

# **ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE**

**(część 1)**

# **Zadanie zbilansowane**

## Przykład 10.

Firma posiada zakłady wytwórcze w miastach **A**, **B** i **C**, oraz centra dystrybucyjne w miastach **D**, **E**, **F** i **G**.

Możliwości produkcyjne zakładów wynoszą odpowiednio: 120, 20 i 60 jednostek, natomiast zapotrzebowanie w poszczególnych centrach dystrybucyjnych odpowiednio: 80, 30, 40 i 50 jednostek.

Jednostkowe koszty transportu przedstawione są w tabeli. Określić taki plan przewozów, aby koszty dostaw z zakładów wytwórczych do centrów dystrybucyjnych były minimalne.

Tabela kosztów jednostkowych:

5	3	8	2	<b>A</b>
4	6	4	2	<b>B</b>
9	2	3	11	<b>C</b>
<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	dostawcy odbiorecy

# **Model matematyczny**

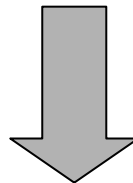
Produkcja zakładów (podaż):

$$120 + 20 + 60 = 200$$

Zapotrzebowanie w centrach dystrybucyjnych (popyt):

$$80 + 30 + 40 + 50 = 200$$

Produkcja = Zapotrzebowanie      lub      Podaż = Popyt



Zadanie jest zbilansowane

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

gdzie:

$a_i$  – zasoby  $i$  – tego dostawcy

$b_j$  – zapotrzebowanie  $j$  – tego odbiorcy

$m$  – ilość dostawców

$n$  – ilość odbiorców

$c_{ij}$  – koszt transportu od  $i$  – tego dostawcy do  $j$  – tego odbiorcy

## Zmienne decyzyjne

$x_{ij}$  – ilość towaru przewożonego od  $i$  – tego dostawcy do  $j$  – tego odbiorcy

$$i = 1 \dots m \quad j = 1 \dots n$$

$$m = 3 \quad n = 4$$

np.

$x_{24}$  – ilość towaru przewożonego od drugiego dostawcy (miasto **B**) do czwartego odbiorcy (miasto **G**).



## Funkcja celu

$$\begin{aligned}
 Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) = \\
 &= 5x_{11} + 3x_{12} + 8x_{13} + 2x_{14} + \\
 &+ 4x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + 2x_{24} + \\
 &+ 9x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 11x_{34} \quad \rightarrow \text{MIN}
 \end{aligned}$$

$$Z(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{MIN}$$

## Ograniczenia

Dostawcy:

$$\mathbf{A}: x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 120$$

$$\mathbf{B}: x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20$$

$$\mathbf{C}: x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 60$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1 \dots m$$

Ograniczenia c. d.

Odbiorcy:

$$\mathbf{D}: x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$$

$$\mathbf{E}: x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30$$

$$\mathbf{F}: x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40$$

$$\mathbf{G}: x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1 \dots n$$

Warunki brzegowe

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1 \dots m \quad j = 1 \dots n$$

**Pierwsze rozwiązanie**  
**dopuszczalne**

**Metoda kąta**  
**północno - zachodniego**

## Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne – metoda kąta NW

---

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)

(1,1)...(3,4) - węzły

Ilość węzłów bazowych:

$$m + n - 1$$

W przykładzie:

$$3 + 4 - 1 = 6$$



Tablica przewozów:

80				120
				20
				60
80	30	40	50	

$$\min(120, 80) = 80$$

Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne – metoda kąta NW

Tablica przewozów:

80				<del>120</del> 40
0				20
0				60
<del>80</del> 0	30	40	50	

Tablica przewozów:

80	30			<del>120</del> 40
0				20
0				60
<del>80</del>	30	40	50	
0				

$$\min(40, 30) = 30$$

Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne – metoda kąta NW

Tablica przewozów:

80	30			<del>120</del>	<del>40</del>	10
0	0			20		
0	0			60		
<del>80</del>	<del>30</del>	40	50			
0	0					

Tablica przewozów:

80	30	10		<del>120</del>	<del>40</del>	10
0	0			20		
0	0			60		
<del>80</del>	<del>30</del>	40	50			
0	0					

$$\min(10, 40) = 10$$

Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne – metoda kąta NW

Tablica przewozów:

80	30	10	0	<del>120</del>	<del>40</del>	<del>10</del>	0
0	0			20			
0	0			60			
<del>80</del>	<del>30</del>	<del>40</del>	50				
0	0	30					

