ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2008
Seria: ORGANIZACJA I ZARZĄDZANIE z. 45 Nr kol. 1790

Tomasz OWCZAREK
Politechnika Śląska, Wydział Organizacji i Zarządzania
Katedra Informatyki i Ekonometrii

MODELOWANIE SYTUACJI DECYZYJNYCH PRZY WYKORZYSTANIU DIAGRAMÓW WPŁYWU

Streszczenie. Diagram wpływu (ID) stanowi zwartą reprezentację problemu decyzyjnego. Matematycznie równoważny drzewu decyzyjnemu, pozbawiony jest jednak podstawowej wady drzewa, jaką jest wykładniczy wzrost wielkości modelu. W artykule przedstawiono diagram wpływu jako sformalizowany język modelowania sytuacji decyzyjnych w warunkach niepewności. Zaprezentowano przykłady wykorzystania reprezentacji modułowej, jak również sposób radzenia sobie z sytuacjami asymetrycznymi.

DECISION MODELING USING INFLUENCE DIAGRAMS

Summary. An influence diagram (ID) is a compact representation of a decision problem. Mathematically, ID is equivalent to decision tree but it does not suffer from its exponential growth. The paper concentrates on using influence diagram as a formal language for modelling decisions under uncertainty. Examples of how to take advantages from the modular representation and deal with asymmetry are given.

1. Wstęp

Podejmowanie decyzji należy do podstawowych funkcji kierowniczych. Rozumiane potocznie jako wybór jednej spośród kilku możliwości stanowi pewien proces – sam akt wyboru jest tylko jednym z jego elementów. Na proces podejmowania decyzji składają się bowiem rozpoznanie i zdefiniowanie istoty sytuacji decyzyjnej, zidentyfikowanie alternatywnych możliwości, wybór najlepszego wariantu, a następnie wprowadzenie go w życie [9]. Dwa pierwsze etapy tego procesu mają szczególne znaczenie, gdy na skutek olbrzymiej ilości danych niezbędnych do przetworzenia wyszczególnienie wszystkich

dostępnych alternatyw jest utrudnione, zaś ich konsekwencje niejasne (tzw. warunki niepewności).

W odpowiedzi na złożoność zjawisk i procesów zachodzących w otoczeniu organizacji, menedżer – starając się działać możliwie racjonalnie – posiłkuje się systemami wspomagania decyzji opartymi na metodach sztucznej inteligencji. Inteligentne systemy wspomagania decyzji, dzięki wykorzystaniu mocy obliczeniowych współczesnych komputerów, potrafią zbierać, zarządzać i przetwarzać dane w ilościach znacznie przekraczających możliwości ludzkiego umysłu i, w konsekwencji, polepszać podejmowane decyzje [17]. Do podstawowych problemów związanych z tymi systemami należy sposób skutecznej reprezentacji wiedzy i modelowania rzeczywistych sytuacji problemowych w języku „zrozumiałym" dla maszyny.

Jedną z odpowiedzi na te trudności stanowią modele graficzne, będące połączeniem teorii grafów oraz teorii prawdopodobieństwa, stanowiące intuicyjne modele wybranego fragmentu rzeczywistości [2]. Warstwa graficzna tych narzędzi odwzorowuje zależności (lub brak takich zależności) pomiędzy wyróżnionymi zmiennymi, warstwa numeryczna informuje o sile tych zależności. Sztandarowym przykładem modelu graficznego jest sieć bayesowska (zwana również siecią przekonań), stanowiąca zwartą reprezentację łącznego prawdopodobieństwa określonego zbioru zmiennych losowych [10].

W tworzeniu modeli graficznych wykorzystuje się dane pochodzące z wielu różnych źródeł, między innymi opinie ekspertów, obserwacje diagnostyczne oraz eksperymenty numeryczne [2]. Prawidłowa implementacja maszynowa sytuacji problemowej jest niezbędna w celu uniknięcia błędnych odpowiedzi udzielanych przez system. Zatem, z jednej strony konstrukcja modelu graficznego powinna być poprzedzona staranną analizą, z drugiej jednak strony sam proces modelowania wykorzystujący sformalizowaną, zrozumiałą dla maszyny graficzną reprezentację problemu, może stanowić dla decydenta istotną pomoc w takiej analizie.

Celem niniejszego artykułu jest omówienie jednego z modeli graficznych, konkretnie diagramu wpływu, do zamodelowania i rozwiązania pewnej sytuacji decyzyjnej. W tym celu posłużono się tzw. paradoksem Monty Halla, problemem szeroko dyskutowanym i udowodnionym na wiele sposobów, interesującym ze względu na fakt, że nawet znajomość dowodu prawidłowego rozwiązania nie niweluje wrażenia jego sprzeczności z rozwiązaniem intuicyjnym [4]. Na przykładzie zagadnienia Monty Halla zaprezentowano konstrukcję diagramu wpływu, przeprowadzono dyskusję nad adekwatną strukturą jego warstwy graficznej (w kontekście informacji, które chce się na jego podstawie uzyskać, oraz subiektywnego przekonania o charakterze problemu), wyszczególniono jego podstawowe zalety i wady, zwrócono również uwagę na problemy mogące się pojawić przy konstrukcji takiego diagramu oraz zasygnalizowano sposoby ich rozwiązania. W podsumowaniu

zamieszczono krótkie omówienie rozwinięć koncepcji diagramu wpływu, które można znaleźć w literaturze.

Przy budowie diagramów wpływu wykorzystano program Netica w wersji 1.12 (www.norsys.com/netica.html).

2. Diagram wpływu

Koncepcja diagramów wpływu (*influence diagram*, *ID*) powstała w latach siedemdziesiątych jako pomysł na zautomatyzowanie konstrukcji drzew decyzyjnych [17]. W literaturze najczęściej jednak opisuje się je jako swoiste rozszerzenie sieci bayesowskich o elementy teorii decyzji [6, 10]. Stąd też wiele pojęć i definicji odnoszących się do modeli graficznych, a sieci przekonań w szczególności, znajduje swoje bezpośrednie przełożenie na grunt diagramów wpływu i jako takie będą prezentowane w niniejszym artykule. Z matematycznego punktu widzenia diagramy wpływu są równoważne z drzewami decyzyjnymi, ich warstwa graficzna jest jednak pozbawiona słabości drzewa, jaką jest wykładniczy wzrost jego rozmiaru względem liczby zmiennych i decyzji (rys. 5 i 10) [10].

