ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE

(część 1)

Zadanie zbilansowane

Przykład 10.

Firma posiada zakłady wytwórcze w miastach **A**, **B** i **C**, oraz centra dystrybucyjne w miastach **D**, **E**, **F** i **G**.
Możliwości produkcyjne zakładów wynoszą odpowiednio: 120, 20 i 60 jednostek, natomiast zapotrzebowanie w poszczególnych centrach dystrybucyjnych odpowiednio: 80, 30, 40 i 50 jednostek.
Jednostkowe koszty transportu przedstawione są w tabeli.
Określić taki plan przewozów, aby koszty dostaw z zakładów wytwórczych do centrów dystrybucyjnych były minimalne.

Tabela kosztów jednostkowych:

5	3	8	2	**A**
4	6	4	2	**B**
9	2	3	11	**C**
D	**E**	**F**	**G**	**dostawcy** / **odbiorcy**

Model matematyczny

Produkcja zakładów (podaż):

$$120 + 20 + 60 = 200$$

Zapotrzebowanie w centrach dystrybucyjnych (popyt):

$$80 + 30 + 40 + 50 = 200$$

Produkcja = Zapotrzebowanie lub Podaż = Popyt

$\Downarrow$

Zadanie jest zbilansowane

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

gdzie:

a_i – zasoby i – tego dostawcy
b_j – zapotrzebowanie j – tego odbiorcy
m – ilość dostawców
n – ilość odbiorców

c_{ij} – koszt transportu od i – tego dostawcy do j – tego odbiorcy

Zmienne decyzyjne

x_{ij} – ilość towaru przewożonego od i – tego dostawcy do j – tego odbiorcy

$$i = 1 \ldots m \qquad j = 1 \ldots n$$

$$m = 3 \qquad n = 4$$

np.

x_{24} – ilość towaru przewożonego od drugiego dostawcy (miasto **B**) do czwartego odbiorcy (miasto **G**).

Funkcja celu

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) =$$

$$= 5x_{11} + 3x_{12} + 8x_{13} + 2x_{14} +$$

$$+4x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + 2x_{24} +$$

$$+9x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 11x_{34} \quad \to \mathrm{MIN}$$

$$Z(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \mathrm{MIN}$$

Ograniczenia

Dostawcy:

$$\mathbf{A}: \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 120$$

$$\mathbf{B}: \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20$$

$$\mathbf{C}: \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 60$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1 \ldots m$$

Ograniczenia c. d.

Odbiorcy:

$$\mathbf{D}: \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$$

$$\mathbf{E}: \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30$$

$$\mathbf{F}: \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40$$

$$\mathbf{G}: \quad x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1 \ldots n$$

Warunki brzegowe

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1 \ldots m \quad j = 1 \ldots n$$

Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne

<u>Metoda kąta północno - zachodniego</u>

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)

(1,1)...(3,4) - węzły

Ilość węzłów bazowych:

$$\boxed{m+n-1}$$

W przykładzie:

$$3+4-1=6$$

Tablica przewozów:

80				120
				20
				60
80	30	40	50	

$$\min(120, 80) = 80$$

Tablica przewozów:

80				~~120~~ 40
0				20
0				60
~~80~~ 0	30	40	50	

Tablica przewozów:

80	30			~~120~~ 40
0				20
0				60
~~80~~ 0	30	40	50	

$$\min(40,30) = 30$$

Tablica przewozów:

80	30			~~120~~ ~~40~~ 10
0	0			20
0	0			60
~~80~~	~~30~~	40	50	
0	0			

Tablica przewozów:

80	30	10		~~120~~ ~~40~~ 10
0	0			20
0	0			60
~~80~~	~~30~~	40	50	
0	0			

$$\min(10, 40) = 10$$

Tablica przewozów:

80	30	10	0	~~120~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
0	0			20
0	0			60
~~80~~	~~30~~	~~40~~	50	
0	0	30		

Tablica przewozów:

80	30	10	0	~~120~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
0	0	20		20
0	0			60
~~80~~	~~30~~	~~40~~	50	
0	0	30		

$$\min(20,30) = 20$$

Tablica przewozów:

