PROGRAMOWANIE KWADRATOWE

Zadanie programowania kwadratowego:

Funkcja celu lub/i co najmniej jedno z ograniczeń jest funkcją kwadratową.

Nie ma uniwersalnej metody rozwiązywania zadań programowania kwadratowego.

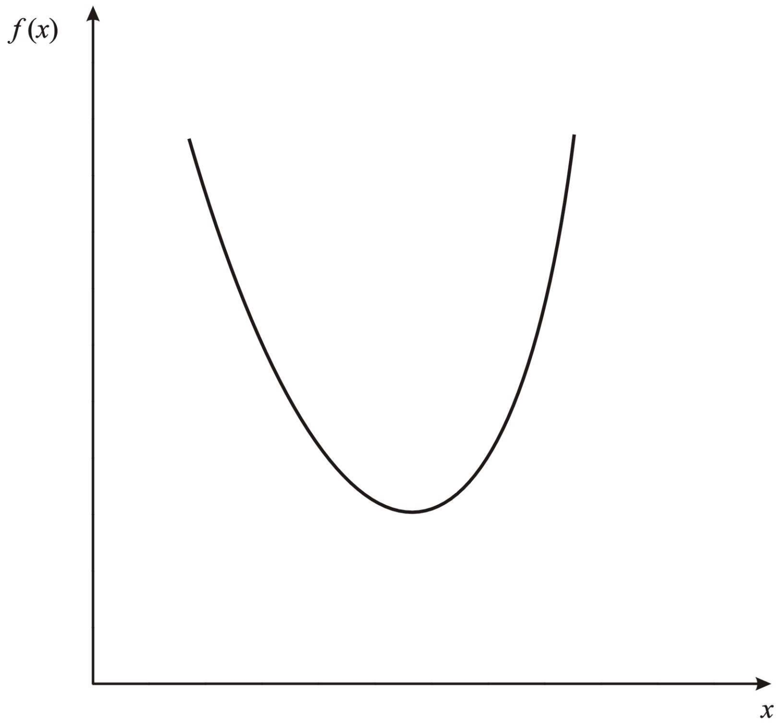
Metoda zależy od postaci jaką ma zadanie.

Rozpatrywany przypadek:

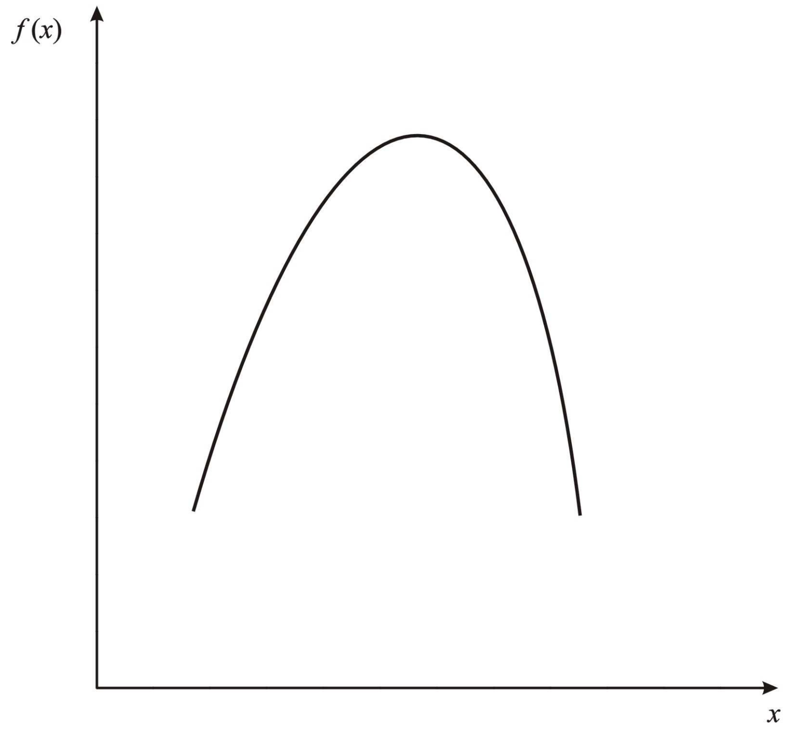
Funkcja celu jest funkcją kwadratową.

Ograniczenia są funkcjami liniowymi.