2.1. Definicja i podstawowe pojęcia

Formalnie diagram wpływu $\mathcal{I}$ definiuje się jako czwórkę $\mathcal{I} = (X, A, \mathcal{P}, \mathcal{U})$, w której [16]:

- (X, A) stanowi acykliczny graf skierowany, gdzie X jest zbiorem wierzchołków, natomiast A to zbiór krawędzi grafu. Zbiór X dzieli się na trzy podzbiory: zbiór *wierzchołków losowych* C, zbiór *wierzchołków decyzyjnych* D oraz zbiór *wierzchołków użyteczności* V. Każdy z wierzchołków decyzyjnych oraz losowych odpowiada pewnej rzeczywistej zmiennej uwzględnionej w modelu. W związku z tym z każdym węzłem $x \in C \cup D$ stowarzyszony jest zbiór Ω_x – wszystkich możliwych wartości, które może przyjąć odpowiadająca temu węzłowi zmienna. Dla dowolnego podzbioru wierzchołków $J \subset C \cup D$ kombinacja (iloczyn kartezjański) wartości wszystkich zmiennych odpowiadających wierzchołkom w J oznaczana jest jako Ω_J. Dla każdego $x \in X$ przez $pa(x)$ będzie oznaczany zbiór *rodziców* (bezpośrednich poprzedników w grafie, z ang. *parents* – rodzice) wierzchołka x.
- $\mathcal{P}$ jest zbiorem rozkładów prawdopodobieństwa $P(C_i \mid pa(C_i))$ dla każdego $C_i \in C$. Każdej wartości $c \in \Omega_{C_i}$ i $pa^* \in \Omega_{pa(C_i)}$, rozkład ten określa wartość prawdopodobieństwa $C_i = c$ pod warunkiem, że $pa(C_i) = pa^*$.

- $\mathcal{U} = \{u_v\}$ jest zbiorem funkcji użyteczności $u_v : \Omega_{pa(v)} \to \mathbf{R}$, dla każdego $v \in V$. Każdej wartości $pa^* \in \Omega_{pa(v)}$ funkcja ta przyporządkowuje pewną wartość rzeczywistą $u_v(pa^*) \in \mathbf{R}$.

Warstwa graficzna diagramu wpływu jest więc acyklicznym grafem skierowanym, w którym wierzchołki reprezentują pewne zmienne, w związku z tym w dalszej części, jeśli tylko nie będzie to wyraźnie zaznaczone, pojęcie wierzchołek oraz zmienna będą stosowane wymiennie. Zmienne losowe reprezentowane są w grafie jako koła lub owale, zmienne decyzyjne przedstawiane są w postaci kwadratów lub prostokątów, natomiast zmienne użyteczności – w postaci rombów lub sześciokątów. Każdej zmiennej losowej odpowiada tablica rozkładu prawdopodobieństwa wszystkich jej możliwych wartości. Dla zmiennych losowych, które nie mają w grafie żadnych rodziców, jest to prawdopodobieństwo *a priori*, natomiast dla pozostałych – prawdopodobieństwo *a posteriori*. Każdej zmiennej decyzyjnej odpowiada jedynie zbiór stanów (decyzji), jakie może przyjąć. Decyzje te ustalane są w trakcie rozwiązywania (ewaluacji) diagramu wpływu. Zmienne użyteczności są zmiennymi deterministycznymi – wartość każdej z nich zależy od pewnej, przyporządkowanej im funkcji deterministycznej o wartościach rzeczywistych. Wierzchołki użyteczności nie posiadają żadnych *dzieci* (bezpośrednich następników).

Krawędzie (łuki) grafu mają dwojaką naturę, w zależności od typu wierzchołków, do których dochodzą. I tak krawędź (x, x'), $x, x' \in X$ (krawędź o początku w wierzchołku x i końcu w wierzchołku x'):

- dla $x' \in C \cup U$ informuje, że wartość zmiennej x' jest uzależniona od wartości zmiennej x; reprezentuje ona zależność między zmiennymi, tzn. bezpośredni wpływ, jaki zmienna x wywiera na x';
- dla $x' \in D$ informuje, że w momencie podejmowania decyzji x' decydent zna wartość zmiennej x; krawędź taka nazywana jest *krawędzią informacyjną*, natomiast wartość zmiennej x – *stanem informacyjnym* zmiennej x'.

2.2. Rozwiązanie diagramu wpływu

Regułą lub też *funkcją decyzyjną zmiennej* D_i nazywa się funkcję $\delta_i : \Omega_{pa(D_i)} \to \Omega_{D_i}$ przyporządkowującą każdej kombinacji wartości $pa(D_i)$ pewną wartość (stan) możliwą do przyjęcia przez D_i. Dla ustalonego i zbiór Δ_i wszystkich możliwych δ_i nazywa się przestrzenią funkcji decyzyjnej δ_i. Dla danego zbioru zmiennych decyzyjnych $D = \{D_1, ..., D_n\}$ diagramu $\mathcal{I}$ iloczyn kartezjański wszystkich przestrzeni funkcji

decyzyjnych $\Delta = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i$ nazywa się *zbiorem strategii w* $\mathcal{I}$, natomiast $\delta \in \Delta$ – *strategią*. Każda strategia δ wyznacza w sposób jednoznaczny rozkład prawdopodobieństwa P_δ wszystkich zmiennych w diagramie wpływu. Jeśli $C = \{C_i\}_{1 \le i \le k}$ oraz $D = \{D_j\}_{1 \le j \le l}$, to

$$P_\delta(C, D) = \prod_{i=1}^{k} P(C_i \mid pa(C_i)) \prod_{j=1}^{l} P_{\delta_j}(D_j \mid pa(D_j)), \tag{1}$$

gdzie $P(C_i \mid pa(C_i))$ jest dane przez diagram, natomiast $P_{\delta_j}(D_j \mid pa(D_j))$ jest rozkładem prawdopodobieństwa określonym przez *j*-tą składową strategii δ.

Wartość oczekiwana węzła użyteczności $v \in V$ dla ustalonej strategii δ definiuje się następująco:

$$E_\delta(v) = \sum_{pa(v)} P_\delta(pa(v)) \cdot u_v(pa(v)). \tag{2}$$

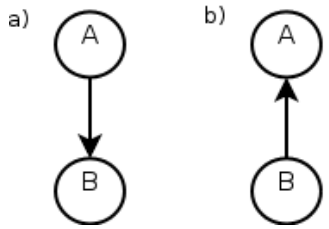
Rozwiązanie diagramu wpływu $\mathcal{I}$ polega na znalezieniu takiej strategii δ', która maksymalizuje sumę po wszystkich wierzchołkach użyteczności ich wartości oczekiwanej, tzn.

$$E_{\delta'}(\mathcal{I}) = \max_{\delta \in \Delta} \sum_{v \in V} E_\delta(v). \tag{3}$$

Ze względu na to, że wartość oczekiwana użyteczności jest funkcją liniową prawdopodobieństwa, maksymalną wartość $E(\mathcal{I})$ uzyska się podejmując odpowiednie decyzje z prawdopodobieństwem równym 1.