80	30	10	0	~~120~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
0	0	20	0	~~20~~ 0
0	0			60
~~80~~	~~30~~	~~40~~	50	
0	0	~~30~~		
		10		

Tablica przewozów:

80	30	10	0	~~120~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
0	0	20	0	~~20~~ 0
0	0	10		60
~~80~~	~~30~~	~~40~~	50	
0	0	~~30~~		
		10		

$\min(60,10) = 10$

Tablica przewozów:

80	30	10	0	~~120~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
0	0	20	0	~~20~~ 0
0	0	10		~~60~~ 50
~~80~~	~~30~~	~~40~~	50	
0	0	~~30~~		
		~~10~~		
		0		

Tablica przewozów:

80	30	10	0	~~120~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
0	0	20	0	~~20~~ 0
0	0	10	50	~~60~~ 50
~~80~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ ~~30~~ ~~10~~ 0	50	

$$\min(50,50) = 50$$

Tablica przewozów:

80	30	10	0	~~120~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
0	0	20	0	~~20~~ 0
0	0	10	50	~~60~~ ~~50~~ 0
~~80~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ ~~30~~ ~~10~~ 0	~~50~~ 0	

80 *	30 *	10 *	0
0	0	20 *	0
0	0	10 *	50 *

* - węzły bazowe

Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne:

$$x_{11} = 80 \quad x_{12} = 30 \quad x_{13} = 10 \quad x_{14} = 0$$
$$x_{21} = 0 \quad x_{22} = 0 \quad x_{23} = 20 \quad x_{24} = 0$$
$$x_{31} = 0 \quad x_{32} = 0 \quad x_{33} = 10 \quad x_{34} = 50 \qquad \mathrm{FC}:\ Z(x_{ij}) = 1230$$

Sprawdzenie optymalności rozwiązania

				u_1
				u_2
				u_3
v_1	v_2	v_3	v_4	

u_i – zmienne związane z dostawcami

v_j – zmienne związane z odbiorcami

Wskaźniki optymalności:

$$e_{ij} = u_i + v_j + c_{ij}$$

Dla węzłów bazowych:

$$e_{ij} = 0$$

$(1,1) \qquad u_1 + v_1 + 5 = 0 \qquad ①$

$(1,2) \qquad u_1 + v_2 + 3 = 0 \qquad ②$

$(1,3) \qquad u_1 + v_3 + 8 = 0 \qquad ③$

$(2,3) \qquad u_2 + v_3 + 4 = 0 \qquad ④$

$(3,3) \qquad u_3 + v_3 + 3 = 0 \qquad ⑤$

$(3,4) \qquad u_3 + v_4 + 11 = 0 \qquad ⑥$

Układ 6 równań z 7 niewiadomymi.

Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Aby go rozwiązać za jedną zmienną przyjmuje się dowolną wartość.

Przyjmujemy $u_1 = 0$

z ①: $v_1 = -5$

z ②: $v_2 = -3$

z ③: $v_3 = -8$

z ④: $u_2 = -4 - v_3 = 4$

z ⑤: $u_3 = -3 - v_3 = 5$

z ⑥: $v_4 = -11 - u_3 = -16$

Wskaźniki optymalności dla węzłów niebazowych:

$(1,4) \qquad e_{14} = u_1 + v_4 + c_{14} = -14$

$(2,1) \qquad e_{21} = u_2 + v_1 + c_{21} = 3$

$(2,2) \qquad e_{22} = u_2 + v_2 + c_{22} = 7$

$(2,4) \qquad e_{24} = u_2 + v_4 + c_{24} = -10$

$(3,1) \qquad e_{31} = u_3 + v_1 + c_{31} = 9$

$(3,2) \qquad e_{32} = u_3 + v_2 + c_{32} = 4$

Tablica wskaźników optymalności

0 *	0 *	0 *	-14
3	7	0 *	-10
9	4	0 *	0 *

Kryterium optymalności

Rozwiązanie jest optymalne, jeżeli wartości wszystkich wskaźników optymalności są nieujemne

Rozwiązanie nie jest optymalne

Kolejne rozwiązania

Nowe rozwiązanie → wymiana jednego węzła w bazie

Kryterium wejścia

Do bazy wprowadzany jest węzeł, dla którego wskaźnik optymalności ma wartość najmniejszą.