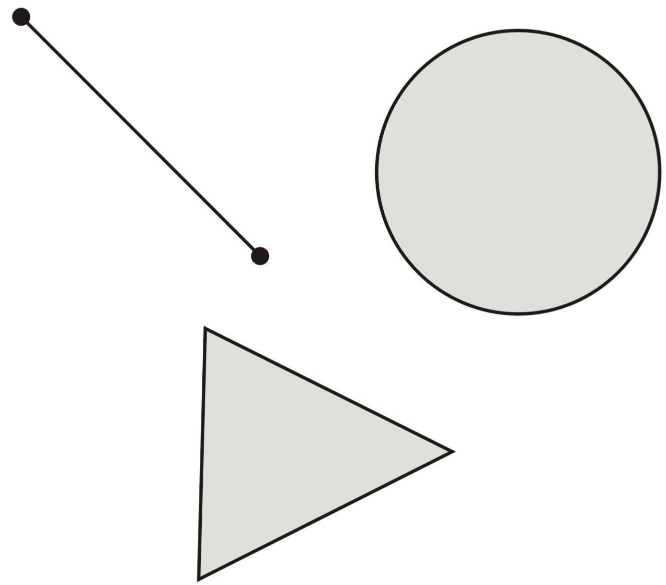
Zadanie programowania wypukłego

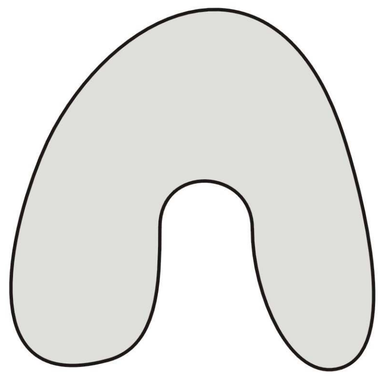


Rys. 1. Funkcja wypukła



Rys. 2. Funkcja wklęsła





Rys. 3. Zbiory wypukłe

Rys. 4. Zbiory niewypukłe

Zbiór W jest wypukły, jeżeli dla dwóch dowolnych elementów a, $b \in W$, oraz dla dowolnej liczby γ z przedziału [0, 1] zachodzi związek:

$$\gamma a + (1 - \gamma) b \in W$$

Funkcja f, której dziedziną jest zbiór wypukły W, jest wypukła, jeżeli dla dowolnych argumentów a, $b \in W$ i dla dowolnej liczby γ z przedziału [0, 1] zachodzi związek:

$$f(\gamma a + (1-\gamma)b) \leq \gamma f(a) + (1-\gamma) f(b)$$

Funkcja f jest wklęsła, jeżeli funkcja $-f$ jest wypukła

Funkcja liniowa:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

Forma kwadratowa:

$$\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

Funkcja kwadratowa:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}$$

Macierz $\mathbf{C}$ musi być:

① Symetryczna: $c_{ij} = c_{ji}$

② Nieujemnie określona: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} \geq 0$

ad. ①

Jeżeli macierz **C** nie jest symetryczna to stosuje się podstawienie:

$$c'_{ij} = \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$$

wtedy:

$$c'_{ij} = c'_{ji}$$

ad. ②

Twierdzenie 1.

Forma kwadratowa jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\mathbf{C}$ jest nieujemnie określona.

Twierdzenie 2.

Funkcja f mająca pochodne cząstkowe drugiego rzędu w zbiorze wypukłym W jest wypukła w tym zbiorze wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathbf{x} \in W$ macierz drugich pochodnych $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ jest macierzą nieujemnie określoną.

$$2\mathbf{C} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} \\ & & \cdots & \\ \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Macierz formy kwadratowej **C** jest nieujemnie określona, gdy wartości wszystkich minorów głównych tej macierzy są nieujemne.

Minory główne $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ & \dots & \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

czyli:

$$\Delta_1 = \left| c_{11} \right|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

Zadanie programowania wypukłego:

$$
\begin{gathered}
f(\mathbf{x}) \to \mathrm{MAX} \\
g_1(\mathbf{x}) \geq 0 \\
\vdots \\
g_m(\mathbf{x}) \geq 0
\end{gathered}
$$

lub:

$$
\begin{gathered}
f(\mathbf{x}) \to \mathrm{MAX} \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0
\end{gathered}
\qquad
\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}
$$

W postaci macierzowej:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} \to \mathrm{MAX}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge 0$$

n – ilość zmiennych
m – ilość ograniczeń i warunków brzegowych

$\mathbf{p}$ – wektor funkcji liniowej
$\mathbf{C}$ – macierz formy kwadratowej
$\mathbf{A}$ – macierz współczynników ograniczeń
$\mathbf{b}$ – wektor wyrazów wolnych
$\mathbf{x}$ – wektor zmiennych decyzyjnych

Przykład 20.

