O: } \quad \textcircled{1} \quad 9x_1 + 7x_2 \leq 63$$

$$\quad \quad \textcircled{2} \quad x_1 + x_2 \leq 8$$

$$\quad \quad \textcircled{3} \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$\text{WB: } \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

 Ograniczenia w postaci nierówności.
To nie jest standardowe zadanie programowania liniowego

METODA GEOMETRYCZNA

Zadanie programowania liniowego z dwoma zmiennymi decyzyjnymi można rozwiązać metodą geometryczną (szczegóły na laboratorium).

Na podstawie tej metody otrzymujemy zbiór punktów, a następnie sprawdzamy, w którym z nich wartość funkcji celu jest największa (lub najmniejsza).

Rozwiązanie dla zadania z Przykładu 1.:

$$A(2,0) \quad Z(2,0) = 6 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 12$$

$$B(7,0) \quad Z(7,0) = 6 \cdot 7 + 5 \cdot 0 = 42$$

$$C(3.5,4.5) \quad Z(3.5,4.5) = 6 \cdot 3.5 + 5 \cdot 4.5 = 43.5 \quad \text{MAX}$$

$$D(0,8) \quad Z(0,8) = 6 \cdot 0 + 5 \cdot 8 = 40$$

$$E(0,3) \quad Z(0,3) = 6 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 15$$

Odpowiedź:

Aby zysk był maksymalny, należy wyprodukować 3.5 jednostki W_1 oraz 4.5 jednostki W_2 .

ZADANIE DUALNE

Przykład 2.

Zakład produkuje cztery wyroby W_1 , W_2 , W_3 i W_4 . Wśród środków produkcyjnych, używanych w procesie wytwarzania wyrobów dwa są limitowane. Limity te, oraz ilości środków potrzebne do wytworzenia poszczególnych wyrobów zostały przedstawione w tabeli.

Znając jednostkowe ceny wyrobów, określić taki plan produkcji aby zysk był maksymalny.

Zadanie dualne

	W_1	W_2	W_3	W_4	
S_1	1	3	1	1	600
S_2	4	1	1	5	1200
cena	8	9	6	10	

Zmienne decyzyjne:

x_i – wielkość produkcji wyrobu W_i $i = 1...4$

Model matematyczny:

FC:

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 10x_4 \rightarrow \text{MAX}$$

O:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 600$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 1200$$

WB:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Zadanie pierwotne:

$$\text{FC: } Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\text{O: } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\text{WB: } \mathbf{x} \geq 0$$

Zadanie dualne:

$$\text{FC: } \hat{Z} = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \text{MIN}$$

$$\text{O: } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\text{WB: } \mathbf{y} \geq 0$$

Model matematyczny zadania dualnego:

FC:

$$\hat{Z}(y_1, y_2) = 600y_1 + 1200y_2 \rightarrow \text{MIN}$$

O:

$$y_1 + 4y_2 \geq 8$$

$$3y_1 + y_2 \geq 9$$

$$y_1 + y_2 \geq 6$$

$$y_1 + 5y_2 \geq 10$$

WB:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Interpretacja zadania dualnego

Konkurent postanawia wykupić zapasy środków produkcji od producenta, i chce zminimalizować koszty materiałów (ma kupić 600 jednostek S_1 i 1200 jednostek S_2).

Zmienne decyzyjne w zadaniu dualnym:

y_1 – cena jednostki środka produkcji S_1

y_2 – cena jednostki środka produkcji S_2

$$\hat{Z}(y_1, y_2) = 600y_1 + 1200y_2 \rightarrow \text{MIN}$$

Interpretacja zadania dualnego c. d.

Wyprodukowanie wyrobów wiąże się z kosztem środków S_1 i S_2 . Konkurent, aby zachęcić producenta do sprzedaży materiałów musi mu zapłacić co najmniej tyle, ile producent uzyskałby ze sprzedaży wyrobów, które produkuje.

$$y_1 + 4y_2 \geq 8$$

$$3y_1 + y_2 \geq 9$$

$$y_1 + y_2 \geq 6$$

$$y_1 + 5y_2 \geq 10$$

Twierdzenie o dualności

Zadanie pierwotne ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy zadanie dualne ma rozwiązanie, oraz:

$$Z(\text{MAX}) = \hat{Z}(\text{MIN})$$

wnioski:

1. Rozwiązując jedno z zadań, automatycznie rozwiązujemy też drugie.
2. Twierdzenie ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ czasami łatwiej jest rozwiązać zadanie dualne (mniej zmiennych).