W przykładzie: $(1,4)$

Określenie węzła usuwanego z bazy

↓

Budowa tzw. cyklu

„Definicja cyklu”

W każdym wierszu i kolumnie do cyklu wchodzą dwa lub zero węzłów.

Cykl składa się z półcyklu dodatniego i ujemnego.

Tablica przewozów

80 *	30 *	10 *	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 *	50 *

(1,4) węzeł wprowadzany do bazy

Węzeł wprowadzany do bazy – półcykl dodatni

Tablica przewozów

80 *	30 *	10 *	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 *	50 * –

(3,4) drugi węzeł w czwartej kolumnie – półcykl ujemny

Tablica przewozów

80 *	30 *	10 *	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 * +	50 * –

(3,3) drugi węzeł w trzecim wierszu – półcykl dodatni

Tablica przewozów

80 *	30 *	10 * −	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 * +	50 * −

(1,3) drugi węzeł w trzeciej kolumnie – półcykl ujemny

Tablica przewozów

80 *	30 *	10 * –	0 +
0	0	20 *	0
0	0	10 * +	50 * –

Cykl składający się z czterech węzłów

Określamy minimum w półcyklu ujemnym:

$$\min(10, 50) = 10$$

Minimum odpowiada węzłowi $(1,3)$

Kryterium wyjścia

Z bazy usuwany jest węzeł z półcyklu ujemnego, dla którego wartość przewozu jest najmniejsza.

Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

			10 *

Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

		0	10 *

Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

		0	10 *
			40 *

Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

		0	10 *
		20 *	40 *

Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

80 *	30 *	0	10 *
0	0	20 *	0
0	0	20 *	40 *

$$\text{FC}: \; Z(x_{ij}) = 1090$$

Tablica wskaźników optymalności z poprzedniego kroku

0 *	0 *	0	-14 *
3	7	0 *	-10
9	4	0 *	0 *

Dla węzłów bazowych:

$(1,1)$ $u_1 + v_1 + 0 = 0$

$(1,2)$ $u_1 + v_2 + 0 = 0$

$(1,4)$ $u_1 + v_4 - 14 = 0$

$(2,3)$ $u_2 + v_3 + 0 = 0$

$(3,3)$ $u_3 + v_3 + 0 = 0$

$(3,4)$ $u_3 + v_4 + 0 = 0$

Przyjmujemy $u_1 = 0$

Otrzymujemy:

$$u_2 = -14$$

$$u_3 = -14$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = 14$$

$$v_4 = 14$$

Nowe wskaźniki optymalności:

$$e_{ij}' = u_i + v_j + e_{ij}$$

e_{ij} – wskaźniki optymalności z poprzedniego kroku

Nowe wskaźniki optymalności

0 *	0 *	14	0 *
-11	-7	0 *	-10
-5	-10	0 *	0 *

Rozwiązanie nie jest optymalne

Tablica przewozów

80 *	30 *	0	10 *
0 +	0	20 *	0
0	0	20 *	40 *

Węzeł wprowadzany do bazy: (2,1)

Tablica przewozów

80 * −	30 *	0	10 *
0 +	0	20 *	0
0	0	20 *	40 *

(1,1) drugi węzeł w pierwszej kolumnie – półcykl ujemny

Tablica przewozów

80 * −	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 *	0
0	0	20 *	40 *

(1,4) drugi węzeł w pierwszym wierszu – półcykl dodatni

Tablica przewozów

80 * −	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 *	0
0	0	20 *	40 * −

(3,4) drugi węzeł w czwartej kolumnie – półcykl ujemny

Tablica przewozów

80 * −	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 *	0
0	0	20 * +	40 * −