Zapisać odpowiednie macierze i wektory dla zadania programowania kwadratowego, oraz sprawdzić czy macierz formy kwadratowej spełnia wymagane warunki.

$$f(\mathbf{x}) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 \rightarrow \mathrm{MAX}$$

$$g_1(\mathbf{x}) = 10 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 9 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = x_1 \geq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = x_2 \geq 0$$

$$\mathrm{FC}: \quad f(x_1, x_2) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 \rightarrow \mathrm{MAX}$$

$$\mathrm{O}: \quad x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$x_1 + x_2 \le 9$$

$$\mathrm{WB}: \quad x_1, x_2 \ge 0$$

Ograniczenia:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Funkcja celu:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \mathrm{MAX}$$

$$f(\mathbf{x}) = 10x_1 + 25x_2 - (10x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + x_2^2) \rightarrow \mathrm{MAX}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie macierzy $\mathbf{C}$:

① Czy jest symetryczna? Tak $(c_{12} = c_{21})$

② Czy jest nieujemnie określona? Tak

$$\Delta_1 = \left|10\right| > 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

Macierz $\mathbf{C}$ spełnia wymagane warunki.

Warunki Kuhna - Tuckera

Z każdym zadaniem programowania kwadratowego można związać funkcję Lagrange'a:

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

lub:

$$L(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

λ_i – mnożniki Lagrange'a

Jeżeli f oraz g_i mają pochodne cząstkowe można skonstruować problem Kuhna – Tuckera. Składa się on z następujących warunków:

① $$\nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$$

② $$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

③ $$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0$$

④ $$\boldsymbol{\lambda} \geq 0$$

Twierdzenie 3.

Zadanie programowania wypukłego i problem Kuhna – Tuckera są sobie równoważne.

Przykład 21.

Utworzyć problem Kuhna – Tuckera dla zadania programowania kwadratowego z Przykładu 20.

$$\text{FC}: \quad f(x_1, x_2) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 \to \text{MAX}$$

$$\text{O}: \quad x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$x_1 + x_2 \le 9$$

$$\text{WB}: \quad x_1, x_2 \ge 0$$

Funkcja Lagrange'a:

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + \\
&+\lambda_1(10 - x_1 - 2x_2) + \\
&+\lambda_2(9 - x_1 - x_2) + \\
&+\lambda_3 x_1 + \lambda_4 x_2
\end{aligned}
$$

Warunki Kuhna - Tuckera:

①

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 10 - 20x_1 - 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 25 - 4x_1 - 2x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

②

$$\lambda_1(10 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(9 - x_1 - x_2) + \lambda_3 x_1 + \lambda_4 x_2 = 0$$

Warunki Kuhna – Tuckera c.d.:

③

$$g_1(\mathbf{x}) = 10 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 9 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = x_1 \geq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = x_2 \geq 0$$

④

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

Metoda Wolfe’a

1. Zapisanie warunków Kuhna – Tuckera pozwala na sformułowanie pewnego zadania zastępczego.

2. Zadanie zastępcze można rozwiązać metodą Wolfe'a.

3. Na podstawie rozwiązania zadania zastępczego można określić rozwiązanie optymalne zadania programowania kwadratowego.

4. Metoda Wolfe'a jest modyfikacją metody simplex.

Przykład 22.

Sformułować zadanie zastępcze dla zadania programowania kwadratowego z Przykładu 20.

Zmiana oznaczeń:

	było	będzie
Współczynniki Lagrange'a dla ograniczeń	$\lambda_i \quad i = 1, \ldots, m-n$	$y_i \quad i = 1, \ldots, m-n$
Współczynniki Lagrange'a dla warunków brzegowych	$\lambda_i \quad i = m-n+1, \ldots, m$	$y'_j \quad j = 1, \ldots, n$

Tabela 22.1.