2.3. Warunkowa niezależność, łączny rozkład prawdopodobieństwa i wnioskowanie w diagramach wpływu

Podstawową siłą modeli graficznych w rodzaju sieci bayesowskich czy diagramów wpływów jest łatwość odwzorowywania za ich pomocą związków pomiędzy zjawiskami należącymi do sytuacji decyzyjnej. Dzięki temu na podstawie warstwy graficznej modelu możliwe jest zidentyfikowanie warunkowej niezależności istniejącej między zmiennymi. To właśnie zachowanie w modelu warunkowych niezależności zgodnych z tymi istniejącymi w modelowanym fragmencie rzeczywistości świadczy o jego poprawności [10]. Stąd też nie zawsze muszą one być zgodne z oczywistą w wielu przypadkach relacją przyczyna – skutek. Dwa modele tego samego problemu mogą być sobie równoważne pomimo różnego zbioru *A* krawędzi w grafie [1].



Rys. 1. Dwa równoważne modele graficzne
Fig. 1. Two equivalent graphical models

Formalna definicja warunkowej niezależności przedstawia się następująco. Mówimy, że zmienne A i B są *niezależne pod warunkiem* C, jeśli zachodzi

$$P(A \mid B, C) = P(A \mid C). \tag{4}$$

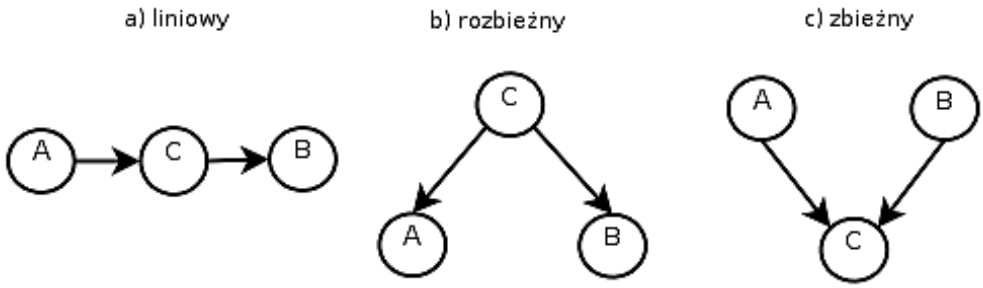
Relacja warunkowej niezależności jest relacją symetryczną, tak więc z (4) i reguły Bayesa można otrzymać, że

$$P(B \mid A, C) = \frac{P(A \mid B, C) \cdot P(B \mid C)}{P(A \mid C)} = P(B \mid C). \tag{5}$$

Jeżeli zmienne A i B są niezależne pod warunkiem C, oznacza to, że jeśli znana jest wartość C, zmienne te są niezależne, tzn. wiedza o wartości przyjmowanej przez zmienną A nie ma wpływu na rozkład prawdopodobieństwa zmiennej B i odwrotnie – znajomość wartości B nie zmienia prawdopodobieństwa A.

Graficznym kryterium identyfikacji warunkowej niezależności jest tzw. *d-separowalność*. Zmienne A i B są d-separowalne, jeśli nie istnieje ani jedna *ścieżka aktywna* łącząca te zmienne. Ścieżka między wierzchołkami A i B jest aktywna, jeśli każdy wierzchołek C znajdujący się na tej ścieżce (różny od A i B) ma jedną z dwóch własności:

1. Jest liniowy (rys. 2a) lub rozbieżny (rys. 2b) i nie jest znana jego wartość.
2. Jest zbieżny (rys. 2c) i jego wartość lub wartość któregoś z jego potomków jest znana.



Rys. 2. Rodzaje połączeń wierzchołków
Fig. 2. Types of nodes connections

2.4. Prawdopodobieństwo subiektywne

Niezwykle istotny w modelowaniu przy wykorzystaniu diagramów wpływu jest dobór prawidłowych (w znaczeniu – możliwie najbliższych rzeczywistym) wartości numerycznych, a konkretnie rozkładów prawdopodobieństw zmiennych. W konstrukcji modeli graficznych wykorzystuje się informacje pochodzące z różnych źródeł, m.in. dane statystyczne, studia literaturowe, a także opinie ekspertów, które często nie mogą być zweryfikowane empirycznie [7]. Stąd też terminu prawdopodobieństwa używa się tu nie w znaczeniu „częstotliwościowym", ale rozumie się przez nie pewne wewnętrzne, subiektywne przekonanie co do możliwości zajścia pewnych zdarzeń. Do szacowania poszczególnych wartości można posłużyć się np. metodą loterii opisaną w [10].

3. Paradoks Monty Halla

Nazwa paradoksu pochodzi od imienia i nazwiska gospodarza amerykańskiego teleturnieju *Let's make a deal*. Problem można sformułować w sposób następujący. W pewnym teleturnieju za jednym z trojga drzwi znajduje się wysokiej klasy samochód, za pozostałymi dwoma – kozy (jako nagrody pocieszenia). Uczestnik wskazuje wybrane przez siebie drzwi. Następnie prowadzący teleturniej otwiera jedne z dwojga pozostałych drzwi i pokazuje znajdującą się za nimi kozę (prowadzący wie, gdzie znajduje się samochód, tych drzwi więc nie otworzy). Uczestnik otrzymuje teraz możliwość zmiany swojej pierwotnej decyzji, tzn. wybór tych drzwi, które nie zostały otwarte przez prowadzącego. Jak powinien się zachować gracz, aby mieć jak największe szanse na wygraną? [19]

„Paradoks" zagadnienia Monty Halla i udzielanie najczęściej, wydawałoby się „zdroworozsądkowej" odpowiedzi na postawione wyżej pytanie, polega na błędnej percepcji struktury sytuacji decyzyjnej. Osoby, którym pierwszy raz przedstawiono problem, biorą pod uwagę jedynie ostatni jego etap, rozumując w sposób następujący: skoro jedne z dwojga drzwi bez głównej nagrody zostały otwarte, szanse na wygraną wynoszą teraz 50% – nie ma więc znaczenia, jaka decyzja zostanie podjęta w drugim etapie. Odpowiedź ta jest oczywiście błędna.

Optymalną strategią dla uczestnika jest bowiem zawsze dokonywać zmiany swojego pierwszego wyboru, dzięki czemu szanse na wygraną ulegają podwojeniu. Odpowiedź ta, choć niezgodna z intuicją, jest łatwa do uzasadnienia. Wystarczy zauważyć, że wybierając drzwi za pierwszym razem, gracz dokonuje ich swoistego podziału – w jednej trzeciej przypadków główna nagroda znajdzie się u niego (za drzwiami, które wybrał), natomiast w dwóch trzecich za którymś z dwojga pozostałych drzwi, „pozostawionych" gospodarzowi teleturnieju. Decydując się na zmianę w drugim etapie, uczestnik tak naprawdę wymienia

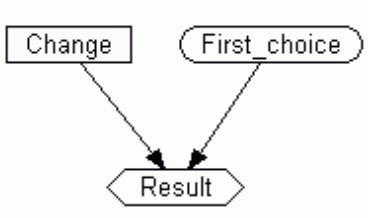
„swoje” drzwi za oboje drzwi prowadzącego. Informacja o tym, za którymi z nich znajduje się koza, nie ma znaczenia, bowiem gdzieś ona musi się znajdować. Zmieniając swój pierwotny wybór, gracz zwiększa szansę na wygraną z jednej trzeciej do dwóch trzecich [4].