Tablica przewozów:

80	30	10	0	<del>120</del>	<del>40</del>	<del>10</del>	0
0	0	20		20			
0	0			60			
<del>80</del>	<del>30</del>	<del>40</del>	50				
0	0	30					

$$\min(20, 30) = 20$$

Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne – metoda kąta NW

Tablica przewozów:

80	30	10	0	<del>120</del>	<del>40</del>	<del>10</del>	0
0	0	20	0	<del>20</del>	0		
0	0			60			

<del>80</del>	<del>30</del>	<del>40</del>	50
0	0	<del>30</del>	10



Tablica przewozów:

80	30	10	0	<del>120</del>	<del>40</del>	<del>10</del>	0
0	0	20	0	<del>20</del>	0		
0	0	10		60			

~~80~~      ~~30~~      ~~40~~      50

0      0      ~~30~~

10

$$\min(60, 10) = 10$$

Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne – metoda kąta NW

Tablica przewozów:

80	30	10	0	<del>120</del>	<del>40</del>	<del>10</del>	0
0	0	20	0	<del>20</del>	0		
0	0	10		<del>60</del>	50		
<del>80</del>	<del>30</del>	<del>40</del>	50				
0	0	<del>30</del>					
		<del>10</del>					
		0					

Tablica przewozów:

80	30	10	0	<del>120</del>	<del>40</del>	<del>10</del>	0
0	0	20	0	<del>20</del>	0		
0	0	10	50	<del>60</del>	50		

~~80~~

~~30~~

~~40~~

50

0

0

~~30~~

~~10~~

$\min(50, 50) = 50$

0

Tablica przewozów:

80	30	10	0	<del>120</del>	<del>40</del>	<del>10</del>	0
0	0	20	0	<del>20</del>	0		
0	0	10	50	<del>60</del>	<del>50</del>	0	

<del>80</del>	<del>30</del>	<del>40</del>	<del>50</del>
0	0	<del>30</del>	0
		<del>10</del>	
		0	

## Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne – metoda kąta NW

80 *	30 *	10 *	0
0	0	20 *	0
0	0	10 *	50 *

\* - węzły bazowe

Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne:

$$x_{11} = 80 \quad x_{12} = 30 \quad x_{13} = 10 \quad x_{14} = 0$$

$$x_{21} = 0 \quad x_{22} = 0 \quad x_{23} = 20 \quad x_{24} = 0$$

$$x_{31} = 0 \quad x_{32} = 0 \quad x_{33} = 10 \quad x_{34} = 50$$

$$\text{FC: } Z(x_{ij}) = 1230$$

Sprawdzenie optymalności rozwiązania

				$u_1$
				$u_2$
				$u_3$
$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	

$u_i$  – zmienne związane z dostawcami

$v_j$  – zmienne związane z odbiorcami

Wskaźniki optymalności:

$$e_{ij} = u_i + v_j + c_{ij}$$

Dla węzłów bazowych:

$$e_{ij} = 0$$

## Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne – metoda kąta NW

---

$$(1,1) \quad u_1 + v_1 + 5 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$(1,2) \quad u_1 + v_2 + 3 = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$(1,3) \quad u_1 + v_3 + 8 = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$(2,3) \quad u_2 + v_3 + 4 = 0 \quad \textcircled{4}$$

$$(3,3) \quad u_3 + v_3 + 3 = 0 \quad \textcircled{5}$$

$$(3,4) \quad u_3 + v_4 + 11 = 0 \quad \textcircled{6}$$



Układ 6 równań z 7 niewiadomymi.

Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Aby go rozwiązać za jedną zmienną przyjmuje się dowolną wartość.

Przyjmujemy  $u_1 = 0$

$$z \text{ ①: } v_1 = -5$$

$$z \text{ ②: } v_2 = -3$$

$$z \text{ ③: } v_3 = -8$$

$$z \text{ ④: } u_2 = -4 - v_3 = 4$$

$$z \text{ ⑤: } u_3 = -3 - v_3 = 5$$

$$z \text{ ⑥: } v_4 = -11 - u_3 = -16$$

Wskaźniki optymalności dla węzłów niebazowych:

$$(1,4) \quad e_{14} = u_1 + v_4 + c_{14} = -14$$

$$(2,1) \quad e_{21} = u_2 + v_1 + c_{21} = 3$$

$$(2,2) \quad e_{22} = u_2 + v_2 + c_{22} = 7$$

$$(2,4) \quad e_{24} = u_2 + v_4 + c_{24} = -10$$

$$(3,1) \quad e_{31} = u_3 + v_1 + c_{31} = 9$$

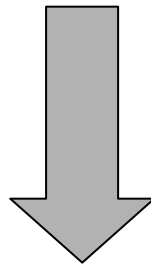
$$(3,2) \quad e_{32} = u_3 + v_2 + c_{32} = 4$$