Czyli:

$$\lambda_1 \rightarrow y_1$$

$$\lambda_2 \rightarrow y_2$$

$$\lambda_3 \rightarrow y_1'$$

$$\lambda_4 \rightarrow y_2'$$

Sprowadzenie ograniczeń do postaci bazowej:

$$x_1 + 2x_2 + x_1' = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_2' = 9$$

x_1', x_2' - zmienne bilansujące

Zapisanie funkcji Lagrange'a z uwzględnieniem zmiennych bilansujących:

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = {} & 10x_1 + 25x_2 - 10x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + \\
& + y_1\left[10 - x_1 - 2x_2 - x_1'\right] + \\
& + y_2\left[9 - x_1 - x_2 - x_2'\right] + \\
& + y_1'x_1 + y_2'x_2
\end{aligned}
$$

Wykorzystanie ① warunku Kuhna - Tuckera:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 10 - 20x_1 - 4x_2 - y_1 - y_2 + y_1' = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 25 - 4x_1 - 2x_2 - 2y_1 - y_2 + y_2' = 0$$

Wprowadzenie zmiennych sztucznych typu w:

Zmienne w są wprowadzane do każdego ograniczenia zadania zastępczego, powstałego na podstawie ① warunku Kuhna – Tuckera.

$$20x_1 + 4x_2 + y_1 + y_2 - y_1' + w_1 = 10$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 - y_2' + w_2 = 25$$

Zmienne sztuczne są wprowadzane do funkcji celu zadania zastępczego ze współczynnikiem równym 1.

Zadanie zastępcze:

$$\mathrm{FC}: \quad w_1 + w_2 \rightarrow \mathrm{MIN}$$

$$\mathrm{O}: \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_1' &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_2' &= 9 \\ 20x_1 + 4x_2 + y_1 + y_2 - y_1' + w_1 &= 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 - y_2' + w_2 &= 25 \end{aligned}$$

$$\mathrm{WB}: \quad x_1, x_2, x_1', x_2', y_1, y_2, y_1', y_2', w_1, w_2, \geq 0$$

Zmienne:

$$x_i, y_i' \qquad \text{lub} \qquad x_i', y_i$$

to pary zmiennych komplementarnych.

Wszystkie pary zmiennych komplementarnych w tym zadaniu:

$$x_1, y_1' \qquad x_2, y_2' \qquad x_1', y_1 \qquad x_2', y_2$$

② warunek Kuhna – Tuckera w Przykładzie 21.:

$$\lambda_1(10 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(9 - x_1 - x_2) + \lambda_3 x_1 + \lambda_4 x_2 = 0$$

Gdyby uwzględnić inne oznaczenia, oraz że:

$$x_1' = 10 - x_1 - 2x_2$$

$$x_2' = 9 - x_1 - x_2$$

to miałby on postać:

$$y_1 x_1' + y_2 x_2' + y_1' x_1 + y_2' x_2 = 0$$

Przypomnienie Metoda simplex z kryterium na MIN:

Kryterium wejścia

Zmienna z najmniejszą wartością wskaźnika optymalności.

Kryterium wyjścia

Zmienna, dla której iloraz elementu z wektora wyrazów wolnych przez dodatni współczynnik z kolumny zmiennej wchodzącej do bazy ma najmniejszą wartość.

Kryterium optymalności

Wszystkie wskaźniki optymalności muszą być nieujemne.

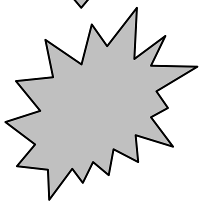
Różnica w metodzie Wolfe'a:

<u>Kryterium wejścia</u>

Zmienna z najmniejszą wartością wskaźnika optymalności x_k.

Sprawdzenie czy jej zmienna komplementarna jest zmienną bazową.

tak



nie

Wprowadzamy do bazy zmienną x_k.

Czy zmienna komplementarna zmiennej x_k jest zmienną wychodzącą z bazy?

tak

Wprowadzamy do bazy zmienną x_k.

nie

Nie wprowadzamy do bazy zmiennej x_k.

Wśród pozostałych zmiennych znajdujemy zmienną o najmniejszym wskaźniku optymalności.

Przykład 23.

Rozwiązać metodą Wolfe'a zadanie programowania kwadratowego z Przykładu 20.

UWAGA!!!