4. Konstrukcja diagramu wpływu

4.1. Prosty diagram wpływu dla zagadnienia Monty Halla

Konstrukcję diagramu wpływu rozpoczyna identyfikacja zmiennych oraz określenie wartości, jakie każda z nich może przyjmować.

Diagram wpływu reprezentujący wnioskowanie z poprzedniego akapitu przedstawiono na rysunku 4. Składa się on z trzech zmiennych. Zmienna First_choice jest zmienną losową i jej rozkład reprezentuje szansę trafienia drzwi z główną nagrodą za pierwszym razem. Może ona przyjąć dwie wartości: *good* (oznaczającą że uczestnik wybrał drzwi, za którymi znajduje się samochód) z prawdopodobieństwem 1/3 oraz *bad* (w przeciwnym przypadku) z prawdopodobieństwem 2/3. Zmienna Change jest zmienną decyzyjną. Dwa stany, które może przyjąć to *true*, jeśli gracz zmienia wybrane przez siebie drzwi oraz *false*, jeśli pozostaje przy swoim pierwotnym wyborze.



Rys. 3. Prosty diagram wpływu dla zagadnienia Monty Halla
Fig. 3. Simple influence diagram for Monty Hall dillema

Zmienna Result jest zmienną użyteczności. Stowarzyszona z nią funkcja użyteczności przyjmuje wartość 100 w przypadku, gdy uczestnik za pierwszym razem wybrał właściwe drzwi (First_choice = *good*) oraz nie zmienił swojego wyboru (Change = *false*) lub też wybrał drzwi bez nagrody (First_choice = *bad*), ale zmienił później swój wybór (Change = *true*). W dwóch pozostałych przypadkach funkcja użyteczności przyjmuje wartość 0. Wartości liczbowe dla diagramu przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1
Wartości numeryczne dla diagramu wpływu z rys. 3

First_choice		Change	Result		
			First_choice	Change	wartość
good	1/3	true	good	true	0
bad	2/3	false	good	false	100
			bad	true	100
			bad	false	0

Proste obliczenia pozwalają na wyznaczenie optymalnej strategii, tzn. takiej, która maksymalizuje oczekiwaną wartość. Niech δ oraz δ' oznaczają odpowiednio strategie Change = *false* oraz Change = *true*. Wtedy, wobec warunkowej niezależności zmiennych Change oraz First_choice, ze wzoru (3) otrzymujemy:

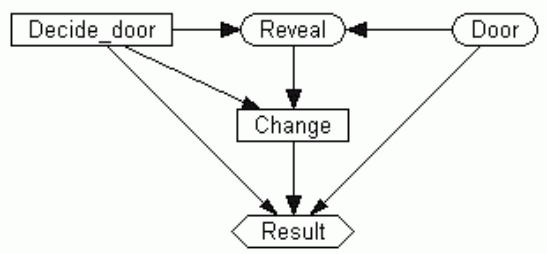
$$E_{\delta}(Result) = P(First_choice = bad) \cdot Result(First_choice = bad, Change = false) +$$
$$+ P(First_choice = good) \cdot Result(First_choice = good, Change = false) =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 100 = 33{,}33\,,$$
$$E_{\delta'}(Result) = P(First_choice = bad) \cdot Result(First_choice = bad, Change = true) +$$
$$+ P(First_choice = good) \cdot Result(First_choice = good, Change = true) =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 100 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 66{,}67\,.$$

Ponieważ $\max\{E_{\delta}, E_{\delta'}\} = E_{\delta'}$, optymalną strategią gracza jest Change = *true*, a więc zmiana pierwotnie wybranych drzwi.

4.2. Rozszerzony diagram wpływu dla zagadnienia Monty Halla

Przedstawione wcześniej sformułowanie zagadnienia Monty Halla zawiera w sobie milczące założenie o jednakowym prawdopodobieństwie znalezienia nagrody za każdym z trojga drzwi. Należy jednak pamiętać, że zgodnie z tym, co napisano w punkcie 1.4, rozkład prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych w diagramie jest tak naprawdę prawdopodobieństwem subiektywnym, wynikającym z wewnętrznego przekonania twórcy modelu (w tym przypadku utożsamianym z uczestnikiem teleturnieju). Można zatem zadać następujące pytania: po pierwsze, jaka powinna być optymalna strategia, jeśli pojawią się pewne przesłanki, z których wynikałby inny rozkład prawdopodobieństwa rozmieszczenia nagrody za drzwiami; po drugie, jaki wpływ na decyzję gracza może mieć wiedza na temat prawdopodobieństwa ujawniania przez gospodarza drzwi, za którymi nie ma głównej wygranej.

Prosty diagram wpływu zaprezentowany w poprzednim punkcie powiela założenia o równomierności rozkładu i w związku z tym nie jest modelem, za pomocą którego można znaleźć odpowiedzi na zadane powyżej pytania. W zagadnieniu Monty Halla gracz podejmuje bowiem dwie decyzje: pierwsza, to które drzwi wybrać za pierwszym razem i druga – czy zmienić swój uprzedni wybór. Rozszerzoną wersję diagramu wpływu dla tego problemu przedstawia rysunek 4.



Rys. 4. Rozszerzony diagram wpływu dla zagadnienia Monty Halla
Fig. 4. Extended influence diagram for Monty Hall dilemma

Składa się on z dwóch zmiennych decyzyjnych – Decide_door (z trzema możliwymi stanami: *door1*, *door2* i *door3*, reprezentującymi pierwszy wybór gracza) oraz Change (analogiczna jak w poprzednim modelu), a także z dwóch zmiennych losowych. Wartości zmiennej losowej Door (*door1*, *door2*, *door3*) informują, za którymi drzwiami znajduje się nagroda. Natomiast zmienna Reveal, uzależniona od zmiennych Decide_door oraz Door, informuje, które drzwi otwiera gospodarz teleturnieju. Warto podkreślić, że przypadku gdy wartości zmiennych Decide_door oraz Door są różne, zmienna ta zachowuje się w sposób deterministyczny (zob. tabela 2). Oczywiście w momencie podejmowania decyzji o zmianie swojego pierwszego wyboru gracz wie, za którymi drzwiami na pewno nie znajduje się wygrana, stąd w grafie krawędź łącząca zmienną Reveal oraz Change.

Tabela 2

Rozkład zmiennej Reveal

Decide_door	Door	Reveal = *door1*	Reveal = *door2*	Reveal = *door3*
door1	*door1*	0	0,5	0,5
door1	*door2*	0	0	1
door1	*door3*	0	1	0
door2	*door1*	0	0	1
door2	*door2*	0,5	0	0,5
door2	*door3*	1	0	0
door3	*door1*	0	1	0
door3	*door2*	1	0	0
door3	*door3*	0,5	0,5	0

Na osobną uwagę zasługuje funkcja użyteczności odpowiadająca zmiennej Result. Wartości przez nią przyjmowane są takie same, jak w poprzednim modelu. Tym razem jednak jej dziedzina składa się z 18 różnych kombinacji wartości jej rodziców (tab. 3).