## Tablica wskaźników optymalności

0 *	0 *	0 *	-14
3	7	0 *	-10
9	4	0 *	0 *

## Kryterium optymalności

Rozwiązanie jest optymalne, jeżeli wartości wszystkich wskaźników optymalności są nieujemne



Rozwiązanie nie jest optymalne

# **Kolejne rozwiązania**

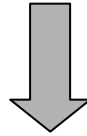
Nowe rozwiązanie  wymiana jednego węzła w bazie

### Kryterium wejścia

Do bazy wprowadzany jest węzeł, dla którego wskaźnik optymalności ma wartość najmniejszą.

W przykładzie: (1,4)

Określenie węzła usuwanego z bazy



Budowa tzw. cyklu

### „Definicja cyklu”

W każdym wierszu i kolumnie do cyklu wchodzi dwa lub zero węzłów.

Cykl składa się z półcyklu dodatniego i ujemnego.



Tablica przewozów

80 *	30 *	10 *	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 *	50 *

(1,4) węzeł  
wprowadzany  
do bazy

Węzeł wprowadzany do bazy – półcykl dodatni

## Tablica przewozów

80 *	30 *	10 *	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 *	50 * —

(3,4) drugi węzeł w czwartej kolumnie – półcykl ujemny

## Tablica przewozów

80 *	30 *	10 *	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 * +	50 * -

(3,3) drugi węzeł w trzecim wierszu – półcykl dodatni

## Tablica przewozów

80 *	30 *	10 * —	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 * +	50 * —

(1,3) drugi węzeł w trzeciej kolumnie – półcykl ujemny

## Tablica przewozów

80 *	30 *	10 * —	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 * +	50 * —

Cykl składający się z czterech węzłów

Określamy minimum w pólcyklu ujemnym:

$$\min(10, 50) = 10$$

Minimum odpowiada węzłowi (1,3)

### **Kryterium wyjścia**

Z bazy usuwany jest węzeł z pólcyklu ujemnego, dla którego wartość przewozu jest najmniejsza.

## Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

			10 *

Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

		0	10 *



## Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

		0	10 *
			40 *

## Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

		0	10 *
		20 *	40 *

## Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

80 *	30 *	0	10 *
0	0	20 *	0
0	0	20 *	40 *

$$\text{FC: } Z(x_{ij}) = 1090$$

Tablica wskaźników optymalności z poprzedniego kroku

0 *	0 *	0	-14 *
3	7	0 *	-10
9	4	0 *	0 *

Dla węzłów bazowych:

$$(1,1) \quad u_1 + v_1 + 0 = 0$$

$$(2,3) \quad u_2 + v_3 + 0 = 0$$

$$(1,2) \quad u_1 + v_2 + 0 = 0$$

$$(3,3) \quad u_3 + v_3 + 0 = 0$$

$$(1,4) \quad u_1 + v_4 - 14 = 0$$

$$(3,4) \quad u_3 + v_4 + 0 = 0$$

Przyjmujemy  $u_1 = 0$

Otrzymujemy:

$$u_2 = -14$$

$$u_3 = -14$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = 14$$

$$v_4 = 14$$

Nowe wskaźniki optymalności:

$$e'_{ij} = u_i + v_j + e_{ij}$$

$e_{ij}$  – wskaźniki optymalności z poprzedniego kroku

### Nowe wskaźniki optymalności

0 *	0 *	14	0 *
-11	-7	0 *	-10
-5	-10	0 *	0 *

Rozwiązanie nie jest optymalne

## Tablica przewozów

80 *	30 *	0	10 *
0 +	0	20 *	0
0	0	20 *	40 *

Węzeł wprowadzany do bazy: (2,1)



## Tablica przewozów

80 * —	30 *	0	10 *
0 +	0	20 *	0
0	0	20 *	40 *

(1,1) drugi węzeł w pierwszej kolumnie – półcykl ujemny

## Tablica przewozów

80 * —	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 *	0
0	0	20 *	40 *

(1,4) drugi węzeł w pierwszym wierszu – półcykl dodatni

## Tablica przewozów

80 * —	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 *	0
0	0	20 *	40 * —

(3,4) drugi węzeł w czwartej kolumnie – półcykl ujemny

## Tablica przewozów

80 * —	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 *	0
0	0	20 * +	40 * —