W przypadku, gdy zmienna komplementarna zmiennej kandydującej do wejścia do bazy jest zmienną bazową pominięto fragmenty kryterium wejścia, gdzie dokonywane jest sprawdzenie, czy ta zmienna jest zmienną wychodzącą z bazy – w zadaniu nie było takiego przypadku.

Na podstawie zadania zastępczego:

Baza startowa:

$$\left[x_1', \quad x_2', \quad w_1, \quad w_2\right]$$

Zmienna		Wskaźnik optymalności
x_1		–24
x_2		– 6
x_1'	*	0
x_2'	*	0
y_1		– 3
y_2		– 2
y_1'		1
y_2'		1
w_1	*	0
w_2	*	0

Tabela 23.1.

Rozwiązanie nie jest optymalne.

Najmniejszy wskaźnik optymalności: x_1

Jej zmienna komplementarna: y_1' nie jest zmienną bazową

Do bazy wchodzi: x_1

Zmienna bazowa	Wektor wyrazów wolnych	Kolumna współczynników dla zmiennej wchodzącej do bazy	Wektor ilorazów
x_1'	10	1	10
x_2'	9	1	9
w_1	10	20	0.5
w_2	25	4	6.25

Tabela 23.2.

Z bazy wychodzi: w_1

Zmienna		Wskaźnik optymalności
x_1	*	0
x_2		-1.2
x_1'	*	0
x_2'	*	0
y_1		-1.8
y_2		-0.8
y_1'		-0.2
y_2'		1
w_1		1.2
w_2	*	0

Tabela 23.3.

Rozwiązanie nie jest optymalne.

Najmniejszy wskaźnik optymalności: y_1

Jej zmienna komplementarna: x_1' jest zmienną bazową

y_1 nie może być wprowadzone do bazy

Drugi najmniejszy wskaźnik optymalności: x_2

Jej zmienna komplementarna: y_2' nie jest zmienną bazową

Do bazy wchodzi: x_2

Zmienna bazowa	Wektor wyrazów wolnych	Kolumna współczynników dla zmiennej wchodzącej do bazy	Wektor ilorazów
x_1'	9.5	1.8	5.2778
x_2'	8.5	0.8	10.625
x_1	0.5	0.2	2.5
w_2	23	1.2	19.1667

Tabela 23.4.

Z bazy wychodzi: x_1

Zmienna		Wskaźnik optymalności
x_1		6
x_2	*	0
x_1'	*	0
x_2'	*	0
y_1		–1.5
y_2		–0.5
y_1'		–0.5
y_2'		1
w_1		1.5
w_2	*	0

Tabela 23.5.

Rozwiązanie nie jest optymalne.

Najmniejszy wskaźnik optymalności: y_1

Jej zmienna komplementarna: x_1' jest zmienną bazową

y_1 nie może być wprowadzone do bazy

Drugi najmniejszy wskaźnik optymalności: y_2

Jej zmienna komplementarna: x_2' jest zmienną bazową

y_2 nie może być wprowadzone do bazy

Trzeci najmniejszy wskaźnik optymalności: y_1'

Jej zmienna komplementarna: x_1 nie jest zmienną bazową

Do bazy wchodzi: y_1'

Zmienna bazowa	Wektor wyrazów wolnych	Kolumna współczynników dla zmiennej wchodzącej do bazy	Wektor ilorazów
x_1'	5	0.5	10
x_2'	6.5	0.25	26
x_2	2.5	–0.25	-
w_2	20	0.5	40

Tabela 23.6.

Z bazy wychodzi: x_1'

Zmienna		Wskaźnik optymalności
x_1		–3
x_2	*	0
x_1'		1
x_2'	*	0
y_1		–2
y_2		–1
y_1'	*	0
y_2'		1
w_1		1
w_2	*	0

Tabela 23.7.

Rozwiązanie nie jest optymalne.

Najmniejszy wskaźnik optymalności: x_1

Jej zmienna komplementarna: y_1' jest zmienną bazową

x_1 nie może być wprowadzone do bazy

Drugi najmniejszy wskaźnik optymalności: y_1

Jej zmienna komplementarna: x_1' nie jest zmienną bazową

Do bazy wchodzi: y_1

Zmienna bazowa	Wektor wyrazów wolnych	Kolumna współczynników dla zmiennej wchodzącej do bazy	Wektor ilorazów
y_1'	10	-1	-
x_2'	4	0	-
x_2	5	0	-
w_2	15	2	7.5

Tabela 23.8.