Tabela 3

Wartości zmiennej Result

Decide_door	Door	Change	Result	Decide_door	Door	Change	Result
door1	*door1*	*true*	0	*door2*	*door2*	*false*	100
door1	*door1*	*false*	100	*door2*	*door3*	*true*	100
door1	*door2*	*true*	100	*door2*	*door3*	*false*	0
door1	*door2*	*false*	0	*door3*	*door1*	*true*	100
door1	*door3*	*true*	100	*door3*	*door1*	*false*	0
door1	*door3*	*false*	0	*door3*	*door2*	*true*	100
door2	*door1*	*true*	100	*door3*	*door2*	*false*	0
door2	*door1*	*false*	0	*door3*	*door3*	*true*	0
door2	*door2*	*true*	0	*door3*	*door3*	*false*	100

Oczywiście, jeśli w modelu przyjmie się równomierny rozkład prawdopodobieństwa wartości zmiennych Door oraz Reveal (tzn. główna wygrana może się znaleźć za dowolnymi drzwiami z takim samym prawdopodobieństwem, z takim samym prawdopodobieństwem ujawniane są też drzwi z kozą), optymalną strategią dla gracza, niezależnie od wybranych na początku drzwi, pozostaje zmiana.

Bardziej interesująca jest sytuacja, jeśli założy się nierównomierny rozkład prawdopodobieństwa. Przykładowo, jeśli decydent spodziewa się, że istnieje dwa razy większe prawdopodobieństwo znalezienia nagrody za drzwiami z numerem jeden niż za którymkolwiek z pozostałych, przypisze zmiennej losowej Door następujący rozkład a priori:
$P(\text{Door} = door1) = 0{,}50$,
$P(\text{Door} = door2) = P(\text{Door} = door3) = 0{,}25$.

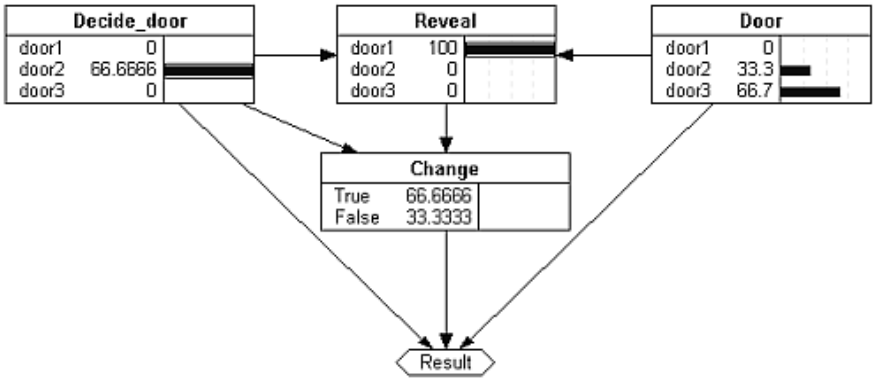
W takim przypadku znaczenie ma już pierwszy wybór gracza. Decydując się na drzwi z numerem jeden, wartość jego użyteczności wyniesie 50, niezależnie od decyzji w drugim etapie. Dzieje się tak dlatego, że oczekiwana użyteczność decyzji o zmianie uzależniona jest od wartości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej Door, możliwego do oszacowania na podstawie dotychczasowych informacji o zmiennych Decide_door oraz Reveal. W momencie poznania wartości zmiennej Reveal uaktywnia się ścieżka pomiędzy zmienną Decide_door oraz Door (zgodnie z drugim punktem definicji ścieżki aktywnej) i pierwotny wybór gracza ma wpływ na prawdopodobieństwo (tak naprawdę – dostarcza nowych informacji) o możliwości znalezienia głównej wygranej za każdym z dwojga zamkniętych drzwi. I tak, dla przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej Door, przyjmując Decide_door = *door1* oraz Reveal = *door2*, zachodzi następująca równość:

$P(Door = 1 \mid Decide_door = 1, Reveal = 2) = P(Door = 3 \mid Decide_door = 1, Reveal = 2)$,
gdzie 1, 2, 3 oznaczają odpowiednio *door1*, *door2*, *door3*.

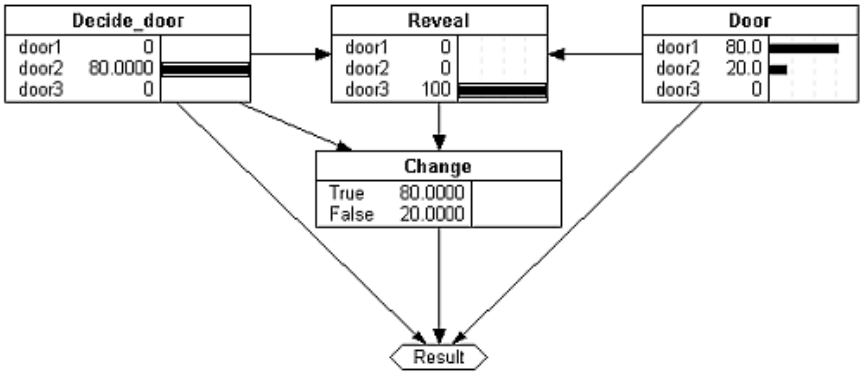
Można to uzasadnić korzystając ze wzoru na $P(Door \mid Decide_door, Reveal)$ i mnożąc obie strony równania przez $P(Reveal = 2 \mid Decide_door = 1)$. Otrzymamy wtedy:
$P(R = 2 \mid D_d = 1, D = 1) \cdot P(D = 1) = P(R = 2 \mid D_d = 1, D = 2) \cdot P(D = 3)$,
gdzie D – Door, D_d – Decide_door, R – Reveal.

Łatwo sprawdzić, że dla przyjętych wartości prawdopodobieństw powyższa równość jest spełniona. Analogiczna równość zachodzi dla Reveal = *door3*.

Sytuacja wygląda inaczej, jeśli gracz jako pierwsze wskaże drzwi o numerze 2 lub 3. W takim przypadku gracz powinien zmienić wybrane drzwi, jednak w zależności od numeru drzwi ujawnionych przez gospodarza oczekiwana użyteczność jest różna (rys. 5 i 6).