(3,3) drugi węzeł w trzecim wierszu – półcykl dodatni

## Tablica przewozów

80 * —	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 * —	0
0	0	20 * +	40 * —

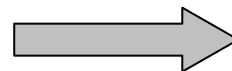
(2,3) drugi węzeł w drugim wierszu – półcykl ujemny

## Tablica przewozów

80 *—	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 * —	0
0	0	20 * +	40 * —

Cykl składający się z sześciu węzłów

$$\min(80, 20, 40) = 20$$



(2,3) usuwany z bazy

## Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

60 *	30 *	0	30 *
20 *	0	0	0
0	0	40 *	20 *

$$\text{FC: } Z(x_{ij}) = 870$$

Tablica wskaźników optymalności z poprzedniego kroku

0 *	0 *	14	0 *
-11 *	-7	0	-10
-5	-10	0 *	0 *

Dla węzłów bazowych:

$$(1,1) \quad u_1 + v_1 + 0 = 0$$

$$(2,1) \quad u_2 + v_1 - 11 = 0$$

$$(1,2) \quad u_1 + v_2 + 0 = 0$$

$$(3,3) \quad u_3 + v_3 + 0 = 0$$

$$(1,4) \quad u_1 + v_4 + 0 = 0$$

$$(3,4) \quad u_3 + v_4 + 0 = 0$$



Przyjmujemy  $u_1 = 0$

Otrzymujemy:

$$u_2 = 11$$

$$u_3 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = 0$$

$$v_4 = 0$$

### Nowe wskaźniki optymalności

0 *	0 *	14	0 *
0 *	4	11	1
-5	-10	0 *	0 *

Rozwiązanie nie jest optymalne

## Tablica przewozów

60 *	30 *	0	30 *
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 *

Węzeł wprowadzany do bazy: (3,2)

## Tablica przewozów

60 *	30 * —	0	30 *
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 *

(1,2) drugi węzeł w drugiej kolumnie – półcykl ujemny

## Tablica przewozów

60 *	30 * -	0	30 * +
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 *

(1,4) drugi węzeł w pierwszym wierszu – półcykl dodatni

## Tablica przewozów

60 *	30 * —	0	30 * +
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 * —

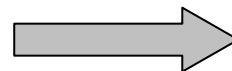
(3,4) drugi węzeł w czwartej kolumnie – półcykl ujemny

## Tablica przewozów

60 *	30 * -	0	30 * +
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 * -

Cykl składający się z czterech węzłów

$$\min(30, 20) = 20$$



(3,4) usuwany z bazy

## Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

60 *	10 *	0	50 *
20 *	0	0	0
0	20 *	40 *	0

$$\text{FC: } Z(x_{ij}) = 670$$



Tablica wskaźników optymalności z poprzedniego kroku

0 *	0 *	14	0 *
0 *	4	11	1
-5	-10 *	0 *	0

Dla węzłów bazowych:

$$(1,1) \quad u_1 + v_1 + 0 = 0$$

$$(2,1) \quad u_2 + v_1 + 0 = 0$$

$$(1,2) \quad u_1 + v_2 + 0 = 0$$

$$(3,2) \quad u_3 + v_2 - 10 = 0$$

$$(1,4) \quad u_1 + v_4 + 0 = 0$$

$$(3,3) \quad u_3 + v_3 + 0 = 0$$

Przyjmujemy  $u_1 = 0$

Otrzymujemy:

$$u_2 = 0$$

$$u_3 = 10$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = -10$$

$$v_4 = 0$$

## Nowe wskaźniki optymalności

0 *	0 *	4	0 *
0 *	4	1	1
5	0 *	0 *	10

Rozwiązanie optymalne

## Rozwiązanie optymalne

$$x_{11} = 60 \quad x_{12} = 10 \quad x_{13} = 0 \quad x_{14} = 50$$

$$x_{21} = 20 \quad x_{22} = 0 \quad x_{23} = 0 \quad x_{24} = 0$$

$$x_{31} = 0 \quad x_{32} = 20 \quad x_{33} = 40 \quad x_{34} = 0$$

$$\text{FC: } Z(x_{ij}) = 670$$

A jednak się skończyło!!!