Z bazy wychodzi: w_2

Zmienna		Wskaźnik optymalności
x_1		0
x_2	*	0
x_1'		0
x_2'	*	0
y_1	*	0
y_2		0
y_1'	*	0
y_2'		0
w_1		1
w_2		1

Tabela 23.9.

Rozwiązanie jest optymalne.

Rozwiązanie zadania zastępczego:

Zmienna		Wartość zmiennej
x_1		0
x_2	*	5
x_1'		0
x_2'	*	4
y_1	*	7.5
y_2		0
y_1'	*	17.5
y_2'		0
w_1		0
w_2		0

Tabela 23.10.

Ponieważ suma zmiennych sztucznych jest równa zero (zadanie nie jest sprzeczne) to istnieje rozwiązanie zadania programowania kwadratowego:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 5$$

$$\text{FC}: \quad f(x_1, x_2) = 100$$

Co zrobić jeżeli w zadaniu programowania kwadratowego mamy ograniczenie typu:

$$2x_1 + 5x_2 \geq 7$$

- wprowadzamy zmienną bilansującą:

$$2x_1 + 5x_2 - x_1' = 7$$

- wprowadzamy zmienną sztuczną typu v:

$$2x_1 + 5x_2 - x_1' + v_1 = 7$$

Zmienne sztuczne należy uwzględnić w funkcji celu zadania zastępczego.
Czyli funkcja celu mogłaby wyglądać np. tak:

$$w_1 + w_2 + v_1 \rightarrow \mathrm{MIN}$$

Jakie zmienne należy wprowadzić do ograniczenia:

$$2x_1 + 2x_2 \leq -7$$

wyraz wolny musi być ≥ 0:

$$-2x_1 - 2x_2 \geq 7$$

Należy wprowadzić zmienną bilansującą x' i sztuczną v.

Jakie zmienne należy wprowadzić do ograniczenia:

$$-2x_1 - 2x_2 \geq -7$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 7$$

Należy wprowadzić zmienną bilansującą x'.

Przykład 24.

„Szybki" sposób zapisania zadania zastępczego.

n – ilość zmiennych decyzyjnych

m – ilość ograniczeń wraz z warunkami brzegowymi

q – ilość ograniczeń = $m - n$

r – ilość zmiennych sztucznych typu v

Ograniczenia zapisane macierzowo:

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$$

lub w postaci bazowej:

$$\mathbf{Ax} + \overline{\mathbf{x}}'\mathbf{x}' + \overline{\mathbf{v}}\mathbf{v} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{x}'$ - wektor zmiennych x'

$\overline{\mathbf{x}}'$ - jednostkowa macierz dla zmiennych x'

$\mathbf{v}$ - wektor zmiennych sztucznych typu v

$\overline{\mathbf{v}}$ - macierz współczynników dla zmiennych sztucznych typu v

Dodatkowo:

$\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{w}$ - wektory zmiennych y, y', w

$\overline{\mathbf{y}}', \overline{\mathbf{w}}$ - jednostkowe macierze dla zmiennych y' i w

wymiary	macierze
$n \times n$	$\mathbf{C} \quad \bar{\mathbf{y}}' \quad \bar{\mathbf{w}}$
$q \times n$	$\mathbf{A}$
$q \times q$	$\bar{\mathbf{x}}'$
$n \times 1$	$\mathbf{p} \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{w}$
$q \times 1$	$\mathbf{x}' \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{b}$
$q \times \mathrm{r}$	$\bar{\mathbf{v}}$
$r \times 1$	$\mathbf{v}$

Tabela 24.1.

Zapis współczynników lewej strony ograniczeń zadania zastępczego w formie macierzowej:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \overline{\mathbf{x}}' & 0 & 0 & \overline{\mathbf{v}} & 0 \\ 2\mathbf{C} & 0 & \mathbf{A}^{\mathbf{T}} & -\overline{\mathbf{y}}' & 0 & \overline{\mathbf{w}} \end{bmatrix}$$

Zapis prawej strony ograniczeń zadania zastępczego w formie macierzowej:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

Wektor zmiennych:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

Dla analizowanego przykładu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{y}}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_1' & x_2' & y_1 & y_2 & y_1' & y_2' & w_1 & w_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{MZ} = \mathbf{B}$$