Rys. 5. Rozszerzony diagram wpływu, Decide_door = door2, Reveal = door1. Oczekiwana użyteczność gracza przy zmianie drzwi wybranych za pierwszym razem wynosi 66,7
Fig. 5. Extended influence diagram, Decide_door = door2, Reveal = door1. Player's expected utility after changing the door selected first is 66,7

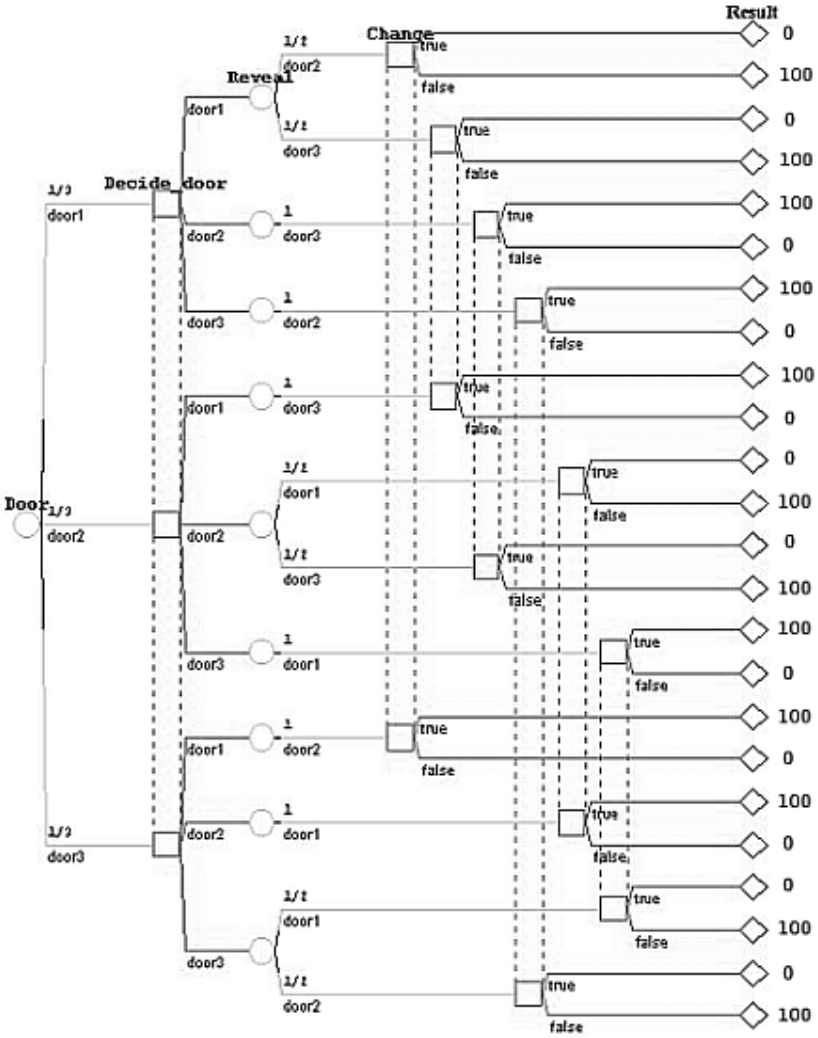


Rys. 6. Rozszerzony diagram wpływu, Decide_door = door2, Reveal = door3. Oczekiwana użyteczność gracza przy zmianie drzwi w tym wypadku wynosi 80
Fig. 6. Extended influence diagram, Decide_door = door2, Reveal = door3. This time player's expected utility after change is 80

Ostatecznie więc, dla przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej Door, mając na celu maksymalizowanie swojej użyteczności, gracz powinien w pierwszym kroku wybrać drzwi drugie lub trzecie, w drugim natomiast zmienić swój wybór.

Zastosowanie algorytmu analizy wrażliwości zmiany prawdopodobieństw warunkowych poszczególnych zmiennych, opisanego np. w [10], pozwoli na ustalenie optymalnych strategii gracza, w zależności szacowanych rozkładów prawdopodobieństw zmiennych losowych. Przykład takiej uproszczonej analizy zaprezentowano w dalszej części artykułu.

Na zakończenie tej części rozważań przedstawiono drzewo decyzyjne (rys. 7) równoważne diagramowi wpływu z rysunku 5. Liniami przerywanymi zaznaczono na nim zbiory informacyjne, tzn. sytuacje nierozróżnialne dla gracza.



Rys. 7. Drzewo decyzyjne zagadnienia Monty Halla
Fig. 7. Monty Hall decision tree

4.3. Diagram wpływu dla „odwrotnego zagadnienia Monty Halla”

Dotychczasowa analiza prowadzona była z pozycji uczestnika. Przez „odwrotne zagadnienie Monty Halla” rozumie się przyjęcie punktu widzenia gospodarza teleturniej. Decyzją, którą musi podjąć prowadzący, to numer otwieranych drzwi. Problem tylko pozornie wydaje się trywialny. Na jego przykładzie można dokonać kilku ciekawych obserwacji na temat wykorzystania diagramów wpływu do modelowania sytuacji decyzyjnych.

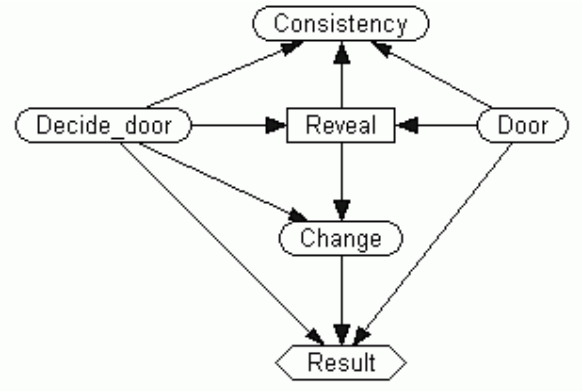
Diagram wpływu „odwrotnego zagadnienia Monty Halla” będzie wyglądał podobnie do modelu przedstawionego na rysunku 4, z tą jednak różnicą, że zmienne Decide_Door oraz Change staną się zmiennymi losowymi, natomiast zmienna Reveal będzie zmienną decyzyjną. Dla uproszczenia przyjmuje się, że gospodarz nie ma wpływu na to, za którymi drzwiami umieszczona jest nagroda (jednak podejmując decyzję jest w posiadaniu tej informacji). Funkcja użyteczności będzie miała postać analogiczną, jak ta przedstawiona w tabeli 3, z tym że wartości 100 i 0 zamienią się miejscami – tym razem celem jest maksymalizacja użyteczności gospodarza.

Pewną trudność może stanowić to, że zbiór możliwych decyzji gospodarza (zbiór stanów zmiennej decyzyjnej Reveal) jest różny, w zależności od wartości, jakie przyjmą wcześniejsze zmienne (gospodarz dysponuje swobodą w wyborze tylko wtedy, gdy uczestnik za pierwszym razem wybierze drzwi, za którymi znajduje się wygrana – w innym przypadku jego decyzja jest zdeterminowana sytuacją). Taka sytuacja nosi nazwę *asymetrycznej* [12]. Nieuwzględnienie asymetryczności decyzji podczas konstrukcji modelu może spowodować, że znaleziona optymalna strategia okaże się niemożliwa do realizacji.

Jeden ze sposobów radzenia sobie z asymetrycznymi sytuacjami decyzyjnymi w diagramach wpływu znaleźć można w [14]. Polega on na dodaniu do diagramu binarnej zmiennej X, której wartość będzie funkcją deterministyczną kombinacji możliwych stanów rodziców tej zmiennej. Wszystkie obliczenia wykonywane są przy ustalonej wartości X, odpowiadającej „legalnym” kombinacjom wartości $pa(X)$.