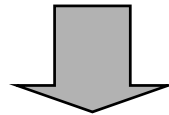
Na podstawie metody geometrycznej:

A(0,9)	$\hat{Z}(A) = 10800$	
B(3/2,9/2)	$\hat{Z}(B) = 6300$	
C(5,1)	$\hat{Z}(C) = 4200$	MIN
D(10,0)	$\hat{Z}(D) = 6000$	

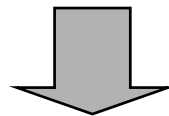
Aby koszt materiałów był najmniejszy i wynosił 4200, konkurent musi zapłacić za jednostkę S_1 5, a za jednostkę S_2 1.

Na podstawie twierdzenia o dualności:

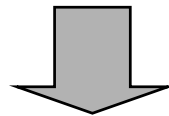
Maksimum FC zadania pierwotnego jest równe minimum FC zadania dualnego.



Zysk producenta wyniesie również 4200



Jakie jest rozwiązanie zadania pierwotnego?



Twierdzenie o równowadze.

Twierdzenie o równowadze

Jeżeli i -ty warunek zadania pierwotnego (ZP) jest (choć w jednym) optymalnym rozwiązaniu spełniony z nierównością (ostro), to odpowiadająca mu i -ta zmienna y_i w (dowolnym) optymalnym rozwiązaniu zadania dualnego (ZD) przyjmuje wartość zero.

Dla zmiennej $x_i > 0$ w rozwiązaniu optymalnym ZP odpowiadające jej i -te ograniczenie w ZD jest ograniczeniem równościowym.

Twierdzenie jest również słuszne w przeciwną stronę.

Rozwiązanie przykładu:

$$y_1 = 5 \quad y_2 = 1$$

Sprawdzenie ograniczeń ZD:

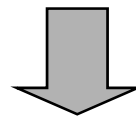
$$j = 1: 5 + 4 \cdot 1 > 8$$

$$j = 2: 3 \cdot 5 + 1 > 9$$

$$j = 3: 5 + 1 = 6$$

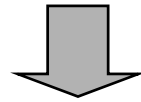
$$j = 4: 5 + 5 \cdot 1 = 10$$

Nierówności ostre dla $j = 1$ i $j = 2$:



Dla rozwiązania optymalnego ZP $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$

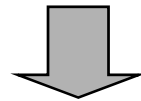
Ponieważ: $y_1 = 5 > 0$ $y_2 = 1 > 0$



Ograniczenia 1 i 2 w ZP są ograniczeniami równościowymi
(przy czym $x_1 = 0$, $x_2 = 0$):

$$x_3 + x_4 = 600$$

$$x_3 + 5x_4 = 1200$$



$$x_3 = 450 \quad x_4 = 150$$

Odpowiedź do zadania pierwotnego:

Aby zysk był maksymalny, producent musi wyprodukować 450 jednostek W_3 i 150 jednostek W_4 . Zysk wyniesie 4200.

Szczegółowe zasady formułowania zadania dualnego

Zadanie pierwotne

maksymalizacja

Zadanie dualne

minimalizacja

Zadanie pierwotne

Ograniczenia

i - te: \geq

i - te: \leq

i - te: $=$

Zadanie dualne

Zmienne

$y_i \leq 0$

$y_i \geq 0$

y_i dowolne

Zadanie pierwotne

Zadanie dualne

Zmienne

Ograniczenia

$$x_j \geq 0$$

$$j - \text{te:} \quad \geq$$

$$x_j \leq 0$$

$$j - \text{te:} \quad \leq$$

$$x_j \text{ dowolne}$$

$$j - \text{te:} \quad =$$

Przykład 3.

Dla podanego zadania pierwotnego zapisać zadanie dualne.

$$\text{FC: } Z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\text{O: } x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 20$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 50$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 40$$

$$\text{WB: } x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 \quad x_4 \text{ dowolne}$$

Zadanie dualne:

$$\text{FC: } \hat{Z}(\mathbf{y}) = 20y_1 + 50y_2 + 40y_3 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\text{O: } y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$$

$$2y_1 + y_2 - y_3 \geq 3$$

$$-3y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 1$$

$$y_1 - y_2 + 2y_3 = 1$$

$$\text{WB: } y_1 \text{ dowolne} \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \leq 0$$

Na dzisiaj wystarczy...