(3,3) drugi węzeł w trzecim wierszu – półcykl dodatni

Tablica przewozów

80 * −	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 * −	0
0	0	20 * +	40 * −

(2,3) drugi węzeł w drugim wierszu – półcykl ujemny

Tablica przewozów

80 * −	30 *	0	10 * +
0 +	0	20 * −	0
0	0	20 * +	40 * −

Cykl składający się z sześciu węzłów

$\min(80, 20, 40) = 20$ ⇨ $(2,3)$ usuwany z bazy

Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

60 *	30 *	0	30 *
20 *	0	0	0
0	0	40 *	20 *

$$\mathrm{FC}:\ Z(x_{ij}) = 870$$

Tablica wskaźników optymalności z poprzedniego kroku

0 *	0 *	14	0 *
-11 *	-7	0	-10
-5	-10	0 *	0 *

Dla węzłów bazowych:

$(1,1)$ $u_1 + v_1 + 0 = 0$

$(2,1)$ $u_2 + v_1 - 11 = 0$

$(1,2)$ $u_1 + v_2 + 0 = 0$

$(3,3)$ $u_3 + v_3 + 0 = 0$

$(1,4)$ $u_1 + v_4 + 0 = 0$

$(3,4)$ $u_3 + v_4 + 0 = 0$

Przyjmujemy $u_1 = 0$

Otrzymujemy:

$$u_2 = 11$$

$$u_3 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = 0$$

$$v_4 = 0$$

Nowe wskaźniki optymalności

0 *	0 *	14	0 *
0 *	4	11	1
-5	-10	0 *	0 *

Rozwiązanie nie jest optymalne

Tablica przewozów

60 *	30 *	0	30 *
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 *

Węzeł wprowadzany do bazy: (3,2)

Tablica przewozów

60 *	30 * −	0	30 *
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 *

(1,2) drugi węzeł w drugiej kolumnie – półcykl ujemny

Tablica przewozów

60 *	30 * –	0	30 * +
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 *

(1,4) drugi węzeł w pierwszym wierszu – półcykl dodatni

Tablica przewozów

60 *	30 * −	0	30 * +
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 * −

(3,4) drugi węzeł w czwartej kolumnie – półcykl ujemny

Tablica przewozów

60 *	30 * −	0	30 * +
20 *	0	0	0
0	0 +	40 *	20 * −

Cykl składający się z czterech węzłów

$\min(30, 20) = 20$ $\Rightarrow$ (3,4) usuwany z bazy

Tablica przewozów – nowe rozwiązanie

60 *	10 *	0	50 *
20 *	0	0	0
0	20 *	40 *	0

$$\mathrm{FC}:\ Z(x_{ij}) = 670$$

Tablica wskaźników optymalności z poprzedniego kroku

0 *	0 *	14	0 *
0 *	4	11	1
-5	-10 *	0 *	0

Dla węzłów bazowych:

(1,1) $u_1 + v_1 + 0 = 0$ (2,1) $u_2 + v_1 + 0 = 0$

(1,2) $u_1 + v_2 + 0 = 0$ (3,2) $u_3 + v_2 - 10 = 0$

(1,4) $u_1 + v_4 + 0 = 0$ (3,3) $u_3 + v_3 + 0 = 0$

Przyjmujemy $u_1 = 0$

Otrzymujemy:

$$u_2 = 0$$

$$u_3 = 10$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = -10$$

$$v_4 = 0$$

Nowe wskaźniki optymalności

0 *	0 *	4	0 *
0 *	4	1	1
5	0 *	0 *	10

Rozwiązanie optymalne

Rozwiązanie optymalne

$$x_{11} = 60 \quad x_{12} = 10 \quad x_{13} = 0 \quad x_{14} = 50$$
$$x_{21} = 20 \quad x_{22} = 0 \quad x_{23} = 0 \quad x_{24} = 0$$
$$x_{31} = 0 \quad x_{32} = 20 \quad x_{33} = 40 \quad x_{34} = 0$$

$$\mathrm{FC}:\ Z(x_{ij}) = 670$$

A jednak się skończyło!!!