Właśnie tę metodę wykorzystano przy konstrukcji modelu „odwrotnego zagadnienia Monty Halla”. W diagramie występuje dodatkowa zmienna Consistency, będąca dzieckiem zmiennych Decide_Door, Door oraz Reveal, reprezentująca zgodność modelu z rzeczywistą sytuacją decyzyjną. Przyjmuje ona dwie wartości. Wartość *yes* odpowiada dozwolonym kombinacjom wartości rodziców zmiennej Consistency (tzn. takim, w których prowadzący nie otwiera drzwi wybranych przez gracza lub tych, za którymi ukryta jest nagroda). Wprawdzie zaburzona zostaje w ten sposób klarowność graficznej reprezentacji problemu (w modelu występuje zmienna, która nie ma swojego odpowiednika w rzeczywistości), jednak dzięki ustaleniu zmiennej Consistency na wartość *yes* możliwe jest rozwiązanie

diagramu oraz wykonywanie stosownych obliczeń. Ostateczny diagram dla „odwrotnego zagadnienia Monty Halla" przedstawia rysunek poniżej.



Rys. 8. Diagram wpływu dla „odwrotnego zagadnienia Monty Halla"
Fig. 8. Influence diagram for „reversed Monty Hall dilemma"

Istnieje pewne niebezpieczeństwo związane z wprowadzaniem tego rodzaju modyfikacji. Zauważmy bowiem, że ustalenie wartości zmiennej Consistency spowoduje otwarcie aktywnej ścieżki pomiędzy zmiennymi Decide_door oraz Door i zmienne te nie będą d-separowalne. Tym samym staną się od siebie zależne, co może świadczyć o niepoprawności modelu (model jest poprawny, jeśli odwzorowuje warunkowe niezależności zachodzące w rzeczywistości – informacja o wyborze uczestnika nie powinna więc wpływać na prawdopodobieństwo umieszczenia nagrody za poszczególnymi drzwiami). Mimo tego możliwa jest jednak taka manipulacja rozkładem zmiennej Consistency, aby zachodziła równość:

$$P(Door \mid Consistency = yes) = P(Door \mid Consistency = yes, Decide_door), \qquad (6)$$

a tym samym zachodziła warunkowa niezależność między Decide_door oraz Door. Wymaga to jednak modyfikacji metody opisanej w [14] i ustalenia rozkładu zmiennej Consistency w taki sposób, aby jej wartości były w niektórych przypadkach przyjmowane z pewnym prawdopodobieństwem różnym od 1. Dokonując przekształceń równości (6) otrzymujemy bowiem:

$$P(yes \mid Door) \cdot P(yes \mid Decide_door) = P(yes) \cdot P(yes \mid Door, Decide_door), \qquad (7)$$

gdzie (dla zachowania przejrzystości zapisu) *yes* rozumiane jest jako Consistency = *yes*. Równość (7) zachodzi, jeśli rozkład zmiennej Consistency przyjmie postać przedstawioną w tabeli 4.

Tabela 4

Prawidłowy rozkład zmiennej Consistency

R	D	D_d	*yes*	*no*	R	D	D_d	*yes*	*no*	R	D	D_d	*yes*	*no*
door1	*door1*	*door1*	0	1	*door2*	*door1*	*door1*	0,5	0,5	*door3*	*door1*	*door1*	0,5	0,5
door1	*door1*	*door2*	0	1	*door2*	*door1*	*door2*	0	1	*door3*	*door1*	*door2*	1	0
door1	*door1*	*door3*	0	1	*door2*	*door1*	*door3*	1	0	*door3*	*door1*	*door3*	0	1
door1	*door2*	*door1*	0	1	*door2*	*door2*	*door1*	0	1	*door3*	*door2*	*door1*	1	0
door1	*door2*	*door2*	0,5	0,5	*door2*	*door2*	*door2*	0	1	*door3*	*door2*	*door2*	0,5	0,5
door1	*door2*	*door3*	1	0	*door2*	*door2*	*door3*	0	1	*door3*	*door2*	*door3*	0	1
door1	*door3*	*door1*	0	1	*door2*	*door3*	*door1*	1	0	*door3*	*door3*	*door1*	0	1
door1	*door3*	*door2*	1	0	*door2*	*door3*	*door2*	0	1	*door3*	*door3*	*door2*	0	1
door1	*door3*	*door3*	0,5	0,5	*door2*	*door3*	*door3*	0,5	0,5	*door3*	*door3*	*door3*	0	1

R – Reveal, D – Door, D_d – Decide_door

Na podstawie tak opracowanego modelu można teraz znaleźć optymalną strategię dla gospodarza. Oczywiście, jak to już wielokrotnie wspomniano, gospodarz ma wybór jedynie w przypadku, gdy gracz w swoim pierwszym wskazaniu wskaże na drzwi, za którymi ukryta jest główna wygrana. Użyteczność gospodarza zależy wtedy od prawdopodobieństwa, z jakim uczestnik zmieni swoje pierwsze wskazanie. Załóżmy, że zmienne Decide_door oraz Door przyjęły wartość *door1* (uczestnik wskazał drzwi numer 1, prowadzący wie, że właśnie tam znajduje się główna wygrana). Niech a będzie wartością prawdopodobieństwa, że gracz zmieni swój wybór, jeśli gospodarz odkryje drzwi numer 2, natomiast b – wartością prawdopodobieństwa, że gracz zmieni swój wybór w wypadku, gdy otwarte zostaną drzwi numer 3, tzn.:

$$P(Change = true \mid Decide_door = door1, Reveal = 2) = a,$$

$$P(Change = true \mid Decide_door = door1, Reveal = 3) = b.$$

Niech ponadto t będzie wartością prawdopodobieństwa, że gospodarz otworzy drzwi z numerem 2. Wtedy oczekiwana użyteczność gospodarza będzie wynosić:

$$Result(Decide_door = 1, Door = 1) = t(100a + 0 \cdot (1-a)) + (1-t) \cdot (100b + 0 \cdot (1-b)) =$$

$$= 100(ta + (1-t)b) = 100(t(a-b) + b).$$

Jak widać, wartość zmiennej Result jest liniową funkcją t. Funkcja ta jest rosnąca dla $a > b$, malejąca dla $a < b$. W pierwszym przypadku gospodarz powinien otworzyć drzwi numer dwa (jego użyteczność wynosi w tym wypadku $100a$), w drugim – drzwi z numerem 3 (użyteczność równa $100b$). Jeśli $a = b$, decyzja, które drzwi otworzyć, nie ma znaczenia dla wartości wypłaty.

Warto jeszcze raz podkreślić, że a oraz b wyrażają jedynie przekonanie prowadzącego teleturniej na temat prawdopodobieństw, z jakim gracz dokona zmiany wybranych drzwi.

5. Podsumowanie

Zaprezentowane rozważania, przedstawione na prostych przykładach, miały na celu zwrócenie uwagi na pewne aspekty modelowania sytuacji decyzyjnych przy użyciu diagramów wpływu. Przede wszystkim, acykliczny graf skierowany, stanowiący graficzną warstwę diagramu, pozwala na „skalowalność" reprezentacji, tzn. w zależności od informacji potrzebnych decydentowi pewne zmienne mogą być łączone i traktowane jako jedna lub też rozpatrywane każda z osobna. W tym drugim przypadku często łatwiej jest uzyskać charakterystyki liczbowe poszczególnych zmiennych, obejmując pozostałe klauzulą *ceteris paribus*. Tutaj ujawnia się kolejna cecha diagramów, mianowicie budowa modułowa. Modyfikacje założeń sytuacji problemowej często wymagają jedynie niewielkich zmian w samym modelu. Oczywistą zaletą diagramów wpływu, podkreślaną w niemal każdej z pozycji literaturowych, jest relatywnie niewielki rozmiar warstwy graficznej w porównaniu do równoważnej reprezentacji za pomocą tradycyjnego drzewa decyzyjnego. Należy jednak zauważyć, że w algorytmach służących do ewaluacji diagramów wpływu często stosuje się ich przekształcenie na inne struktury graficzne [10, 11, 15].

Pewien problem mogą stanowić sytuacje asymetryczne, w których zbiór możliwych do podjęcia decyzji zmienia się w zależności od rozwoju sytuacji. W pracy przedstawiono, w jaki sposób kosztem zaburzenia klarowności struktury graficznej modelu radzić sobie w niektórych przypadkach. Koncepcje diagramów wpływu dla sytuacji asymetrycznych znaleźć można między innymi w [3, 12].

W sytuacjach decyzyjnych z udziałem dwóch lub więcej uczestników o sprzecznych lub przynajmniej nie w pełni zgodnych celach automatycznie pojawia się pytanie o możliwość stosowania mechanizmów wypracowanych przez teorię gier. Metody połączenia koncepcji diagramów wpływu oraz elementów teorii gier (dokładniej gier bayesowskich) znaleźć można w [5]. Sam diagram wpływu jako model jednoosobowego procesu decyzyjnego może służyć jako reprezentacja gier z naturą, w których występuje wiele powiązanych ze sobą zmiennych losowych. Ale nie tylko. Zaprezentowane w artykule przykłady podsuwają pomysł stosowania diagramów wpływu do modelowania i przewidywania zachowań oponentów. Zachowań zarówno tych racjonalnych, jak i nie do końca racjonalnych, wynikających z pewnych wewnętrznych przekonań, uprzedzeń i subiektywnych odczuć (wnioskowanie typu „myślę, że on myśli..."). Tego rodzaju rozważania poruszane są np. w [18], gdzie diagramy wpływu wykorzystuje się w systemach wieloagentowych do nauki zachowań innych agentów. Podobną koncepcję znaleźć można w [8], gdzie autorzy wykorzystują tzw. sieci diagramów wpływu (*networks of influence diagrams*) do modelowania zachowań przeciwnika w grach powtarzalnych. Wreszcie, naturalnym rozwinięciem diagramów wpływu o elementy teorii gier stanowią wieloosobowe diagramy

wpływu (*multi-agents influence diagram*) zaprezentowane w [13]. Wydaje się, że połączenie reprezentacji sytuacji decyzyjnych w postaci diagramów wpływu oraz elementów teorii gier stanowi szerokie pole do dalszych badań.

LITERATURA

1. Agogino A.M., Rege A.: Topological framework for representing and solving probabilistic inference problems in expert systems, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 18(3), 1998.
2. Bednarski M.: Metody doskonalenia sieci bayesowskich stosowanych w diagnostycznych systemach doradczych. Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2006.
3. Bielza C., Shenoy P. P.. A comparison of graphical techniques for asymmetric decision problems. Management Science, 45(11), 1999, p. 1552-1569.
4. Bogomolny A.: Monty Hall Dilemma, http://www.cut-the-knot.org/hall.shtml.
5. Brynielson J., Arnborg S.: Bayesian games for threat prediction and situation analysis, Proceedings of the 7th International Conference on Information Fusion. International Society of Information Fusion, 2004.
6. Charniak E.: Bayesian network without tears, AI Magazine 12, 1991, p. 50-63.
7. Druzdzel M. J., Gaag van der L. C.: Building probabilistic networks: where do the numbers come from? – Guest editors' introduction, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering 12(4), 2000, p. 481-486.
8. Gal Y., Pfeffer A.: A language for opponent modeling in repeated games, Proceedings of the 5th Workshop on Game Theoretic and Decision Theoretic Agents, 2003.
9. Griffin R. W.: Podstawy zarządzania organizacjami. PWN, Warszawa 2000.
10. Jensen, F. V.: Bayesian networks and decision graphs, Springer-Verlag, 2001.
11. Jensen, F., Jensen, F. V., and Dittmer, S. L.: From Influence Diagrams to Junction Trees.,Proceedings of the 10th Conference on UAI, 1994, p. 367-373.
12. Jensen F. V., Nielsen T. D., Shenoy P. P..: Sequential influence diagrams: a unified asymmetry framework, International Journal of Approximate Reasoning Vol. 42, (1-2), 2006, p. 101-118.
13. Koller D., Milch B.: Multi-agent influence diagrams for represensting and solving games, Seventeenth International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2001, p. 1027-1034.
14. Madsen A. L., Olesen K. G., Dittmer S. L: Practical modeling of bayesian decision problems – exploiting deterministic relations, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B: Cybernetics, Vol. 32(1), 2002.
15. Netica. Application for belief networks and influence diagrams. User's guide, Norsys Software Corp., 1997.

16. Qi R., Poole, D.: A new method for influence diagram evaluation, Computational Intelligence, Vol. 11(3), 1995, p. 498-528.
17. Shafer G., Pearl J.: Readings in Uncertain Reasoning, Chapter 3: Introduction, Morgan Kaufmann, 1990.
18. Suryadi, D., Gmytrasiewicz, P. Learning Models of Other Agents using Influence Diagrams, Proceedings of the Seventh International Conference on User Modeling, 1999, p. 223-232.
19. Weisstein, E. W.: Monty Hall Problem, From MathWorld-A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/MontyHallProblem.html.

Recenzent: Dr hab. inż. Ireneusz Jóźwiak
Prof. nzw. Politechniki Wrocławskiej

Abstract

The paper is organized as follow. In section one there are described graphical models as an approach to reasoning under uncertainty. Section two contains formal definition of influence diagram. Terms such as decision rule, conditional independency and d-separation are explained. Section three presents the famous Monty Hall problem.

In section four, the main part of the paper, firstly two models for Monty Hall problem are presented. The simple influence diagram (Fig. 3) allows to find the optimal decision in classical Monty Hall problem. With the extended influence diagram (Fig. 4) the optimal solution depending on player's belief of the probability distribution is discussed. Subsequently "reversed Monty Hall problem" is presented and a model of it is given (Fig. 8). It is also described here how to deal with asymmetric decision.

The last section contains conclusions and references to latest developments in graphical models.